现代数学基础丛书 149

索伯列夫空间导论

陈国旺 编著

科学出版社

(O-5218.0101)

www.sciencep.com



定 价：118.00 元

科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
Email：math-phy@mail.sciencep.com
网 址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

现代数学基础丛书 149

索伯列夫空间导论

陈国旺 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要讲述索伯列夫空间一般理论和在非线性偏微分方程中的应用. 内容涉及 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 及其基本性质; 整数阶索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 及其性质; $W^{m,p}(\Omega)$ 空间的嵌入定理、紧嵌入定理和插值定理以及连续函数空间的嵌入定理. 论述研究非线性发展方程时, 常用到的含有时间的空间和含有时间的索伯列夫空间. 介绍类似于索伯列夫空间嵌入定理的离散函数的插值公式, 并利用离散函数的插值公式证明广义 Schrödinger 型方程组初边值问题整体广义解的存在唯一性. 讲述速降函数、缓增广义函数以及它们的 Fourier 变换和 Lebesgue 空间的 Fourier 变换, 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 和 $H^s(\Omega)$ 及其性质. 介绍近年来国内外关注的几个非线性发展方程的初边值问题和 Cauchy 问题解的存在唯一性以及解的爆破现象和解的渐近性质, 使读者较快地利用索伯列夫空间这个有力理论工具, 进入研究偏微分方程等学科的前沿.

本书可作为偏微分方程、计算数学、泛函分析、数学物理、控制论和微分几何等专业的本科生、研究生的教材和参考书, 也可供从事相关专业研究的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

索伯列夫空间导论/陈国旺编著. —北京: 科学出版社, 2013
(现代数学基础丛书; 149)

ISBN 978-7-03-038239-9

Ⅰ. ①索… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①索伯列夫空间 Ⅳ. ①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 176683 号

责任编辑: 赵彦超 徐园园 / 责任校对: 桂伟利
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)
2013 年 8 月第一次印刷 印张: 26 1/2
字数: 530 000

定价: 118.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

著名数学家、前苏联科学院院士索伯列夫 · 谢尔盖 · 李沃维奇 (Соболев Серге Львович)1908 年 10 月 6 日生于圣彼得堡, 1989 年 1 月 7 日逝世于莫斯科. 索伯列夫的主要工作在偏微分方程理论、数学物理、泛函分析和计算数学等方面. 他是最早在偏微分方程理论中系统运用泛函分析方法的数学家. 由于他引进了一类泛函空间, 为偏微分方程理论的发展作出了基础性贡献, 所以人们称这一类泛函空间为索伯列夫空间. 索伯列夫研究了这些空间的结构以及它们之间的嵌入定理, 还引入了偏微分方程广义解概念, 并在 1935 年给出了广义函数的第一个严格定义. 现在索伯列夫空间已成为研究偏微分方程、数学物理、计算数学、微分几何和许多其他学科的理论基础和重要工具. 但是目前国内外关于索伯列夫空间理论的专著和研究生教材不多, 而且内容侧重面也不同, 在教学中有很多不便. 一般专著起点高, 有些重要定理的证明比较简略或没有证明, 对初学者或研究生来讲, 学习起来比较困难[1−9]. 涉及偏微分方程的专著或教科书, 往往将索伯列夫空间的内容作为预备知识, 不但内容少, 而且大部分都把证明略去了[10−23]. 这比较适合已掌握索伯列夫空间知识的读者, 而不适合初学者.

本书作者已为郑州大学数学系研究生和青年教师讲授索伯列夫空间课程二十多年, 比较了解他们应该学习和掌握索伯列夫空间的哪些内容. 在讲授索伯列夫空间课程与指导硕士生和博士生的实践过程中, 体会到现有的索伯列夫空间方面的教科书侧重点不同, 不能满足研究生的教学需求. 为了方便教学, 并使他们学好专业和提高科研能力, 作者编写了这本适合研究生教学和青年学者自学的教材.

索伯列夫空间课程是数学系硕士研究生和博士研究生学习偏微分方程、数学物理、泛函分析、计算数学、微分几何等方向的专业基础课, 所以作者确定内容时, 既要照顾到不同的专业要求, 还要考虑到书的系统性, 为此参阅了与索伯列夫空间有关的专著、教科书和文献, 吸收了它们的长处 (见每章中所引文献). 并根据讲授情况和师生们反映的意见, 经过逐年增补, 修改写成本书. 本书是一本为研究生和青年学者踏进偏微分方程等学科研究领域打好索伯列夫空间理论基础的入门书, 书中内容由浅入深, 有广度和深度, 结构严谨, 定理论证严密详细, 语言表达流畅, 全书自成体系. 特别为使读者掌握索伯列夫空间理论后, 能够较快地运用它, 进入研究偏微分方程等学科的前沿. 学完整数阶索伯列夫空间后, 在第 6 章中介绍国内外关注的非线性抛物型方程和非线性波动方程的初边值问题等; 学完离散函数空间和插值公式后, 在第 7 章中介绍 Schrödinger 型方程组的初边值问题; 在

第 8 章中介绍分数阶索伯列夫空间. 第 9 章作为索伯列夫空间在偏微分方程中的应用, 主要讨论非线性波动方程的 Cauchy 问题. 研究具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题. 还研究具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题.

为了方便读者, 书中用到实变函数和泛函分析的定理时, 只写出定理, 不做证明. 具备数学分析、实变函数和泛函分析基础的读者容易读懂和掌握书中的内容.

本书共分九章, 下面简要介绍各章内容.

第 1 章是基础知识, 讲述泛函分析的一些概念、定义和定理, 大多数定理不加证明, 只证明 $C^m(\overline{\Omega})$ 空间和 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 空间的完备性. 这一章的内容是以后讨论问题的基础.

第 2 章论述 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 的完备性、弱完备性、可分性、一致凸性和自反性等基本性质. 还讲述下面章节需要的 $L^p(\Omega)$ 空间的 Riesz 表示定理、Marcinkiewicz 插值定理和混合范数 L^p 空间等. 因为索伯列夫空间是 $L^p(\Omega)$ 空间的子空间, 学习好 $L^p(\Omega)$ 空间理论对掌握索伯列夫空间内容至关重要, 所以为了完整和系统起见, 不但每个定理都有证明, 而且都较为详细.

第 3 章介绍索伯列夫空间的预备知识: 广义函数, 广义函数的支集、直积、卷积和导数以及区域的几何性质. 论述整数阶索伯列夫空间的基本性质, 如完备性、可分性、一致凸性和自反性等. 还证明单位分解定理和 Gagliardo 定理. 最后论述对偶性与空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 和证明有关定理.

第 4 章主要论述索伯列夫空间的嵌入定理、连续函数空间的嵌入定理、插值定理和紧嵌入定理. 这些都是很重要的内容, 所以都做了详细证明.

第 5 章讲述研究非线性发展方程时, 常常用到含有时间的空间和含有时间的索伯列夫空间. 为此, 先介绍必要的预备知识: 抽象函数及其 Bochner 积分, 然后介绍含有时间的空间和含有时间的索伯列夫空间, 最后介绍 Aubin 引理. 对所有定理都作了证明.

第 6 章为了使读者较快地利用索伯列夫空间这个有力工具阅读和研究非线性偏微分方程, 讨论近年来国内外所关注的一类非线性抛物型方程初边值问题的整体广义解和整体古典解的存在性、唯一性和解的渐近性质; 证明一般线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题存在唯一的弱解; 考虑具阻尼非线性双曲型方程初边值问题和广义立方双色散方程初边值问题解的爆破现象; 研究一类四阶非线性发展方程初边值问题解的渐近性质以及讨论广义 IMBq 型方程组的初边值问题. 在这些讨论的问题中用到了索伯列夫空间嵌入定理、紧嵌入定理、内插定理和含有时间的索伯列夫空间等.

第 7 章介绍离散函数空间的插值公式和应用. 索伯列夫空间的嵌入定理和插值定理对于研究偏微分方程和数值分析起着重要的作用. 对于离散函数空间也有

类似的插值公式, 这些插值公式对于研究偏微分方程和有限差分方法同样起着重要的作用. 我们介绍离散函数空间之后, 作为其应用, 讨论广义 Schrödinger 型方程组初边值问题, 利用有限差分方法证明其存在唯一的整体广义解.

第 8 章主要介绍: 速降函数、缓增广义函数和 Lebesgue 空间函数的 Fourier 变换; 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 和 $H^s(\Omega)$ 及其性质.

第 9 章作为分数阶索伯列夫空间的应用, 证明具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题在两个不同空间中存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解, 并给出解爆破的充分条件, 还研究具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题.

第 3~9 章可以说是本书的主要部分.

在本书中, 参考文献用方括号, 方程和公式用圆括号标出. 区域这个术语和符号 Ω 专门用来表示实 N 维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中的开集. 其他符号当第一次出现时说明其表示的意思, 以后表示同样的意思, 将不再说明.

本书在郑州大学讲授和撰写过程中, 苗长兴教授、杨志坚教授、王书彬教授、邢家省副教授、任留成教授、赵占才副教授、郭秀兰教授、宋长明教授、江成顺教授、张宏伟教授、呼青英教授、王艳萍教授、韩献军博士、薛红霞博士、郭红霞博士、王玉柱博士、耿世峰博士、郭青博士、陈翔英副教授和达芳讲师等曾提出过宝贵意见, 在此一并致谢. 特别是杨志坚教授曾以本书为教材为郑州大学数学系的研究生讲授索伯列夫空间课程, 并提出宝贵意见, 特此向他表示感谢. 还要感谢胡明瑞女士、陈翔宇先生、陈翔英副教授、郭红霞博士和达芳讲师, 为本书打印和排版所付出的劳动. 本书获得中国科学院出版基金的资助, 特此表示感谢!

由于作者学识所限, 书中不妥之处, 真诚地欢迎读者批评指正.

陈国旺

2012 年 12 月于郑州

目　录

《现代数学基础丛书》序

前言

第 1 章　基础知识 ························ 1

1.1　几个基本空间的定义 ························ 1

1.1.1　距离空间 ························ 1

1.1.2　线性空间 ························ 2

1.1.3　线性赋范空间 ························ 2

1.1.4　Hilbert 空间 ························ 4

1.2　线性算子与线性泛函 ························ 4

1.2.1　线性算子 ························ 4

1.2.2　线性泛函 ························ 6

1.3　连续函数空间 ························ 8

1.3.1　$C^m(\overline{\Omega})$ 空间的完备性 ························ 8

1.3.2　$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 空间的完备性 ························ 10

1.4　Hilbert 空间的 Riesz 表示定理与 Lax-Milgram 定理 ························ 12

第 2 章　$L^p(\Omega)$ 空间及其基本性质 ························ 14

2.1　$L^p(\Omega)$ 空间 ························ 14

2.1.1　$L^p(\Omega)$ 空间的定义 ························ 14

2.1.2　Hölder 不等式、Minkowski 不等式和 $L^p(\Omega)$ 范数的内插不等式 ························ 15

2.1.3　$L^p(\Omega)$ 空间的完备性 ························ 22

2.1.4　$L^p(\Omega)$ 空间的一致凸性 ························ 24

2.1.5　$L^p(\Omega)$ 空间的一个嵌入定理 ························ 32

2.1.6　$C_c(\Omega)$ 空间在 $L^p(\Omega)$ 空间中的稠密性 ························ 34

2.1.7　卷积、函数的正则化和 $C_c^\infty(\Omega)$ 空间在 $L^p(\Omega)$ 空间中的稠密性 ························ 36

2.1.8　$L^p(\Omega)$ 空间的可分性 ························ 46

2.1.9　$L^p(\Omega)$ 空间元素的整体连续性 ························ 47

2.2　$L^p(\Omega)$ 空间上线性泛函的表示形式 ························ 49

2.2.1　预备知识 ························ 49

2.2.2　$L^p(\Omega)$ 空间的 Riesz 表示定理 ························ 55

2.3 $L^p(\Omega)$ 空间的弱完备性 …… 60
2.3.1 紧集的定义和关于强紧集定理 …… 60
2.3.2 $L^p(\Omega)$ 空间的弱完备性与弱紧集定理 …… 60
2.4 弱 $L^p(\Omega)$ 空间、Marcinkiewicz 插值定理 …… 65
2.4.1 弱 $L^p(\Omega)$ 空间、次线性算子、强型算子和弱型算子 …… 65
2.4.2 Marcinkiewicz 插值定理 …… 69
2.4.3 Minkowski 积分不等式 …… 69
2.5 混合范数 L^p 空间 …… 74
2.6 $L^p(\Omega)$ 空间中的准紧集 …… 75
第 3 章 整数阶索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 及其基本性质 …… 79
3.1 广义函数 …… 79
3.1.1 广义函数的性质 …… 80
3.1.2 广义函数的支集 …… 85
3.1.3 广义函数的直积 …… 85
3.1.4 广义函数的卷积 …… 89
3.1.5 广义函数的导数 …… 95
3.2 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间及其性质 …… 99
3.3 单位分解定理 …… 110
3.4 区域的几何性质 …… 113
3.5 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的稠密性 …… 120
3.6 $H^{m,p}(\Omega)$ 空间 …… 124
3.7 对偶性与空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$ …… 125
3.7.1 $W^{m,p}(\Omega)$ 的对偶与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的赋范对偶 …… 126
3.7.2 空间 $L^{p'}(\Omega)$ 的 $(-m,p')$-范数 …… 128
3.8 差商与空间 $W^{1,p}(\Omega)$ …… 129
第 4 章 索伯列夫空间的嵌入定理和插值定理 …… 132
4.1 嵌入的含义、坐标变换 …… 132
4.1.1 嵌入的含义 …… 132
4.1.2 坐标变换 …… 137
4.2 嵌入定理 …… 141
4.3 作为 Banach 代数的 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间 …… 158
4.4 插值定理 …… 163
4.5 紧嵌入定理 …… 180
4.6 延拓定理 …… 188

4.7 边界迹 ······ 194
4.8 Poincaré 不等式和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的一个等价范数 ······ 197
第 5 章 含有时间的空间 ······ 199
5.1 抽象函数 ······ 199
5.2 抽象函数的 Bochner 积分 ······ 202
5.3 含有时间的空间 ······ 207
5.3.1 $L^p((0,T);X)$ 空间的完备性 ······ 207
5.3.2 $L^\infty((0,T);X)$ 空间的完备性 ······ 209
5.4 含有时间的索伯列夫空间 ······ 211
5.5 Aubin 引理 ······ 215
第 6 章 索伯列夫空间在偏微分方程中的应用 (I) ······ 219
6.1 预备知识 ······ 219
6.1.1 Gronwall 不等式 (微分形式) ······ 219
6.1.2 Gronwall 不等式 (积分形式) ······ 220
6.1.3 Jensen 不等式 ······ 221
6.1.4 Leray-Schauder 不动点定理 ······ 221
6.2 广义 Ginzburg-Landau 模型方程的初边值问题 ······ 222
6.2.1 初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 整体解的存在性与唯一性 ······ 223
6.2.2 解的渐近性质 ······ 241
6.3 一般线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题 ······ 242
6.4 具阻尼非线性双曲型方程的初边值问题 ······ 244
6.5 广义立方双色散方程的初边值问题 ······ 251
6.6 一类四阶非线性发展方程初边值问题解的渐近性质 ······ 257
6.7 广义 IMBq 型方程组的初边值问题 ······ 260
6.7.1 问题的提出和广义解的定义 ······ 261
6.7.2 初边值问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 的整体解 ······ 264
6.7.3 问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的整体解 ······ 275
第 7 章 离散函数空间的插值公式和应用 ······ 277
7.1 一个指标的离散函数 ······ 277
7.1.1 离散函数的插值公式 ······ 277
7.1.2 关于离散函数指数为 α 的 Hölder 系数的不等式 ······ 285
7.1.3 一个离散函数的不等式 ······ 286
7.1.4 有限维空间连续映射的不动点定理 ······ 288
7.2 广义 Schrödinger 型方程组初边值问题的有限差分法 ······ 288

7.2.1 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$ 和有限差分边值条件 $(*)_h$ 解的存在性和唯一性 ······ 290
7.2.2 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$ 在适当的有限差分边值条件 $(*)_h$ 和离散的初值条件 $(7.2.8)_h$ 下解的先验估计 ······ 292
7.2.3 当 $h^2+\Delta t^2 \to 0$ 时, 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(*)_h$, $(7.2.8)_h$ 的离散向量解 $v_\Delta = \{v_j^n | j=0,1,\cdots,J; n=0,1,\cdots,N\}$ 的收敛性 ······ 299
第 8 章 分数阶索伯列夫空间 ······ 307
8.1 速降函数、缓增广义函数 ······ 307
8.1.1 速降函数 ······ 307
8.1.2 缓增广义函数 ······ 310
8.2 Fourier 变换 ······ 314
8.2.1 $\mathscr{S}$ 空间中函数的 Fourier 变换 ······ 314
8.2.2 $\mathscr{S}'$ 空间中函数的 Fourier 变换 ······ 320
8.2.3 Lebesgue 空间中函数的 Fourier 变换 ······ 324
8.3 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ ······ 333
8.4 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 空间范数的内插 ······ 342
8.5 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\Omega)$ ······ 343
第 9 章 索伯列夫空间在偏微分方程中的应用 (II) ······ 349
9.1 具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题 ······ 349
9.1.1 问题的来历 ······ 349
9.1.2 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 在 $C^2([0,\infty);H^s)$ 中整体解的存在唯一性和解的爆破 ······ 350
9.2 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 在 $C^3([0,\infty);W^{m,p}\bigcap L^\infty \bigcap L^2)$ 中的整体解的存在唯一性和解的爆破 ······ 367
9.3 具 Stokes 阻尼项的 IMBq 方程的 Cauchy 问题 ······ 376
9.3.1 辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 整体解的存在性和唯一性 ······ 376
9.3.2 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) ······ 385
参考文献 ······ 390
附录 ······ 396
索引 ······ 401
《现代数学基础丛书》已出版书目 ······ 406

第1章 基础知识

为了更方便地阅读本书, 本章介绍一些今后常用的泛函分析中的基本概念和定理, 其中除了证明个别定理外, 一般只写出定理的具体内容, 不加证明, 更详尽的内容可以从其他教科书或专著中查到[24-27].

1.1 几个基本空间的定义

1.1.1 距离空间

定义 1.1.1 设 X 是一非空集合. X 称为距离空间 (又称度量空间), 是指在 X 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$ 满足下列三个公理:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)\quad(x,y,z\in X)$,

其中 ρ 称为 X 上的一个距离; $x\in X$ 表示 X 包含元素 x 或 x 属于 X.

定义 1.1.2 设 X 是一距离空间. 称 $L:X\mapsto X$ 是一个压缩映射, 如果存在 $0<a<1$, 使得 $\rho(Lx,Ly)\leqslant a\rho(x,y)$, $\forall x,y\in X$, 其中符号 $\forall$ 表示 "对于每一个".

定理 1.1.1 (Banach 不动点定理–压缩映射原理) 设 X 是一完备的距离空间, L 是将 X 映入自身的一个压缩映射, 则 L 存在唯一的不动点, 即存在唯一的 $x\in X$, 使得 $Lx=x$.

定义 1.1.3 设 X 是一距离空间, M 为其一子集, 称 M 是列紧集, 如果 M 中任一无穷点集在 X 中有一个收敛子列. 如果这个子列还收敛到 M 中的点, 则称 M 是自列紧的. 如果空间 X 是列紧的, 则称 X 为列紧空间.

定义 1.1.4 设 X 是一距离空间, X 中的集合 M 称紧集, 如果 X 中的每个覆盖 M 的开集族中有有穷个开集覆盖集合 M. 如果空间 X 本身按定义 1.1.3 是紧的, 则称 X 为紧距离空间. 距离空间 X 的子集 M 称准紧的, 如果其闭包 $\overline{M}$ (在距离拓扑下) 是紧的.

定理 1.1.2 设 X 是一距离空间, 则 X 中的集合 M 是紧的充要条件是它为自列紧集.

定理 1.1.3 (1) $\mathbb{R}^N$($\mathbb{R}^N$ 表示 N 维 Euclid 空间, 简称 N 维欧氏空间, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$) 中的任意有界集是列紧集, 任意有界闭集是自列紧集;

(2) 列紧空间内任意 (闭) 子集都是 (自) 列紧集;

(3) 列紧空间必是完备空间.

1.1.2 线性空间

定义 1.1.5 设 X 是由元素 $x, y, z, \cdots$ 组成的集合. 在集合 X 中定义加法和数乘运算如下:

(1) X 中的加法运算, 即 X 中每一对元素 x 和 y 与 X 中的元素 z 对应, 称为 x 与 y 的和, 并记为 $x+y$, 即

$$z = x + y;$$

(2) X 中的数乘运算, 即 X 中每一个元素 x 和数域 $\mathbb{K}$($\mathbb{K}$ 是实 (或复) 数域) 中任一数 a (称为标量) 对应 X 中一元素 z, 称为 a 和 x 的积, 记为 ax, 即

$$z = ax;$$

(3) 集合 X 在其内定义了加法运算和数乘运算后, 称为实 (或复) 线性空间, 如果满足下列公理:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in X$;

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in X$;

(iii) X 中存在唯一的元素 θ, 称为零元素, 使得对于每一个元素 $x \in X$, 有

$$x + \theta = x;$$

(iv) 对于 $x \in X$ 在 X 中存在唯一的元素 $(-x)$, 使得

$$x + (-x) = \theta;$$

(v) $a(x + y) = ax + ay, \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(vi) $(a + b)x = ax + bx, \quad a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(vii) $a(bx) = (ab)x, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(viii) $1 \cdot x = x$.

线性空间的元素又称为向量, 因而线性空间也称为向量空间.

注 1.1.1 除了特别声明外, 本书主要讲实的线性空间.

1.1.3 线性赋范空间

定义 1.1.6 如果集合 X 满足下列两类条件, 则称 X 为线性赋范空间.

(1) X 是线性空间;

(2) X 是赋范空间, 即每一个元素 $x \in X$, 有唯一的一个实数与之对应, 此数称为元素 x 的范数, 记为 $\|x; X\|$ 或 $\|x\|_X$, 且满足下列范数公理:

(i) $\|x;X\| \geqslant 0$, 而且 $\|x;X\|=0$, 当且仅当 $x=\theta$ (正定性公理);

(ii) $\|x+y;X\| \leqslant \|x;X\|+\|y;X\|$ (三角不等式公理);

(iii) $\|ax;X\|=|a|\|x;X\|(a\in\mathbb{R})$ (齐次性公理).

设 x,y 是线性赋范空间 X 中的一对元素, 称

$$\rho(x,y)=\|x-y;X\|$$

为 X 中两点 x 和 y 之间的距离. 如果按上式定义距离, 每一线性赋范空间是一距离空间.

定义 1.1.7 设 X 是一线性赋范空间, 并令 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 的两个范数, 称 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价, 如果存在常数 $c,d>0$, 使得

$$c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant d\|x\|_1, \quad \forall x\in X.$$

定义 1.1.8 设 X 是一线性赋范空间和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中一元素序列, 我们称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 $x\in X$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x;X\|=0.$$

我们也称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中强收敛于 x 或称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 的范数意义下收敛于 x. 有时也把这种收敛简记为在 X 中 $x_n\to x$.

定义 1.1.9 称序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性赋范空间 X 中一基本序列(或称为 Cauchy 序列), 如果

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n;X\|=0.$$

易证每一个收敛序列是基本序列, 反之一般不成立. 如果对于线性赋范空间 X 中任一基本序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 总存在一个元素 $x\in X$, 使得 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中强收敛于 x, 则称 X 为一完备的线性赋范空间, 或称其为 Banach 空间.

定义 1.1.10 线性赋范空间 X 称为可分的, 如果存在可列集 $M\subset X$ ($M\subset X$ 表示 X 包含集合 M), 且 M 在 X 中稠密, 即对 X 中任一元素 x, 可在 M 中找到元素序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 它在 X 的范数意义下收敛于 x.

定义 1.1.11 设 $n\in\mathbb{N}$($\mathbb{N}$ 是所有正整数集合) 和 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个线性赋范空间. $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的笛卡儿乘积, X 中的元素 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, 其中 $f_i\in X_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 元素 f 的范数可以由下式之一定义:

$$\|f;X\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i;X_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\leqslant p<\infty,$$

或

$$\|f;X\| = \max_{i=1,2,\cdots,n} \|f_i;X_i\|,$$

则 X 也是线性赋范空间, 并称其为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的乘积空间.

易证以上两种范数是等价的. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是可分的线性赋范空间, 则乘积空间 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 也是可分的线性赋范空间. 如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 Banach 空间, 那么乘积空间 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 也是 Banach 空间.

1.1.4 Hilbert 空间

定义 1.1.12 如果集合 H 满足下列五类条件, 则称 H 为 Hilbert 空间.

(1) H 为线性空间, 数乘运算中的数可取复数.

(2) H 中的任意一对有序元素 x, y 有唯一的复数与之对应, 此数称为 x 和 y 的内积, 记为 (x, y), 并满足以下条件:

(i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, 其中 $\overline{a}$ 表示 a 的共轭复数, 所以 (x, x) 是实数;

(ii) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

(iii) $(ax, y) = a(x, y)$, $a \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ 为复平面);

(iv) $(x, x) \geqslant 0$, 而且 $(x, x) = 0$, 当且仅当 $x = \theta$.

实数 $\sqrt{(x, x)}$ 称为元素 x 在 H 中的范数, 记为 $\|x; H\|$. 容易证明此范数满足定义 1.1.6 中的范数公理.

(3) H 在其范数意义下是 Banach 空间.

(4) 对于任意正整数 n, 在空间 H 中可以找出 n 个线性无关的元素.

(5) H 是可分的.

引理 1.1.1(Cauchy-Schwarz 不等式) 设 H 为一 Hilbert 空间, 则有

$$|(x, y)| \leqslant \|x; H\| \|y; H\|, \quad \forall x, y \in H,$$

其中等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

1.2 线性算子与线性泛函

1.2.1 线性算子

定义 1.2.1 设 X, Y 是两个线性赋范空间, M 为 X 中的一集合. 又设给定一法则: 由每一个 $x \in M$ 在 Y 中唯一对应一个确定的元素, 记此元素为 Lx, 且称此法则在 M 上定义了一算子 L. 集合 M 称为算子 L 的定义域, 记为 $D(L)$, 集合

$$R(L) = \{y \in Y |\ y = Lx,\ \forall x \in M\}$$

称为算子 L 的值域.

定义 1.2.2 设 X,Y 是两个线性赋范空间, M 为 X 中的一集合. $L:M\mapsto Y$ 是一算子. 如果对所有的 $x,y\in M$, 当 $x\neq y$ 时, 有 $Lx\neq Ly$, 则对每一个 $\overline{y}\in R(L)$ 依据法则 $Lx=\overline{y}$ 确定唯一的元素 $x\in M$, 记为 $x=L^{-1}\overline{y}$, 并称 L^{-1} 为 L 的逆算子, 且有 $D(L^{-1})=R(L)$, $R(L^{-1})=D(L)=M$.

定义 1.2.3 设 X,Y 是两个线性赋范空间. 由 X 到 Y 的算子 L 称为线性算子, 如果 $D(L)$ 是线性集合并满足下列两条件

(1) 可加性:

$$L(ax+by)=aLx+bLy,\quad \forall x,y\in D(L),\quad \forall a,b\in\mathbb{R};$$

(2) 连续性: 由 X 到 Y 的算子 L 称为在 $x\in D(L)$ 是连续的, 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(L)$, 且在 X 中 $x_n\to x$, 就在 Y 中成立

$$Lx_n\to Lx.$$

定义 1.2.4 设 X,Y 是两个线性赋范空间, 称线性算子 $L:X\mapsto Y$ 是有界的, 如果存在常数 $K>0$, 使得 $\|Lx;Y\|\leqslant K\|x;X\|$, $\forall x\in X$.

定理 1.2.1 设 X,Y 是两个线性赋范空间. 在算子 $L:X\mapsto Y$ 满足可加性的条件下, 算子 L 是连续的, 当且仅当 L 有界.

定理 1.2.2 设 X,Y 是两个线性赋范空间, L 是定义在 X 的子空间 E 上, 而值域包含在 Y 中的满足可加性的算子, 则 L 有界的充要条件是 L 将 E 中的任一有界集映成 Y 中的有界集.

定义 1.2.5 设 X,Y 是两个线性赋范空间, 用 $\mathscr{L}(X,Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的线性算子的全体, 并规定

$$\|L\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}}\frac{\|Lx;Y\|}{\|x;X\|}=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x;X\|=1}}\|Lx;Y\|$$

为 $L\in\mathscr{L}(X,Y)$ 的范数 (所谓算子的范数).

定义 1.2.6 设 X,Y 是两个线性赋范空间. 而 L 是映 X 到 Y 中的一个算子. 算子 L 称为紧的, 如果当 M 在 X 中有界时, L 将 M 映为 Y 的准紧集. 如果 L 连续而且是紧的算子, 那么 L 是全连续的.

定义 1.2.7 两个线性赋范空间 X,Y 称为同构的, 如果存在一线性算子 L, 使得 $D(L)=X$, $R(L)=Y$ 和存在线性逆算子 L^{-1}. 这个算子 L 称为同构映射或简称 X 与 Y 之间同构.

定义 1.2.8 两个线性赋范空间 X,Y 称为等距同构, 如果存在一线性算子 L, 使得 $D(L)=X$, $R(L)=Y$ 和对每一对 $x,y\in X$, 有

$$\|x-y, X\| = \|Lx - Ly; Y\|.$$

定理 1.2.3 (Banach-Steinhaus 定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是线性赋范空间, 由 X 到 Y 具有 $D(L_n) = X$ 的线性算子序列 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足对于每一个 $x \in X$, 在 Y 中有 $L_n x \to Lx$, 当且仅当满足下列两个条件:

(1) 序列 $\{\|L_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的;

(2) 对于每一个 $x \in M$, 在 Y 中 $L_n x \to Lx$, 其中 M 是 X 的一稠密子集.

1.2.2 线性泛函

定义 1.2.9 设 X 是一线性赋范空间, 如果对于 X 中的每一元素 x, 有一实数 lx 与之对应, 则称 lx 为 X 上的泛函. 如果还满足下列条件, 则称 lx 是 X 上的线性泛函.

(1) 可加性: 设 a, b 是实数, $x, y \in X$, 便成立

$$l(ax + by) = alx + bly;$$

(2) 连续性: 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 x, 便成立

$$lx = \lim_{n\to\infty} lx_n$$

或改述为: 设 X 是一线性赋范空间, 线性算子 $l: X \mapsto \mathbb{R}$ 称为线性泛函.

线性泛函 l 在 $x \in X$ 的值有时也记为 $l(x)$ 或 $\langle l, x\rangle$. 以后也用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示对偶积.

定义 1.2.10 如果存在常数 $K > 0$, 且成立

$$|lx| \leqslant K\|x; X\|, \quad \forall x \in X,$$

则称线性泛函 lx 是有界的.

定理 1.2.4 线性赋范空间 X 上的任一线性泛函是有界的.

定理 1.2.5 设 lx 是定义在线性赋范空间 X 上且满足可加性的有界泛函, 则 lx 满足连续性.

定理 1.2.4 和定理 1.2.5 说明, 对于满足可加性的泛函, 连续性和有界性是等价的.

定义 1.2.11 用 X' 表示定义在线性赋范空间 X 上的全体线性泛函. 如果 X' 中元素的加法和数乘定义如下.

设 $l_1, l_2 \in X'$, a 是一实数, 有

$$(l_1 + l_2)x = l_1 x + l_2 x, \quad \forall x \in X,$$

$$(al_1)x = a(l_1x), \quad \forall x \in X,$$

于是 X' 是一线性空间. 用数

$$\|l; X'\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{|lx|}{\|x; X\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x; X\| = 1}} |lx|$$

定义为 l 的范数, 由定理 1.2.4 知 $\|l; X'\|$ 是一有限数. 容易证明此范数满足范数公理, 所以 X' 是一线性赋范空间.

由线性泛函的范数定义得到

$$|lx| \leqslant \|l; X'\| \|x; X\|.$$

定义 1.2.12 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性赋范空间 X 中的元素序列, 如果在 X 中存在元素 x, 使得

$$\lim_{n \to \infty} lx_n = lx, \quad \forall l \in X',$$

则称序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中弱收敛于 x, 称 x 是序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的弱极限.

定义 1.2.13 设 X 是线性赋范空间, X' 中的序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为弱 $*$ 收敛于 $l \in X'$ (有时也称 X' 中的序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于 l), 如果对于任意的 $x \in X$, 有

$$\lim_{n \to \infty} l_n x = lx,$$

称 l 为序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的弱 $*$ 极限.

定义 1.2.14 X' 中的序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为强收敛于 $l \in X'$, 如果有

$$\lim_{n \to \infty} \|l_n - l; X'\| = 0,$$

称 l 为序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的强极限.

定理 1.2.6 线性赋范空间 $X(X')$ 中的强收敛蕴涵弱收敛.

在线性赋范空间 $X(X')$ 中的弱收敛序列, 不一定强收敛.

定理 1.2.7 (Hahn-Banach 定理) 设 X 是线性赋范空间, E 是 X 的线性子空间, 对于给定在 E 上的任一线性泛函 l, 可以延拓到整个 X 上且保持范数不变, 即存在定义在 X 上的线性泛函 L 满足条件:

(1) 当 $x \in E$ 时, $L(x) = l(x)$ (延拓条件);

(2) $\|l; E'\| = \|L; X'\|$ (保范条件).

1.3　连续函数空间

1.3.1　$C^m(\overline{\Omega})$ 空间的完备性

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开集, m 是一非负整数. 设向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$, 如果它的每一个分量都是非负整数, 就称 α 是一 N 重指数 (指标), 并记 $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i$, 还称 $|\alpha|$ 为 N 重指数 α 的长度. 记 $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, 则

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_N^{\alpha_N}$$

表示 $|\alpha|$ 阶微分算子, $D^\alpha f(x)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}f(x)$. 显然 $D^{(0,\cdots,0)}f(x)=f(x)$.

定义 1.3.1　集合 $C^m(\Omega)$ 表示由定义在 Ω 上所有连续且具有 $|\alpha|(\leqslant m)$ 阶连续偏导数 $D^\alpha f(x)$ 的函数 $f(x)$ 组成.

简记 $C^0(\Omega)$ 为 $C(\Omega)$. 令 $C^\infty(\Omega)=\bigcap\limits_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)$. $C^m(\Omega)$ 中的函数本身或某些阶的偏导数可以在 Ω 上无界.

定义 1.3.2　$C_B^m(\Omega)$ 表示由 $f\in C^m(\Omega)$ 且它和它的偏导数 $D^\alpha f(x)(1\leqslant|\alpha|\leqslant m)$ 在 Ω 上有界的全体函数组成的集合.

如果在 $C_B^m(\Omega)$ 中用自然法则定义加法运算和数乘运算, 则易证 $C_B^m(\Omega)$ 是线性空间. 如果 $C_B^m(\Omega)$ 中元素的范数由等式

$$\|f;C_B^m(\Omega)\|=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha f(x)|$$

定义, 则 $C_B^m(\Omega)$ 是一线性赋范空间.

定理 1.3.1　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, 则空间 $C_B^m(\Omega)$ 是 Banach 空间.

如果 $f\in C(\Omega)$ 在 Ω 上有界且一致连续, 则能唯一地把它有界且一致连续地延拓到 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 上.

定义 1.3.3　线性空间 $C^m(\overline{\Omega})$ 是由 $C^m(\Omega)$ 中这样的函数 $f(x)$ 组成, $f(x)$ 本身及其偏导数 $D^\alpha f(x)(1\leqslant|\alpha|\leqslant m)$ 均在 Ω 上有界和一致连续. 如果 $C^m(\overline{\Omega})$ 中元素的范数由等式

$$\|f;C^m(\overline{\Omega})\|=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\max_{x\in\overline{\Omega}}|D^\alpha f(x)|$$

定义, 则易证 $C^m(\overline{\Omega})$ 是线性赋范空间.

定理 1.3.2　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界连通开区域, 则 $C(\overline{\Omega})$ 和 $C^m(\overline{\Omega})$ 均为 Banach 空间.

证明 (1) 先证 $C(\overline{\Omega})$ 是 Banach 空间. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的任一基本序列, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得当 $k,n\geqslant N_0(\varepsilon)$ 时, 有

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|f_k(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

所以对于任意的 $x\in\overline{\Omega}$,

$$|f_k(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\quad \forall k,n\geqslant N_0(\varepsilon). \tag{1.3.1}$$

固定 $x\in\overline{\Omega}$, 可知数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是基本序列, 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在. 用 $f(x)$ 表示此极限, 于是在式 (1.3.1) 中令 $k\to\infty$ 便得到

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall n\geqslant N_0(\varepsilon).$$

由此可见

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall n\geqslant N_0(\varepsilon).$$

于是 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 一致收敛到 $f(x)$, 所以 $f(x)$ 连续且在 $C(\overline{\Omega})$ 中 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 $f(x)$. 这说明 $C(\overline{\Omega})$ 是 Banach 空间.

(2) 现证 $C^m(\overline{\Omega})$ 是 Banach 空间. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C^m(\overline{\Omega})$ 中任一基本序列, 则必存在连续函数 $f_\alpha(x)$, 使得当 $n\to\infty$ 时, 对于 $|\alpha|\leqslant m$ 和 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立

$$D^\alpha f_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}f_\alpha(x),$$

其中符号 "$\xrightarrow{\text{一致}}$" 表示一致收敛. 所以只需证明 $f_\alpha(x)=D^\alpha f_\theta$, $\theta=(0,0,\cdots,0)$ 即可. 先证

$$f_{(1,0,\cdots,0)}(x)=\frac{\partial}{\partial x_1}f_{(0,0,\cdots,0)}(x). \tag{1.3.2}$$

因为当 $n\to\infty$ 时, 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立

$$f_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}f_{(0,0,\cdots,0)}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}f_{(1,0,\cdots,0)}(x)$$

以及

$$f_n(x)=\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}f_n(\xi,x_2,\cdots,x_N)\mathrm{d}\xi+f_n(x_1^0,x_2,\cdots,x_N),$$

所以上式当 $n\to\infty$ 时, 取极限有

$$f_{(0,0,\cdots,0)}(x)=\int_{x_1^0}^{x_1}f_{(1,0,\cdots,0)}(\xi,x_2,\cdots,x_N)\mathrm{d}\xi+f_{(0,0,\cdots,0)}(x_1^0,x_2,\cdots,x_N). \tag{1.3.3}$$

式 (1.3.3) 对 x_1 求导, 即得式 (1.3.2). 同理有

$$f_{\underbrace{(0,0,\cdots,1}_{j},0,\cdots,0)}(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}f_{(0,0,\cdots,0)}(x),\quad j=2,3,\cdots,N.$$

其余对 $|\alpha|$ 用数学归纳法类推. □

注意空间 $C^m(\overline{\Omega})$ 是空间 $C_B^m(\Omega)$ 的闭子空间.

定理 1.3.3 (Ascoli-Arzelá 定理)　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, U 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的子集. 如果

(1) U 是一致有界的, 即存在常数 $K>0$, 满足

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|\leqslant K,\quad \forall f\in U;$$

(2) U 是等度连续的函数族, 即对任意给定的 $\varepsilon>0$, 总能找到实数 $\delta>0$, 当 $x,y\in\Omega$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 成立

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad \forall f\in U,$$

则从 U 中可以抽出一个函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中收敛于 $f(x)$.

所以 $C(\overline{\Omega})$ 中满足 Ascoli-Arzelá 定理条件的集合 U 是列紧集.

设 Ω 和 G 都是 $\mathbb{R}^N$ 中的子集, 假如 G 的闭包 $\overline{G}\subset\Omega$, 而且 $\overline{G}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界闭集, 即说 G 是紧集, 则记为 $G\subset\subset\Omega$. 设 $f(x)$ 是定义在 $G\subset\mathbb{R}^N$ 上的函数, 集合 $\{x\in G|f(x)\neq 0\}$ 的闭包, 即 $\overline{\{x\in G|f(x)\neq 0\}}$ 定义为 $f(x)$ 的支集, 记为 $\mathrm{supp}\,f$. 设 $f\in C(\Omega)$, 且 $\mathrm{supp}\,f\subset\subset\Omega$, 这样的函数全体组成 $C_c(\Omega)$. 设 $f\in C^\infty(\Omega)$ 且 $\mathrm{supp}\,f\subset\subset\Omega$, 这样的函数全体组成 $C_c^\infty(\Omega)$. 类似可以定义 $C_c^m(\Omega)$ 和 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. 把 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中函数的定义域限制在 Ω 内, 所得函数全体组成 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\Omega)$.

1.3.2　$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 空间的完备性

下面介绍可以看成分数次可导的函数类, 即 Hölder 函数空间 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, 这类空间在偏微分方程的研究中是非常有用的.

定义 1.3.4　设 $0<\lambda\leqslant 1$. 我们定义 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是 $C^m(\overline{\Omega})$ 的子空间, 它是由 $C^m(\overline{\Omega})$ 中的一些这样的函数 $f(x)$ 组成, 对于 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $D^\alpha f(x)$ 在 Ω 中满足指数为 λ 的 Hölder 条件, 即存在常数 $K>0$, 使得

$$|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|\leqslant K|x-y|^\lambda,\quad \forall x,y\in\Omega.$$

在 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中用自然法则定义加法运算和数乘运算. 对于 $0<\lambda\leqslant 1$, 引入 Hölder 半范数 $\displaystyle\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\ \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}$ 后, $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 的元素 $f(x)$ 的范数由下

式确定

$$\|f;C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| = \|f;C^m(\overline{\Omega})\| + \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

那么 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是一线性赋范空间.

注意当 $\lambda = 1$ 时, 满足 Hölder 条件的函数 $f(x)$ 就是满足 Lipschitz 条件的函数.

定理 1.3.4 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, 则 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 和 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 均为 Banach 空间.

证明 只需对 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 给出证明就够了. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 的任一基本序列, 即当 $k,n\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|f_n - f_k;C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| =& \|f_n - f_k;C^m(\overline{\Omega})\| \\ &+ \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|D^\alpha(f_n-f_k)(x) - D^\alpha(f_n-f_k)(y)|}{|x-y|^\lambda} \to 0,\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

则 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 也是 $C^m(\overline{\Omega})$ 中的基本序列. 因为 $C^m(\overline{\Omega})$ 是 Banach 空间, 所以存在一函数 $f\in C^m(\overline{\Omega})$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f;C^m(\overline{\Omega})\| = 0.$$

由于 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中的基本序列, 则由式 (1.3.4) 知, $\forall\varepsilon>0$, 存在一个 $N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N_0(\varepsilon)$ 和 $k\geqslant N_0(\varepsilon)$ 时, 则对 $|\alpha| = m$ 有

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_n(y) - D^\alpha f_k(x) + D^\alpha f_k(y)|}{|x-y|^\lambda} < \varepsilon. \tag{1.3.5}$$

当 $k\to\infty$ 时, 对式 (1.3.5) 取极限, 得

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_n(y) - D^\alpha f(x) + D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant \varepsilon, \tag{1.3.6}$$

即

$$\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|D^\alpha(f_n-f)(x) - D^\alpha(f_n-f)(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant \varepsilon.$$

这就意味着, 对于所有的 $n\geqslant N_0(\varepsilon)$, $(f_n - f)\in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, 因此 $f(x) = f_n(x) - (f_n(x) - f(x))$ 也属于 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. 进一步由式 (1.3.6) 推出

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|D^\alpha(f_n-f)(x) - D^\alpha(f_n-f)(y)|}{|x-y|^\lambda} = 0 \quad (|\alpha| = m),$$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f; C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| = 0. \qquad \square$$

1.4 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理与 Lax-Milgram 定理

为了说明 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理, 我们先引入一些概念和记号. Hilbert 空间 H 中的两个元素 x 和 y 称为是正交的, 如果 $(x,y)=0$, 并记作 $x\perp y$. 如果 $x\perp y$, 则 $y\perp x$ 且 $x\perp x$ 的充要条件为 $x=\theta$(θ 为零元素). 设 G 是 H 的非空子集和 $x\in H$, 如果对于一切 $y\in G$ 都有 $x\perp y$, 则称 x 与 G 正交, 记作 $x\perp G$. 我们还称集合 $\{\, x\in H|\, x\perp G\,\}$ 为 G 的正交补, 记作 $G^\perp$.

定理 1.4.1 设 G 是 Hilbert H 的一闭线性子空间, 则 $G^\perp$ 也是 H 的一闭线性子空间. 任一 $x\in H$ 能唯一分解成如下形式

$$x = y + z, \quad y\in G, \quad z\in G^\perp. \tag{1.4.1}$$

式 (1.4.1) 中的元素 y 称为 x 在 G 上的正交投影, 并记作 $P_M x$. P_M 称为在 G 上的投影算子.

定理 1.4.2 (Hilbert 空间的 Riesz 表示定理) 设 H 是一 Hilbert 空间和 l 为 H 上的一线性泛函, 则存在唯一确定的元素 $y_l\in H$, 使得

$$l(x) = (x, y_l), \quad \forall x\in H$$

且

$$\sup_{\|x;H\|\leqslant 1} |l(x)| = \|y_l; H\|.$$

下面介绍的 Lax-Milgram 定理是 Riesz 表示定理的一种变形, 它是研究线性椭圆型偏微分方程解的存在性的有效工具.

设 H 是实 Hilbert 空间, H' 与 H 的对偶积记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

定义 1.4.1 设 $a(x,y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的双线性型, 即关于 x 和 y 分别都是线性的.

(1) $a(x,y)$ 称为有界的, 如果存在常数 $M>0$, 使得

$$|a(x,y)| \leqslant M\|x;H\|\|y;H\|, \quad \forall x,y\in H;$$

(2) $a(x,y)$ 称为强制的, 如果存在 $\delta>0$, 使得

$$a(x,x) \geqslant \delta\|x;H\|^2, \quad \forall x\in H.$$

定理 1.4.3 (Lax-Milgram 定理) 设 $a(x,y)$ 是 H 上的有界强制双线性型, 则对于任意 $f \in H'$, 存在唯一的 $x \in H$, 满足

$$a(x,y) = \langle f, y \rangle, \quad \forall y \in H$$

且有估计

$$\|x; H\| \leqslant \frac{1}{\delta} \|f; H'\|.$$

第 2 章　$L^p(\Omega)$ 空间及其基本性质

本章主要介绍 $L^p(\Omega)$ 空间的定义, 证明 $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间和它的一些其他性质, 为建立索伯列夫空间打基础. 当我们证明以上问题用到实变函数和第 1 章没有提到的泛函分析中的定理时, 只写出定理, 不加证明. 2.4 节的弱 $L^p(\Omega)$ 空间、Marcinkiewicz 插值定理, 2.5 节混合范数 L^p 空间以及 2.6 节 L^p 空间中的准紧集用于第 4 章, 可以待需要时再读.

2.1　$L^p(\Omega)$ 空 间

2.1.1　$L^p(\Omega)$ 空间的定义

定义 2.1.1　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的可测集合, $0<p<\infty$ 是实数. 用 $L^p(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上所有满足

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \tag{2.1.1}$$

的可测函数 $f(x)$ 构成的函数类.

在 $L^p(\Omega)$ 中把定义在 Ω 上几乎处处相等的函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 即在 Ω 中除去一个零测集外, 成立 $f_1(x)=f_2(x)$ 的函数, 称为等价的, 记为 $f_1(x)=f_2(x)$, a.e. (a.e. 表示几乎处处).

设 $f_1, f_2 \in L^p(\Omega)$ 且等价, 则成立

$$\int_\Omega |f_1(x)|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega |f_2(x)|^p \mathrm{d}x.$$

所以我们在 $L^p(\Omega)$ 中把等价的函数认为是同一个函数, 不加以区别. 因此 $L^p(\Omega)$ 中的元素实际上是满足式 (2.1.1) 的可测函数的等价类. 为了方便起见, 我们忽略了这些差别, 当 $f(x)$ 满足式 (2.1.1) 时, 就写成 $f\in L^p(\Omega)$.

定义 2.1.2　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的可测集合, 用 $L^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中除去一个零测集外是有界可测函数 $f(x)$ 的全体.

设 $f\in L^\infty(\Omega)$, 那么存在与 $f(x)$ 有关的一个常数 $K>0$, 使得不等式

$$|f(x)| \leqslant K$$

几乎处处成立, 这样的 K 显然有无穷多个, 其下确界记作 $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$, 称为 $f(x)$ 在 Ω 上的实质上界 (或本质上界).

我们在说明 $L^p(\Omega)$ 是一线性赋范空间之前, 先证明 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

2.1.2 Hölder 不等式、Minkowski 不等式和 $L^p(\Omega)$ 范数的内插不等式

设 $1<p<\infty$, 由等式 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ 确定的 p' 称为 p 的共轭指数. 显然这是一对相互共轭的指数, 且

$$p'=\frac{p}{p-1},\quad p'-1=\frac{1}{p-1}.$$

从这组等式可以看出, 当 $p\in(1,2]$ 时, $p'\in[2,\infty)$. 反之, 当 $p\in[2,\infty)$ 时, $p'\in(1,2]$. 在证明下面的不等式时, 出现的 $Q(x)$ 是定义在 Ω 上的几乎处处大于零的可测函数且有上界, 我们称它为权函数.

定理 2.1.1(带权的 Hölder 不等式) 设 $1<p<\infty$, p 和 p' 是一对共轭指数. 如果

$$\int_\Omega |F(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x<\infty,\quad \int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x<\infty, \tag{2.1.2}$$

则

$$\left|\int_\Omega F(x)G(x)Q(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left[\int_\Omega |F(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.1.3}$$

证明 当 $F(x)=0$, a.e., 或 $G(x)=0$, a.e. 时, 不等式 (2.1.3) 总是成立的. 所以不妨假定 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都不几乎处处等于零. 此时式 (2.1.2) 中的两个积分值都是正的. 作辅助函数

$$f(x)=\frac{|F(x)|}{\left[\displaystyle\int_\Omega |F(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}},\quad g(x)=\frac{|G(x)|}{\left[\displaystyle\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}}}.$$

用 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别代替 Young 不等式 $ab\leqslant\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^{p'}}{p'}$ (见附录 I) 中的 a 和 b, 两边分别乘以 $Q(x)$, 然后在 Ω 上积分, 得到

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|Q(x)\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

将 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式代入上式, 经整理, 可得

$$\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_\Omega |F(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}},$$

再对上式利用不等式

$$\left|\int_\Omega F(x)G(x)Q(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)\mathrm{d}x, \tag{2.1.4}$$

就推出不等式 (2.1.3). □

注 2.1.1 当 $p=1$ 时, 带权的 Hölder 不等式应改为

$$\left|\int_\Omega F(x)G(x)Q(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|G(x)|\int_\Omega |F(x)|Q(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2.1.1(广义带权的 Hölder 不等式)

(1) 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n>0$ 且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$. 如果有

$$\int_\Omega |F_i(x)|^{\frac{1}{p_i}}Q(x)\mathrm{d}x<\infty,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则成立不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega F_1(x)F_2(x)\cdots F_n(x)Q(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\left[\int_\Omega |F_1(x)|^{\frac{1}{p_1}}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{p_1}\times\left[\int_\Omega |F_2(x)|^{\frac{1}{p_2}}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{p_2}\times\cdots\\ &\times\left[\int_\Omega |F_n(x)|^{\frac{1}{p_n}}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{p_n}.\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

(2) 设 $r>0$, $p_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且满足 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_n}$. 如果

$$\int_\Omega |G_i(x)|^{p_i}Q(x)\mathrm{d}x<\infty,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则成立不等式

$$\left[\int_\Omega |G_1(x)G_2(x)\cdots G_n(x)|^r Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}}\leqslant\prod_{i=1}^n\left[\int_\Omega |G_i(x)|^{p_i}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p_i}}.\tag{2.1.6}$$

证明 用数学归纳法证明不等式 (2.1.5). 已知当 $n=2$ 时式 (2.1.5) 成立. 假定 $n=m-1$ 时, 式 (2.1.5) 成立. 现证 $n=m$ 时式 (2.1.5) 成立. 令 $p=\dfrac{1}{p_m}$, 则 $p'=\dfrac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}$, 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega F_1(x)F_2(x)\cdots F_m(x)Q(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant&\left[\int_\Omega |F_1(x)F_2(x)\cdots F_{m-1}(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}}\\ &\times\left[\int_\Omega |F_m(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

由于 $\dfrac{p_1}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}+\dfrac{p_2}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}+\cdots+\dfrac{p_{m-1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}=1$,

利用归纳法假定成立

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |F_1(x)F_2(x)\cdots F_{m-1}(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega |F_1(x)|^{p'}|F_2(x)|^{p'}\cdots|F_{m-1}(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\\
\leqslant&\left[\int_\Omega (|F_1(x)|^{p'})^{\frac{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}{p_1}}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_1}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}}\times\cdots\\
&\times\left[\int_\Omega (|F_{m-1}(x)|^{p'})^{\frac{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}{p_{m-1}}}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_{m-1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}}\\
=&\left[\int_\Omega |F_1(x)|^{\frac{1}{p_1}}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_1}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}}\times\cdots\\
&\times\left[\int_\Omega |F_{m-1}(x)|^{\frac{1}{p_{m-1}}}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_{m-1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}}}.
\end{aligned}$$

将上式代入式 (2.1.7), 得到当 $n=m$ 时的式 (2.1.5).

现证式 (2.1.6). 因为 $\dfrac{r}{p_1}+\dfrac{r}{p_2}+\cdots+\dfrac{r}{p_n}=1$, 所以利用 (1) 的结果得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |G_1(x)G_2(x)\cdots G_n(x)|^r Q(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega |G_1(x)|^r|G_2(x)|^r\cdots|G_n(x)|^rQ(x)\mathrm{d}x\\
\leqslant&\left[\int_\Omega |G_1(x)|^{p_1}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{r}{p_1}}\left[\int_\Omega |G_2(x)|^{p_2}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{r}{p_2}}\cdots\left[\int_\Omega |G_n(x)|^{p_n}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{r}{p_n}},
\end{aligned}$$

上式开 r 次方立得不等式 (2.1.6). □

定理 2.1.2 (带权的 Minkowski 不等式) 设 $1\leqslant p<\infty$, 则

$$\begin{aligned}
\left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant&\left[\int_\Omega |F(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\\
&+\left[\int_\Omega |G(x)|^pQ(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

证明 可以假定式 (2.1.8) 右端两个积分值都是有限的, 且左端的积分值不为零, 否则式 (2.1.8) 自然成立.

先证 $p=1$ 的情形. 因为

$$|F(x)+G(x)|\leqslant|F(x)|+|G(x)|,$$

上式两端乘以 $Q(x)$, 然后在 Ω 上积分, 得 $p=1$ 的不等式 (2.1.8).

下面证明 $1 < p < \infty$ 的情形. 利用 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |F(x)+G(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega |F(x)+G(x)|^{p-1}|F(x)|Q(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega |F(x)+G(x)|^{p-1}|G(x)|Q(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^{(p-1)p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad \times \left\{\left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |G(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\} \\ &= \left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad \times \left\{\left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |G(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.\end{aligned}$$

上式两端除以 $\left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}}$, 即得式 (2.1.8). □

利用数学归纳法可证明下面的结论.

推论 2.1.2　设 $1 \leqslant p < \infty$, 则成立

$$\begin{aligned}&\left\{\int_\Omega |F_1(x)+F_2(x)+\cdots+F_n(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left\{\int_\Omega |F_1(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left\{\int_\Omega |F_n(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

定理 2.1.3(带权的 Hölder 逆不等式)　设 $0 < p < 1$, 如果

$$\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x < \infty, \quad 0 < \int_\Omega |G(x)|^{p'} Q(x)\mathrm{d}x < \infty, \tag{2.1.10}$$

其中 $p' = \dfrac{p}{p-1} < 0$ 是 p 的共轭指数, 则

$$\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)\mathrm{d}x \geqslant \left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |G(x)|^{p'} Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.1.11}$$

证明　可以假定式 (2.1.11) 左端的积分值有限, 否则不等式 (2.1.11) 自然成立. 作辅助函数

$$g(x) = |G(x)|^{-p}, \qquad f(x) = |F(x)G(x)|^p,$$

于是

$$f(x)g(x) = |F(x)|^p.$$

如果取 $q=\dfrac{1}{p}$, 则

$$(f(x))^q=|F(x)G(x)|.$$

显然 $q>1$. 如果用 q' 表示 q 的共轭指数, 则 $p'=-pq'$, 从而

$$\int_\Omega (f(x))^q Q(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

$$\int_\Omega (g(x))^{q'} Q(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega |G(x)|^{-pq'}Q(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

因为共轭指数 $q,\ q'$ 以及对应的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都满足定理 2.1.1 的假设条件, 所以得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x&=\int_\Omega f(x)g(x)Q(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\left[\int_\Omega (f(x))^q Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega (g(x))^{q'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q'}}\\&=\left[\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q'}}.\end{aligned}$$

上式两边除以 $\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q'}}$, 得

$$\left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{-\frac{1}{q'}}\leqslant\left[\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}},$$

然后开 $p=\dfrac{1}{q}$ 次方, 有

$$\left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{-\frac{1}{q'p}}\leqslant\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)\mathrm{d}x,$$

即为不等式 (2.1.11). □

定理 2.1.4(带权的 Minkowski 逆不等式) 设 $0<p<1$, 则

$$\left[\int_\Omega (|F(x)|+|G(x)|)^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_\Omega |G(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1.12}$$

证明 我们不妨假定 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都不恒等于零. 利用 Hölder 逆不等式, 得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (|F(x)|+|G(x)|)^p Q(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_\Omega (|F(x)|+|G(x)|)^{p-1}|F(x)|Q(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega (|F(x)|+|G(x)|)^{p-1}|G(x)|Q(x)\mathrm{d}x \\
\geqslant&\left[\int_\Omega (|F(x)|+|G(x)|)^{(p-1)p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}}\left\{\left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\left.+\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.
\end{aligned}$$

上式两端除以 $\left[\int_\Omega (|F(x)|+|G(x)|)^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}}$, 立得不等式 (2.1.12). □

用数学归纳法易证下面的推论 2.1.3.

推论 2.1.3 设 $0<p<1$, 则

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega (|F_1(x)|+|F_2(x)|+\cdots+|F_n(x)|)^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\
\geqslant&\left[\int_\Omega |F_1(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_\Omega |F_2(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}+\cdots \\
&+\left[\int_\Omega |F_n(x)|^p Q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

如果取 $Q(x)=1$, 定理 2.1.1~ 定理 2.1.4 以及推论 2.1.1~ 推论 2.1.3 仍成立. 以后这些定理和推论经常要用到.

注 2.1.2 类似于定义函数类 $L^p(\Omega)$, 可以定义函数类 $L^p(\mathbb{R}^N)$, 所以上面证明的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式对 $\Omega=\mathbb{R}^N$ 也成立.

下面说明 $L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 是一线性赋范空间.

先讨论 $1\leqslant p<\infty$ 的情况.

(1) $L^p(\Omega)$ 是线性空间

设 $f_1=f_1(x)$ 和 $f_2=f_2(x)$ 都属于 $L^p(\Omega)$, 设 a 为一实数, 加法和数乘运算定义如下:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

$$(af_1)(x)=af_1(x).$$

验证 $L^p(\Omega)$ 是一线性空间, 只要说明 $f,g\in L^p(\Omega)$, 则 $f+g\in L^p(\Omega)$ 即可. 因为线性空间的其他条件的正确性容易验证.

事实上, 应用 $Q(x)=1$ 的定理 2.1.2 可知, 由 $f,g\in L^p(\Omega)$ 可得 $f+g\in L^p(\Omega)$.

(2) $L^p(\Omega)$ 是一赋范空间

$L^p(\Omega)$ 中的函数 $f(x)$ 的范数定义为

$$\|f;L^p(\Omega)\| = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1.14}$$

现在验证它满足范数公理. 设 $f \in L^p(\Omega)$, 有

$$\|f;L^p(\Omega)\| = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant 0.$$

由 Lebesgue 积分理论知, 上式等号成立的充要条件为 $f(x) = 0$, a.e.. 所以由式 (2.1.14) 定义的范数满足范数正定性公理. 由 Minkowski 不等式 (这里指 $Q(x) = 1$ 的 Minkowski 不等式. 以后若用到 $Q(x) \neq 1$ 的 Hölder 不等式或 Minkowski 不等式时将特别指出) 知式 (2.1.14) 满足范数三角不等式公理. 范数齐次性公理显然满足.

现在讨论 $L^\infty(\Omega)$ 的情形.

$L^\infty(\Omega)$ 中的函数加法和数乘运算同 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 中定义的函数加法和数乘运算一样, 易知 $L^\infty(\Omega)$ 为一线性空间.

定义 $L^\infty(\Omega)$ 中的函数的范数为

$$\|f;L^\infty(\Omega)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

类似于 $1 \leqslant p < \infty$ 的讨论, 容易验证 $L^\infty(\Omega)$ 是赋范空间. 所以 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是线性赋范空间.

为了书写方便, 我们也将 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 的范数记为 $\|\cdot;L^p(\Omega)\| = \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{p,\Omega}$.

定理 2.1.5 ($L^p(\Omega)$ 空间范数的内插不等式) 设 $1 \leqslant s < r < t \leqslant \infty$ 和对于满足 $0 < \theta < 1$ 的 θ 有

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}. \tag{2.1.15}$$

如果 $f \in L^s(\Omega)\bigcap L^t(\Omega)$, 则 $f \in L^r(\Omega)$ 和

$$\|f;L^r(\Omega)\| \leqslant \|f;L^s(\Omega)\|^\theta \|f;L^t(\Omega)\|^{1-\theta}. \tag{2.1.16}$$

证明 由假定可知

$$\frac{\theta r}{s} + \frac{(1-\theta)r}{t} = 1 \quad 和 \quad \frac{s}{\theta r} \geqslant 1,$$

于是应用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^r \mathrm{d}x &= \int_\Omega |f(x)|^{\theta r}|f(x)|^{(1-\theta)r}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^{\theta r \frac{s}{\theta r}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\theta r}{s}} \left(\int_\Omega |f(x)|^{(1-\theta)r\frac{t}{(1-\theta)r}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}} \\ &= \|f; L^s(\Omega)\|^{\theta r}\|f; L^t(\Omega)\|^{(1-\theta)r}.\end{aligned}$$

上式开 r 次方, 即得式 (2.1.16). 类似可证 $t=\infty$ 的情况. □

2.1.3　$L^p(\Omega)$ 空间的完备性

为了证明 $L^p(\Omega)$ 空间的完备性, 我们先证明以下引理.

引理 2.1.1　设 X 是一线性赋范空间, 则 X 是 Banach 空间的充要条件是: 对任一满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|a_n; X\| < \infty$ 的序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 存在一个 $a \in X$, 使得当 $N_0 \to \infty$ 时, 有

$$\left\|a - \sum_{n=1}^{N_0} a_n; X\right\| \to 0.$$

证明　必要性. 设 X 是一 Banach 空间且 X 中的序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|a_n; X\| < \infty$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, 对一切自然数 p, 有 $\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}\|a_i; X\| < \varepsilon$. 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, 当 $n > k \geqslant N_0$ 时, 有

$$\|S_n - S_k; X\| = \left\|\sum_{i=k+1}^{n} a_i; X\right\| \leqslant \sum_{i=k+1}^{n}\|a_i; X\| < \varepsilon,$$

所以 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的基本序列. 由于 X 是 Banach 空间, 故存在一个 $a \in X$, 使得在 X 中当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\left\|a - \sum_{i=1}^{n} a_i; X\right\| \to 0.$$

充分性. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的任一基本序列, 先取 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得对 $k, n \geqslant n_j$ 时, 有

$$\|a_n - a_k; X\| < \frac{1}{2^j}.$$

记 $x_1 = a_{n_1}$, $x_j = a_{n_j} - a_{n_{j-1}} (j > 1)$, 则 $\sum_{j=1}^{k} x_j = a_{n_k}$ 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j; X\| = \|x_1; X\| + \sum_{j=2}^{\infty} \|x_j; X\| \leqslant \|x_1; X\| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \|x_1; X\| + 1 < \infty.$$

根据假定条件存在 $a \in X$, 使得当 $k \to \infty$ 时,

$$\left\| a - \sum_{j=1}^{k} x_j; X \right\| = \|a - a_{n_k}; X\| \to 0.$$

又因为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的基本序列, 则从下式

$$\|a_n - a; X\| \leqslant \|a_n - a_{n_k}; X\| + \|a_{n_k} - a; X\|$$

可知 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 a. 所以 X 是 Banach 空间. □

定理 2.1.6(Lebesgue 控制收敛定理) 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 Ω 上依测度收敛于 $F(x)$ 的可测函数序列. 如果 L 可积函数 $\phi(x)$ 满足条件

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in \Omega, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \mathrm{d}x = \int_{\Omega} F(x) \mathrm{d}x.$$

定理 2.1.7 $L^p(\Omega) (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是 Banach 空间.

证明 现在证 $p = \infty$ 的情形. 设 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(\Omega)$ 是任一给定序列且满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k; L^{\infty}(\Omega)\| < \infty$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$, a.e.. 所以 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 几乎处处收敛, 并记它的和为 $f(x)$. 从而

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|, \quad \text{a.e.}.$$

由此推出

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k; L^{\infty}(\Omega)\| < \infty.$$

所以 $f \in L^{\infty}(\Omega)$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, 有

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{a.e.},$$

即

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k;\ L^\infty(\Omega) \right\| < \varepsilon.$$

根据引理 2.1.1 知 $L^\infty(\Omega)$ 是 Banach 空间.

下证 $1 \leqslant p < \infty$ 的情况. 设 $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ 是任一给定序列且满足 $\sum\limits_{k=1}^\infty \|f_k; L^p(\Omega)\| = b < \infty$. 令 $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^n |f_k(x)|$ 和 $g(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty |f_k(x)|$, 那么对所有的 n 应用 Minkowski 不等式得

$$\|g_n; L^p(\Omega)\| \leqslant \sum_{k=1}^n \|f_k; L^p(\Omega)\| \leqslant b.$$

由单调收敛定理可知

$$\int_\Omega g^p(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n^p(x)\mathrm{d}x \leqslant b^p.$$

因此 $g \in L^p(\Omega)$ 且 $g(x) < \infty$, a.e.. 于是级数 $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k(x)$ 几乎处处收敛, 记它的和为 $f(x)$, 则有 $|f(x)| \leqslant g(x)$, 从而 $f \in L^p(\Omega)$. 又由于

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p \leqslant (2g(x))^p \in L^1(\Omega),$$

所以利用 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n f_k; L^p(\Omega) \right\|^p = \int_\Omega \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p \mathrm{d}x \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此级数 $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k(x)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$. 根据引理 2.1.1 知 $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间. □

2.1.4　$L^p(\Omega)$ 空间的一致凸性

平行四边形定律在内积空间中保证了空间中对应范数的一致凸性. 下面介绍 Clarkson 不等式, 这些不等式是平行四边形定律的推广, 用来证明 $L^p(\Omega)(1 < p < \infty)$ 空间的一致凸性, 也是研究 $L^p(\Omega)$ 空间其他性质的重要工具. 下面通过一系列引理来完成 Clarkson 不等式的证明.

引理 2.1.2　设 $f(x) = (1+x)^\lambda + (1-x)^\lambda - 2^\lambda$, 则

(1) 当 $\lambda \geqslant 1$ 时, 成立

$$f(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in [0,1]; \tag{2.1.17}$$

(2) 当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时, 成立

$$f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{2.1.18}$$

证明 我们只证明式 (2.1.18), 同理可证式 (2.1.17). 当 $\lambda = 0$ 或 1 时, 不等式 (2.1.18) 显然成立. 所以只需对 $0 < \lambda < 1$ 证明式 (2.1.18) 即可. 对 $f(x)$ 求导, 得

$$f'(x) = \lambda(1+x)^{\lambda-1} - \lambda(1-x)^{\lambda-1} = \lambda\left[\frac{1}{(1+x)^{1-\lambda}} - \frac{1}{(1-x)^{1-\lambda}}\right] < 0, \quad \forall x \in (0,1).$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调下降函数. 因为 $f(0) = 2 - 2^\lambda > 0$ 和 $f(1) = 0$, 所以当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, 不等式 (2.1.18) 成立. □

引理 2.1.3 设 $0 < x \leqslant 1$, 则

(1) 当 $1 < p \leqslant 2$ 时, 成立

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \geqslant \frac{1}{2}(1+x^p); \tag{2.1.19}$$

(2) 当 $p \geqslant 2$ 时, 成立

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1+x^p). \tag{2.1.20}$$

证明 只证明式 (2.1.19), 同理可证式 (2.1.20). 作辅助函数 $f(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p - \frac{1}{2}(1+x^p)$ 和

$$F(x) = \frac{2^p}{x^p}f(x) = \left(\frac{1}{x}+1\right)^p + \left(\frac{1}{x}-1\right)^p - 2^{p-1}\left(\frac{1}{x^p}+1\right).$$

显然, 有

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{p}{x^2}\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{x}-1\right)^{p-1}\right] + \frac{p2^{p-1}}{x^{p+1}} \\
&= -\frac{p}{x^{p+1}}[(1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}].
\end{aligned}$$

由引理 2.1.2(2) 知, 在区间 $(0,1)$ 上 $F'(x) \leqslant 0$. 故 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调下降函数. 因为 $F(1) = 0$, 所以当 $0 < x \leqslant 1$ 时, $F(x) \geqslant 0$, 于是 $f(x) \geqslant 0$. 式 (2.1.19) 得证. □

引理 2.1.4　设 $0<\lambda<1$, $f(x)=\dfrac{1-\lambda^x}{x}$, 那么 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上是单调下降函数.

证明　只要证明在 $(0,\infty)$ 上 $f'(x)\leqslant 0$ 就可以了. 为此作辅助函数

$$g(y)=y-y\ln y-1.$$

在区间 $(0,1]$ 上, $g'(y)=-\ln y\geqslant 0$, 所以 $g(y)$ 在 $(0,1)$ 上是不减函数, 而 $g(1)=0$, 故在 $(0,1]$ 上有

$$g(y)\leqslant 0. \tag{2.1.21}$$

因为 $0<\lambda<1$, 所以 $0<\lambda^x<1$, $\forall x\in(0,\infty)$. 利用式 (2.1.21), 可知在区间 $(0,\infty)$ 上

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\lambda^x-\lambda^x\ln\lambda^x-1)=\frac{1}{x^2}g(\lambda^x)\leqslant 0.$$

从而可知 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上是单调下降函数. □

引理 2.1.5　设 $1<p\leqslant 2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, p 和 p' 是一对共轭指数, 那么有

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{p'}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^p\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.1.22}$$

证明　当 $p=2$ 或 $x=0$ 或 $x=1$ 时, 不等式 (2.1.22) 成立. 所以只需证明 $1<p<2$ 和 $0<x<1$ 的情形.

作可逆变换 $x=\dfrac{1-y}{1+y}\left(y=\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, 它把区间 $(0,1)$ 一一映射到 $(0,1)$ 上. 同时此变换把式 (2.1.22) 变换成另一等价不等式

$$\frac{1}{2}[(1+y)^p+(1-y)^p]-(1+y^{p'})^{p-1}\geqslant 0. \tag{2.1.23}$$

如果我们记

$$\binom{p}{0}=1 \quad 和 \quad \binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!},\quad k\geqslant 1.$$

由于 $0<y<1$, 不等式 (2.1.23) 中的每一项都可以按幂级数展开, 于是式 (2.1.23) 左端的幂级数展开为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}y^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-y)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}y^{p'k}\\=&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{2k}y^{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}y^{p'k}\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{p}{2k}y^{2k}-\binom{p-1}{2k-1}y^{p'(2k-1)}-\binom{p-1}{2k}y^{2p'k}\right]. \tag{2.1.24}$$

如果能证明式 (2.1.24) 右端级数中每一项是正的, 也就证明了式 (2.1.23). 事实上,

$$\begin{aligned}
&\binom{p}{2k}y^{2k}-\binom{p-1}{2k-1}y^{p'(2k-1)}-\binom{p-1}{2k}y^{2p'k}\\
=&\frac{p(p-1)\cdots(p-2k+1)}{(2k)!}y^{2k}-\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-2k+1)}{(2k-1)!}y^{p'(2k-1)}\\
&-\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-2k)}{(2k)!}y^{2kp'}\\
=&\frac{(p-2)\cdots(p-2k)}{(2k-1)!}y^{2k}\left(\frac{p(p-1)}{2k(p-2k)}-\frac{p-1}{p-2k}y^{p'(2k-1)-2k}-\frac{p-1}{2k}y^{2k(p'-1)}\right)\\
=&\frac{(p-2)\cdots(p-2k)}{(2k-1)!}y^{2k}\left(\frac{1-y^{2k(p'-1)}}{\dfrac{2k}{p-1}}-\frac{1-y^{2k(p'-1)-p'}}{\dfrac{2k-p}{p-1}}\right)\\
=&\frac{(p-2)\cdots(p-2k)}{(2k-1)!}y^{2k}\left(\frac{1-y^{\frac{2k}{p-1}}}{\dfrac{2k}{p-1}}-\frac{1-y^{\frac{2k-p}{p-1}}}{\dfrac{2k-p}{p-1}}\right).
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

由于 $1<p<2$, 式 (2.1.25) 右端的第一因子的分子个数为奇数 $2k-1$ 个, 所以第一个因子是负数. 当 $k\geqslant 1$ 时,

$$0<\frac{2k-p}{p-1}<\frac{2k}{p-1},$$

因此根据引理 2.1.4, 式 (2.1.25) 右端花括号内的数是负的. 这样, 式 (2.1.24) 右端级数中每一项都是正的. □

引理 2.1.6 设 $u,v\in\mathbb{C}$, p 和 p' 是一对共轭指数.

(1) 如果 $1<p\leqslant 2$, 那么有

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}|u|^p+\frac{1}{2}|v|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.1.26}$$

(2) 如果 $2\leqslant p<\infty$, 那么有

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p}+\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p}\leqslant\frac{1}{2}|u|^p+\frac{1}{2}|v|^p. \tag{2.1.27}$$

证明 当 $u=0$ 或 $v=0$ 时, 式 (2.1.26) 显然成立. 由于式 (2.1.26) 对于 u 和 v 是对称的, 所以可以假定 $|u|\geqslant|v|>0$. 如果 $\dfrac{v}{u}=re^{i\alpha}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant 1$ 和

$0 \leqslant \alpha < 2\pi$, 则式 (2.1.26) 可以重写为

$$\left|\frac{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^p\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.1.28}$$

如果 $\alpha = 0$, 则式 (2.1.28) 是引理 2.1.5 早已证明了的式 (2.1.22). 我们证明, 对于固定的 r, $0 < r \leqslant 1$, 函数

$$f(\alpha) = |1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|^{p'} + |1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|^{p'} \tag{2.1.29}$$

对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ 在 $\alpha = 0$ 处有一最大值, 来完成对式 (2.1.28) 的证明.

因为式 (2.1.29) 可以改写为

$$f(\alpha) = (1+r^2+2r\cos\alpha)^{\frac{p'}{2}} + (1+r^2-2r\cos\alpha)^{\frac{p'}{2}},$$

显然成立 $f(2\pi-\alpha) = f(\pi-\alpha) = f(\alpha)$, 所以只需在区间 $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 考虑 f 就行了. 由于 $p' \geqslant 2$, 在此区间

$$f'(\alpha) = -p'r\sin\alpha[(1+r^2+2r\cos\alpha)^{\frac{p'}{2}-1} - (1+r^2-2r\cos\alpha)^{\frac{p'}{2}-1}] \leqslant 0.$$

所以 f 的最大值在 $\alpha = 0$ 处达到, 这就证明了式 (2.1.26).

如果 $2 \leqslant p < \infty$, 于是 $1 < p' \leqslant 2$, 在式 (2.1.26) 中交换 p 和 p' 并利用 C_p 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p} &\leqslant \left(\frac{1}{2}|u|^{p'}+\frac{1}{2}|v|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}|u|^{p'}+\frac{1}{2}|v|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leqslant 2^{\frac{p}{p'}-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p'}}|u|^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p'}}|v|^p\right] \\
&= \frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p.
\end{aligned}$$

因此式 (2.1.27) 得证. □

定理 2.1.8 (Clarkson 不等式)　设 $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ 和 p' 是 p 的共轭指数.

(1) 若 $2 \leqslant p < \infty$, 那么有

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p; \tag{2.1.30}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}\geqslant\left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{p'-1}. \tag{2.1.31}$$

(2) 若 $1<p\leqslant 2$, 那么有

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{p'-1}; \tag{2.1.32}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p}+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p}\geqslant\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p. \tag{2.1.33}$$

证明 对于 $2\leqslant p<\infty$, 在式 (2.1.27) 中令 $u=f(x)$ 和 $v=g(x)$ 并在 Ω 上积分可得式 (2.1.30). 对于 $1<p\leqslant 2$, 为了证明不等式 (2.1.32), 易知对于任意 $f\in L^p(\Omega)$, 有

$$\||f|^{p'}\|_{p-1}=\|f\|_p^{p'}.$$

利用相应于指数 $p-1<1$ 的逆 Minkowski 不等式和在式 (2.1.26) 中令 $u=f(x)$, $v=g(x)$, 推出

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}&=\left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}+\left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}\\&\leqslant\left[\int_\Omega\left(\left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p-1}}\\&\leqslant\left[\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|f(x)|^p+\frac{1}{2}|g(x)|^p\right)\mathrm{d}x\right]^{p'-1}\\&=\left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{p'-1},\end{aligned}$$

式 (2.1.32) 得证. □

对于 $2\leqslant p<\infty$ 能用与证明式 (2.1.32) 同样的方法来证明式 (2.1.31). 不过要用相应于 $p-1\geqslant 1$ 的 Minkowski 不等式来代替逆 Minkowski 不等式, 用不等式

$$\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\geqslant\frac{1}{2}|\xi|^p+\frac{1}{2}|\eta|^p$$

来代替式 (2.1.26). 下面证明上式成立. 事实上, 在式 (2.1.26) 中用 p' 代替 p, $\xi+\eta$

代替 u, $\xi-\eta$ 代替 v 得到

$$|\xi|^p+|\eta|^p\leqslant\left(\frac{1}{2}|\xi+\eta|^{p'}+\frac{1}{2}|\xi-\eta|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}|\xi+\eta|^{p'}+\frac{1}{2}|\xi-\eta|^{p'}\right)^{p-1}$$
$$=2\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1},$$

从而得证.

最后证明式 (2.1.33). 在式 (2.1.27) 中用 $p'(2\leqslant p'<\infty)$ 代替 p, 然后以 $\dfrac{p}{p-1}(1<p\leqslant 2)$ 代替 p', 得

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\frac{u-v}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\leqslant\frac{1}{2}|u|^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{2}|v|^{\frac{p}{p-1}}.$$

上式以 z 代替 $u+v$, w 代替 $u-v$, 然后所得不等式两端取 $p-1$ 次幂, 有

$$\left(\left|\frac{z}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\frac{w}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\left|\frac{z+w}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{2}\left|\frac{z-w}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

上式利用 C_p 不等式后, z 用 $f(x)$ 代替, w 用 $g(x)$ 代替, 并在 Ω 上积分, 得到

$$\int_\Omega\left(\left|\frac{f(x)}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\frac{g(x)}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\right).$$

若 $|f(x)|\geqslant|g(x)|$, 则由上式可知

$$2^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^p\|g\|_p^p\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\right).$$

同理, 若 $|g(x)|\geqslant|f(x)|$, 可知

$$2^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^p\|f\|_p^p\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\right).$$

以上两式相加, 经整理得式 (2.1.33). □

注意, 当 $p=2$ 时四个 Clarkson 不等式全部变为平行四边形定律 (公式):

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2\|f\|_2^2+2\|g\|_2^2.$$

下面讨论 $L^p(\Omega)$ 空间的一致凸性. 先给出一个直观的描述, 然后给出赋范空间为一致凸性的定义.

以 $B = \{f | \|f; L^p(\Omega)\| \leqslant 1\}$ 表示 $L^p(\Omega)$ 中的一个闭单位球. 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是单位球面上的两点, 即 $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1$. $\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$ 可以解释为经过 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 两点的弦的中点. 由式 (2.1.30) 和式 (2.1.32) 得

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p^p \leqslant 1 - \left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|_p^p, \quad 2 \leqslant p < \infty;$$

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant 1 - \left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|_p^{p'}, \quad 1 < p \leqslant 2.$$

从以上两个不等式可以看出, 只要连接两点 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的弦的长度

$$\rho(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2; L^p(\Omega)\|$$

超过 $\varepsilon(\varepsilon \in (0,2))$ 时, 此弦中点的范数, 即弦中点到原点 (相应于零函数类) 的距离, 就严格小于某一正数 $\delta(\varepsilon) < 1$, 即说弦的中点落在单位球内适当深处, 具有这样性质的空间是一致凸的.

定义 2.1.3 赋范空间 X 称为一致凸的, 若对任一 $\varepsilon \in (0,2)$, 存在一个 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $\|f_1; X\| = \|f_2; X\| = 1$ 和 $\|f_1 - f_2; X\| \geqslant \varepsilon$ 时, 有

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}; X\right\| \leqslant 1 - \delta(\varepsilon).$$

从 Clarkson 不等式和赋范空间 X 的一致凸性的定义推出下面的结论.

定理 2.1.9 若 $1 < p < \infty$, 则 $L^p(\Omega)$ 是一致凸的.

证明 对于任一 $\varepsilon \in (0,2)$, 当 $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1$ 和 $\|f_1 - f_2\|_p \geqslant \varepsilon$ 时, 显然有

$$\left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|_p^p \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \quad \left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|_p^{p'} \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}. \tag{2.1.34}$$

由 Clarkson 不等式 (2.1.30), 不等式 (2.1.32) 和不等式 (2.1.34) 得

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p \leqslant \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = 1 - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] = 1 - \delta(\varepsilon), \quad 2 \leqslant p < \infty, \tag{2.1.35}$$

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p \leqslant \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} = 1 - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right] = 1 - \delta_1(\varepsilon), \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{2.1.36}$$

所以 $L^p(\Omega)(1 < p < \infty)$ 是一致凸空间. □

2.1.5　$L^p(\Omega)$ 空间的一个嵌入定理

定义 2.1.4　设 X_1 和 X_2 为两个线性赋范空间, 称 X_1 嵌入 X_2, 如果成立

(1) X_1 是 X_2 的线性子空间;

(2) 存在恒等算子 I, 它把 X_1 中的元素映为 X_2 中的元素, 即对于所有的 $x \in X_1$, $Ix = x$ (此等式两端的元素 x 分别看成属于不同的线性赋范空间 X_1 和 X_2), 并成立嵌入不等式

$$\|Ix; X_2\| \leqslant K\|x; X_1\|,$$

其中 $K > 0$ 称为嵌入常数.

如果 X_1 嵌入 X_2, 我们记为 $X_1 \hookrightarrow X_2$. 容易证明下面的结论.

引理 2.1.7　设 X_1, X_2 和 X_3 是三个线性赋范空间, 且 $X_1 \hookrightarrow X_2$ 和 $X_2 \hookrightarrow X_3$, 则 $X_1 \hookrightarrow X_3$.

定理 2.1.10　设 $\mu(\Omega) = \int_\Omega 1\mathrm{d}x < \infty$ ($\mu(\Omega)$ 表示 Ω 的 Lebesgue 测度) 和 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

(1) 若 $f \in L^q(\Omega)$, 则 $f \in L^p(\Omega)$ 且有

$$\|f\|_p \leqslant (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q, \tag{2.1.37}$$

因此

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega); \tag{2.1.38}$$

(2) 若 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty; \tag{2.1.39}$$

(3) 若对于 $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ 且存在一个常数 K, 使得满足

$$\|f\|_p \leqslant K, \quad \forall p \in [1, \infty), \tag{2.1.40}$$

则 $f \in L^\infty(\Omega)$ 和

$$\|f\|_\infty \leqslant K. \tag{2.1.41}$$

证明　(1) 如果 $p = q$, 式 (2.1.37) 和式 (2.1.38) 显然成立. 如果 $1 \leqslant p < q < \infty$ 和 $f \in L^q(\Omega)$, Hölder 不等式给出

$$\begin{aligned}\|f; L^p(\Omega)\|^p &= \int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_\Omega (|f(x)|^p)^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p}{q}}\left[\int_\Omega 1\mathrm{d}x\right]^{1-\frac{p}{q}}\\ &= \|f; L^q(\Omega)\|^p(\mu(\Omega))^{1-\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

由此即得不等式 (2.1.37) 和嵌入关系式 (2.1.38).

如果 $q=\infty$, 于是

$$\|f\|_p=\left[\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant \|f\|_\infty(\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}.$$

(2) 如果 $f\in L^\infty(\Omega)$, 令不等式 (2.1.37) 中的 q 趋于 ∞ 后, 再让 p 趋于 ∞, 推得

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\|f\|_p\leqslant\|f\|_\infty. \tag{2.1.42}$$

此外, 根据 $L^\infty(\Omega)$ 空间中函数的定义可知, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一集合 $A\subset\Omega$ 且 $\mu(A)>0$, 成立

$$|f(x)|\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon,\quad \forall x\in A. \tag{2.1.43}$$

于是有

$$\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\geqslant\int_A |f(x)|^p\mathrm{d}x\geqslant(\|f\|_\infty-\varepsilon)^p\mu(A).$$

上式两端开 p 次方, 可得

$$\|f\|_p\geqslant(\|f\|_\infty-\varepsilon)(\mu(A))^{\frac{1}{p}}.$$

从而

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\|f\|_p\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\|f\|_p\geqslant\|f\|_\infty. \tag{2.1.44}$$

合并式 (2.1.42) 和式 (2.1.44), 即得式 (2.1.39).

(3) 反证法. 设对于 $1\leqslant p<\infty$, 式 (2.1.40) 成立. 如果 $f\overline{\in}L^\infty(\Omega)$ (这表示 f 不属于 $L^\infty(\Omega)$ 或 $L^\infty(\Omega)$ 不包含 f) 或不等式 (2.1.41) 不成立, 无论哪种情况, 总能找到一常数 $K_1>K$ 和一 $\mu(A)>0$ 的集合 $A\subset\Omega$, 使得

$$|f(x)|>K_1,\quad \forall x\in A. \tag{2.1.45}$$

于是

$$\left[\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\left[\int_A |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant K_1(\mu(A))^{\frac{1}{p}}.$$

由上式推出

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\|f\|_p\geqslant K_1>K. \tag{2.1.46}$$

显然式 (2.1.46) 与式 (2.1.40) 矛盾. 所以式 (2.1.41) 成立. □

注 2.1.3 从定理 2.1.10 可知, 当 $\mu(\Omega)$ 为一有限数, 且 $q \geqslant p$ 时, 就有 $L^q(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega)$ 的子集, 即 $L^q(\Omega)$ 中的元素也是 $L^p(\Omega)$ 中的元素. 并且同属于两个不同空间的函数 $f(x)$ 在不同空间的范数下成立不等式 (2.1.37). 这是一个明显的 $L^q(\Omega)$ 嵌入 $L^p(\Omega)$ 的例子.

2.1.6 $C_c(\Omega)$ 空间在 $L^p(\Omega)$ 空间中的稠密性

为了证明 $C_c(\Omega)$ 空间在 $L^p(\Omega)$ 空间中的稠密性, 需要引入简单函数概念和 Lusin 定理.

定义 2.1.5 设集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. 由

$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in \Omega \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \overline{\in} \Omega \text{ 时} \end{cases}$$

定义的函数 χ_Ω 称为 Ω 的特征函数.

定义 2.1.6 设 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中任意有限个不自交的可测集和 a_1, $a_2, \cdots, a_n$ 是有限个实数. 定义在 $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$ 上的函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\Omega_k}$$

称为简单函数.

定理 2.1.11 设 $f(x)$ 是定义在 Ω 上的非负可测函数, 则存在一个非负单调增加的简单函数序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 点收敛于 $f(x)$.

证明 对于每一个自然数 n 和每一点 $x \in \Omega$, 令

$$S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n}, & \text{当 } \dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{2^n}, i = 1, 2, \cdots, n2^n \text{ 时}, \\ n, & \text{当 } f(x) \geqslant n \text{ 时}. \end{cases}$$

容易看出, 每一个函数 $S_n(x)$ 是简单函数, 且为非负单调增加的函数. 如果 $f(x) < \infty$, 则当 $f(x) < n$ 时,

$$0 \leqslant f(x) - S_n(x) < \frac{1}{2^n}.$$

如果 $f(x) = \infty$, 则对每个 n, $S_n(x) = n$. 因此无论是哪种情况, 都有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

□

定理 2.1.12 (Lusin 定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开集, $f(x)$ 是定义在 Ω 上的可测函数, 如果对于 $x \in \Omega^c$ (Ω^c 表示开集 Ω 在 $\mathbb{R}^N$ 中的余集, 即 $\Omega^c = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$) $f(x) =$

0, 其中 $\mu(\Omega) < \infty$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个函数 $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} g(x) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} f(x) \text{ 和 } \mu(\{x \in \mathbb{R}^N | f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

定理 2.1.13 设 $1 \leqslant p < \infty$, 则 $C_c(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

证明 设对于任意的 $f \in L^p(\Omega)$, 引入函数 $f_1(x) = \max(0, f(x))$ 和 $f_2(x) = \max(0, -f(x))$, 于是 $f_1, f_2 \in L^p(\Omega)$ 且 $f_1(x), f_2(x) \geqslant 0$ 和 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

如果已经在 $C_c(\Omega)$ 中找到两个函数序列 $\{g_{1n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{g_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中分别收敛于 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 则利用 Minkowski 不等式得到

$$\|f - (g_{1n} - g_{2n})\|_p \leqslant \|f_1 - g_{1n}\|_p + \|f_2 - g_{2n}\|_p.$$

从而可知, 属于 $C_c(\Omega)$ 中的序列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{g_{1n}(x) - g_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$. 所以只要对 $L^p(\Omega)$ 中的非负函数来证明定理的结论就可以了.

设 $f \in L^p(\Omega)$ 是非负函数, 由定理 2.1.11 可知, 存在非负单调增加的简单函数序列

$$0 \leqslant S_1(x) \leqslant S_2(x) \leqslant \cdots \leqslant S_n(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

满足

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

显然 $S_n(x) \in L^p(\Omega)$, 并成立

$$0 \leqslant (f(x) - S_n(x))^p \leqslant (f(x))^p.$$

由定理 2.1.6 (Lebesgue 控制收敛定理) 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f(x) - S_n(x))^p \mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} (f(x) - S_n(x))^p \mathrm{d}x = 0.$$

因此对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在简单函数 $S(x) \in \{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\|f - S\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.47}$$

因为 $S(x)$ 是简单函数, 而且 $1 \leqslant p < \infty$, 所以 $S(x)$ 的支集一定有有限测度. 我们还可以假定对所有的 $x \in \Omega^c$, $S(x) = 0$. 应用定理 2.1.12 知, 存在 $g(x) \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$\sup_{x\in\Omega} |g(x)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |S(x)|.$$

于是

$$|g(x)| \leqslant \|S\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

并且

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N | S(x) \neq g(x)\}) \leqslant \left[\frac{\varepsilon}{4\|S\|_\infty}\right]^p.$$

从而

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega |g(x)-S(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} &\leqslant \max_{x\in\Omega}|g(x)-S(x)|[\mu(\{x\in\mathbb{R}^N|S(x)\neq g(x)\})]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant 2\|S\|_\infty\left(\frac{\varepsilon}{4\|S\|_\infty}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.1.48)\end{aligned}$$

利用式 (2.1.47) 和式 (2.1.48) 得

$$\|f-g\|_p \leqslant \|f-S\|_p + \|S-g\|_p < \varepsilon. \qquad \square$$

2.1.7　卷积、函数的正则化和 $C_c^\infty(\Omega)$ 空间在 $L^p(\Omega)$ 空间中的稠密性

定义 2.1.7　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的两个可测函数, 如果对于几乎处处的 x, 积分 $\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 存在, 就称它是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积, 记为 $(f*g)(x)$, 即

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

为了证明卷积的性质, 我们引入下面熟知的定理.

定理 2.1.14(Fubini 定理)　设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{N+m}$ 上的可测函数, 而且假定积分

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{N+m}} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y, \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

中至少有一个存在且有限, 则

(1) 对于几乎所有的 $y\in\mathbb{R}^m$, $f(\cdot,y)\in L^1(\mathbb{R}^N)$;

(2) 对于几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^N$, $f(x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^m)$;

(3) $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot,y)\mathrm{d}y \in L^1(\mathbb{R}^N)$;

(4) $\int_{\mathbb{R}^N} f(x,\cdot)\mathrm{d}x \in L^1(\mathbb{R}^m)$;

(5) $I_1 = I_2 = I_3$.

定理 2.1.15(卷积 Young 不等式) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则 $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, 并且

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.1.49}$$

证明 设 $1 < p < \infty$, q 是 p 的共轭指数, 利用 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}y \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p|g(y)|\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

因此, 由 Fubini 定理知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)|^p\mathrm{d}x &= \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \\ &\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p|g(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right] \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\mathrm{d}y\right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right] \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1+\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

于是

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

设 $p = 1$, 则

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\mathrm{d}x = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

设 $p = \infty$, 容易看到

$$|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\mathrm{d}y = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

从而式 (2.1.49) 也成立. □

容易证明在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中的函数卷积运算有以下简单性质: 设 $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则有

(1) $f * g = g * f$ (可交换性);

(2) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (可结合性);

(3) $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h)$, 其中 α, β 为实数 (线性性);

(4) $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$ (连续性).

为了证明一般情形的卷积 Young 不等式, 下面先证明 Doetsch 三线定理和 Riesz-Thorin 定理.

定理 2.1.16(Doetsch 三线定理) 设 $F(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 的带形 $0<\mathrm{Re}\, z<1$ 上解析, 在 $0\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant 1$ 上连续且有界. 若在直线 $\mathrm{Re}\, z=0,1$ 上分别有 $|F(z)|\leqslant M_0, M_1$, 则在直线 $0<\mathrm{Re}\, z=\theta<1$ 上必有 $|F(z)|\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$.

证明 令 $\varphi(z)=F(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$. 不妨假定 $M_0=M_1=1$. 若当 z 在带形 $0\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant 1$ 中趋于无穷大时, $\varphi(z)\to 0$, 则可取 $R>0$ 充分大使在 $|\mathrm{Im}\, z|\geqslant R$ 上, $|\varphi(z)|\leqslant 1$, 而在矩形 $0\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant 1$, $|\mathrm{Im}\, z|\leqslant R$ 上应用最大模原理知, 在矩形中也有 $|\varphi(z)|\leqslant 1$. 从而在带形 $0\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant 1$ 上 $|\varphi(z)|\leqslant 1$. 若 $\varphi(z)\to 0$ 的条件不成立, 考虑 $\varphi_n(z)=\varphi(z)\mathrm{e}^{\frac{z^2-1}{n}}$. 记 $z=x+\mathrm{i}y$, 则

$$\left|\mathrm{e}^{\frac{z^2-1}{n}}\right|=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{Re}z^2}{n}-\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{x^2-y^2}{n}-\frac{1}{n}}.$$

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$, 从而 $\dfrac{x^2}{n}-\dfrac{1}{n}\leqslant 0$. 于是

$$\left|\mathrm{e}^{\frac{z^2-1}{n}}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{n}}.$$

由于 $\varphi(z)$ 在 $0\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant 1$ 上已设有界. 故当 $|y|\to\infty$ 时, $\varphi_n(z)\to 0$, 而由以上证明知, 在 $0\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant 1$ 上, $|\varphi_n(z)|\leqslant 1$. 令 $n\to\infty$, 则在每一点 z, $\varphi_n(z)\to\varphi(z)$, 从而 $|\varphi(z)|\leqslant 1$. □

定理 2.1.17(Riesz-Thorin 插值定理[28]) 设 L 是由 $L^{p_1}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^{q_1}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$ 的满足可加性的算子, $1\leqslant p_1,p_2,q_1,q_2\leqslant\infty$, 且

$$\|Lf\|_{L^{q_j}(\mathbb{R}^N)}\leqslant M_j\|f\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)},\quad j=1,2,$$

则当 p_θ, q_θ 分别适合 $\dfrac{1}{p_\theta}=\dfrac{\theta}{p_1}+\dfrac{1-\theta}{p_2}$, $\dfrac{1}{q_\theta}=\dfrac{\theta}{q_1}+\dfrac{1-\theta}{q_2}$ 时, 对于所有的 $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$, 必有

$$\|Lf\|_{L^{q_\theta}(\mathbb{R}^N)}\leqslant M_1^{\theta}M_2^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_\theta}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.1.50}$$

证明 因为阶梯函数在 Lebesgue 空间中稠密, 所以仅需对阶梯函数证明式 (2.1.50) 成立即可. 为此取两个阶梯函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\chi_{E_i}(x),$$

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\chi_{E_j}(x),$$

其中 $\xi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $\eta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为复常数, $\bigcup E_i\subset\mathbb{R}^N$, $\bigcup F_j\subset\mathbb{R}^N$, $E_{i_1}\bigcap F_{i_2}=\varnothing$, $i_1\neq i_2$; $F_{j_1}\bigcap F_{j_2}=\varnothing$, $j_1\neq j_2$, 而且 E_i 和 F_j 均为可测集, χ_{E_i}, χ_{F_j} 分别表示 E_i 和 F_j 的特征函数. 由稠密性有

$$\|Lf\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}=\sup_g\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^N}Lf(y)\cdot g(y)\mathrm{d}y\right|\,\Big|\,\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)}\leqslant 1\right\},$$

其中 q' 是 $q(1\leqslant q\leqslant\infty)$ 的共轭指数. 令

$$a_{ij}=\int_{\mathbb{R}^N}L\chi_{E_i}(y)\chi_{E_j}(y)\mathrm{d}y,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n,$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^N}Lf(y)g(y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_i\eta_j\triangleq L(\xi,\eta).$$

又因为

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}=\sum_{i=1}^m|\xi_i|^p\mu(E_i)\quad(1\leqslant p\leqslant\infty),$$

$$\|g\|^{q'}_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)}=\sum_{j=1}^n|\eta_j|^{q'}\mu(F_j),$$

所以现在需要讨论的是

$$M_{\alpha,\beta}=\sup\left\{L(\xi,\eta)\left|\sum_{i=1}^m|\xi_i|^{\frac{1}{\alpha}}\mu_i\leqslant 1,\sum_{j=1}^n|\eta_j|^{\frac{1}{\beta}}\nu_j\leqslant 1\right.\right\},$$

其中 $\mu_i=\mu(E_i)$ 和 $\nu_j=\mu(F_j)$ 分别表示 E_i 和 F_j 的 Lebesgue 测度, α 和 β 待定. 要证明 $M_{\alpha,\beta}$ 关于 α 和 β 有一种对数凸性, 即当 $\alpha=\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2$, $\beta=\lambda\beta_1+(1-\lambda)\beta_2$ 时,

$$M_{\alpha,\beta}\leqslant M^{1-\lambda}_{\alpha_1,\beta_1}M^{\lambda}_{\alpha_2,\beta_2},\tag{2.1.51}$$

亦即 $\log M_{\alpha,\beta}$ 是凸函数. 这时, 只要令 $\alpha_i=\dfrac{1}{p_i}$, $\beta_i=\dfrac{1}{q_i}(i=1,2)$, 而 $1-\lambda=\theta$, 即可得定理的结论. 事实上, 令

$$\xi_i(z)=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\arg\xi_i}|\xi_i|^{\frac{z\alpha_1+(1-z)\alpha_2}{\alpha}},$$

$$\eta_j(z)=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\arg\eta_j}|\eta_j|^{\frac{z\beta_1+(1-z)\beta_2}{\beta}},$$

则 $L(\xi(z),\eta(z))$ 是 $z=x+\mathrm{i}y$ 在 $0<x<1$ 上的解析函数. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 因为 $\xi_i(z),\eta_j(z)$ 都连续且有界, 所以 $L(\xi(z),\eta(z))$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上也连续且有界.

当 Re $z=0$ 时, $|\xi_i(z)|=|\xi_i|^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}$, $|\eta_j(z)|=|\eta_j|^{\frac{\beta_1}{\beta}}$, 故

$$\sum_{i=1}^{m}|\xi_i(z)|^{\frac{1}{\alpha_1}}\mu_i=\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^{\frac{1}{\alpha}}\mu_i\leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|\eta_j(z)|^{\frac{1}{\beta_1}}\nu_j=\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^{\frac{1}{\beta}}\nu_j\leqslant 1.$$

于是

$$|L(\xi(z),\eta(z))|\leqslant M_{\alpha_1,\beta_1}=M_1.$$

同理, 当 Re $z=1$ 时,

$$|L(\xi(z),\eta(z))|\leqslant M_{\alpha_2,\beta_2}=M_2.$$

从而由定理 2.1.16 可得当 $z=\lambda$ 时 (这时 $\xi_i(z)=\xi_i,\eta_j(z)=\eta_j$) 有

$$|L(\xi,\eta)|\leqslant M_{\alpha_1,\beta_1}^{1-\lambda}M_{\alpha_2,\beta_2}^{\lambda}. \tag{2.1.52}$$

因为 $M_{\alpha,\beta}$ 即 $L:L^{p_\theta}(\mathbb{R}^N)\longmapsto L^{q_\theta}(\mathbb{R}^N)$ 的范数, 所以令 $1-\lambda=\theta$, 由式 (2.1.52) 知式 (2.1.50) 成立. □

注意到上面的证明中假定 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$. 若 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$, 则定义 $M_{\alpha,\beta}$ 的式子中 $\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^{\frac{1}{\alpha}}\mu_i\leqslant 1$ 或 $\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^{\frac{1}{\beta}}\nu_j\leqslant 1$ 就要改为 $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|\xi_i|\leqslant 1$ 或 $\sup\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\eta_j|\leqslant 1$.

下面应用 Riesz-Thorin 插值定理证明一般卷积 Young 不等式.

定理 2.1.18 (一般卷积 Young 不等式[28]) 设 $1\leqslant p,\ q\leqslant\infty$, r 满足

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geqslant 0.$$

如果 $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^N)$, 则 $f*g\in L^r(\mathbb{R}^N)$, 且有

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.1.53}$$

证明 固定 $g\in L^q(\mathbb{R}^N)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. 考虑作用在 f 的算子 $f\longmapsto Lf=f*g$, 则 L 是 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 的有界算子, 算子的范数 $\leqslant\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$. 事实上, 这可由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}&=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|f(y)|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}}|g(x-y)|\mathrm{d}y\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(y)|\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|f(y)||g(x-y)|^q\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

其中 q' 是 q 的共轭指数. 此外, 由 Hölder 不等式知, 它也是 $L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的有界算子, 算子范数 $\leqslant \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$, 即

$$\|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

因此, 对 p 满足 $1\leqslant p\leqslant q'$, 记 $\dfrac{1}{p}=1-\theta+\dfrac{\theta}{q'}=1-\dfrac{\theta}{q}$, 令 r 满足 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1-\theta}{q}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}-1$, 根据 Riesz-Thorin 插值定理, 知 L 是 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 的有界算子, 且算子范数小于等于 $\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$, 即

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}. \qquad \square$$

显然, 当 $q=1$ 时, 式 (2.1.53) 就化为式 (2.1.49).

为了定义正则化算子, 下面先引入核函数概念.

设 $j(x)$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中的非负, 实值函数, 例如, 取

$$j(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{当 } |x|<1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } |x|\geqslant 1 \text{ 时},\end{cases}$$

其中

$$\gamma=\int_{|x|\leqslant 1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\mathrm{d}x.$$

我们称 $j(x)$ 为核函数且具有性质:

(1) $j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\mathrm{d}x=1$;

(3) $j(x)\geqslant 0,\quad \mathrm{supp}j(x)=\{x\in\mathbb{R}^N|\ |x|\leqslant 1\}$.

定义 2.1.8 设 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^N)$ 和 $\varepsilon>0$. 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-N}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, 称 φ_ε 为 φ 的展缩函数.

对于任意实数 $\delta>0$, 作展缩函数

$$j_\delta(x)=\delta^{-N}j\left(\frac{x}{\delta}\right), \tag{2.1.54}$$

则它是属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的非负函数, 而且满足

(1) 当 $|x|\geqslant\delta$ 时 $j_\delta(x)=0$;

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} j_\delta(x)\mathrm{d}x=1$.

定义 2.1.9　设 $f \in L^1(\Omega)$, 作函数

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \overline{\in} \Omega, \end{cases}$$

则 $\widetilde{f}(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. 展缩函数 j_δ 称为软化子, 而卷积

$$J_\delta f(x) = (j_\delta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} j_\delta(x-y)\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x-\delta y)j(y)\mathrm{d}y \tag{2.1.55}$$

称为 $f(x)$ 的一个光滑 (磨光) 化或正则化. J_δ 也称为正则化算子.

在给出 $J_\delta f(x)$ 的性质之前, 我们先介绍局部可积函数概念和一些记号.

定义 2.1.10　几乎处处定义在开集 Ω(或 $\mathbb{R}^N$) 上的函数 $f(x)$ 称为局部可积, 如果对任一 $G \subset\subset \Omega$ (或 $\mathbb{R}^N$)$f(x) \in L^1(G)$.

Ω(或 $\mathbb{R}^N$) 上的所有局部可积函数全体记为 $L^1_{loc}(\Omega)$(或 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$).

如果 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, 积分 $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\mathrm{d}x$ 可以无限, 但对任一 $G \subset\subset \mathbb{R}^N$, 积分 $\int_G |f(x)|\mathrm{d}x$ 是有限的.

设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的两个点,

$$\mathrm{dist}(x, y) = \left\{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

表示 x 和 y 之间的 Euclid 空间的距离.

设 G 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一集合, 用

$$\mathrm{dist}(x, G) = \inf_{y \in G} \mathrm{dist}(x, y)$$

表示 x 到 G 的距离.

设 F 和 G 是 $\mathbb{R}^N$ 中的两个集合, 用

$$\mathrm{dist}(F, G) = \inf_{x \in F} \mathrm{dist}(x, G) = \inf_{y \in G} \mathrm{dist}(F, y)$$

表示两个集合 F 与 G 之间的距离.

定理 2.1.19(Lebesgue 微分定理)　设 $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ 是局部可积函数, 则

(1) 对于几乎处处点 $x_0 \in \mathbb{R}^N$, 当 $r \to 0$ 时,

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} f(x)\mathrm{d}x \to f(x_0),$$

其中 $|B(x_0,r)|$ 表示球 $B(x_0,r)$ 的体积.

(2) 事实上, 对于几乎处处点 $x_0 \in \mathbb{R}^N$, 当 $r \to 0$ 时,

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x \to 0.$$

上式成立的点 x_0 称为 $f(x)$ 的 Lebesgue 点. 积分

$$\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y$$

表示 $f(y)$ 在球 $B(x,r)$ 上的平均值.

注 2.1.4 Lebesgue 微分定理更一般的情形是: 如果对于 $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, 则对于几乎处处点 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 有, 当 $r \to 0$ 时,

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|^p\mathrm{d}x \to 0.$$

定理 2.1.20 (1) 若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, 则 $J_\delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(2) 若 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\mathrm{supp} f \subset\subset \Omega$ 和 $\delta < \mathrm{dist}(\mathrm{supp} f, \partial\Omega)$, 则 $J_\delta f \in C^\infty_c(\Omega)$, 其中 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界;

(3) 若 $f \in L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$, 则 $J_\delta f \in L^p(\Omega)$, 还有

$$\|J_\delta f; L^p(\Omega)\| \leqslant \|f; L^p(\Omega)\| \tag{2.1.56}$$

和

$$\lim_{\delta \to 0^+}\|J_\delta f - f; L^p(\Omega)\| = 0; \tag{2.1.57}$$

(4) 若 $f \in C(\Omega)$ 和 $G \subset\subset \Omega$, 则在 G 上一致地成立

$$\lim_{\delta \to 0^+} J_\delta f(x) = f(x);$$

(5) 设 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, 则当 $\delta \to 0$ 时, 几乎处处 $J_\delta f \to f$.

证明 (1) 因为 $j_\delta(x-y)$ 是关于 x 的无穷次可导函数, 且如果 $|x-y| \geqslant \delta$ 时, 它等于零, 所以对于每一个任意 N 重指数 α 有

$$D^\alpha_x J_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha_x j_\delta(x-y)\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y, \tag{2.1.58}$$

这表明 $J_\delta f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(2) 显然

$$J_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{f}(x-\delta y)j(y)\mathrm{d}y = \int_{|y|\leqslant 1}\widetilde{f}(x-\delta y)j(y)\mathrm{d}y. \tag{2.1.59}$$

若记 $(\mathrm{supp} f)_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N | \mathrm{dist}(x, \mathrm{supp} f) < \delta\}$ 和记以 x 为球心, δ 为半径的闭球为 $B(x,\delta) = \{x - \delta y \big| |y| \leqslant 1\}$, 则当 $x \overline{\in} (\mathrm{supp} f)_\delta$ 时,

$$B(x,\delta) \bigcap \mathrm{supp} f = \varnothing,$$

其中 $\varnothing$ 表示空集. 根据假设 $f(x)$ 在 $\Omega \backslash \mathrm{supp}\ f$ 上为零, 推出当 $x \overline{\in} (\mathrm{supp} f)_\delta$ 时, $\widetilde{f}(x)$ 在 $B(x,\delta)$ 上的值为零. 由式 (2.1.59) 知

$$J_\delta f(x) = 0, \quad \forall x \overline{\in} (\mathrm{supp} f)_\delta. \tag{2.1.60}$$

综合式 (2.1.58) 和式 (2.1.60) 得到 $J_\delta f \in C_c^\infty(\Omega)$.

(3) 先证式 (2.1.56). 如果 $f \in L^p(\Omega)(1 < p < \infty)$, 应用 Hölder 不等式导出

$$\begin{aligned}
|J_\delta f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(y) j_\delta(x-y) \mathrm{d}y \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(y) [j_\delta(x-y)]^{\frac{1}{p}} [j_\delta(x-y)]^{\frac{1}{p'}} \mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^N} j_\delta(x-y) \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(y)|^p j_\delta(x-y) \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(y)|^p j_\delta(x-y) \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned} \tag{2.1.61}$$

其中 p' 为 p 的共轭指数. 所以由式 (2.1.61) 利用定理 2.1.14(Fubini 定理), 可见

$$\begin{aligned}
\|J_\delta f; L^p(\Omega)\| &\leqslant \left[\int_\Omega \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(y)|^p j_\delta(x-y) \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(y)|^p \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^N} j_\delta(x-y) \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(y)|^p \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{p}} = \|f; L^p(\Omega)\|.
\end{aligned} \tag{2.1.62}$$

对于 $p = 1$ 由式 (2.1.55) 直接推得

$$|J_\delta f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(y)| j_\delta(x-y) \mathrm{d}y. \tag{2.1.63}$$

从式 (2.1.62) 和式 (2.1.63) 看出当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, 不等式 (2.1.56) 成立. 因而 $J_\delta f \in L^p(\Omega)$.

下面证明式 (2.1.57) 成立, 即证明当 $\delta \to 0^+$ 时, $J_\delta f(x)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$.

因为 $C_c(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密, 所以在 $C_c(\Omega)$ 中存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$. 由于每一个函数 $f_n(x)$ 可以看成 $C_c(\mathbb{R}^N)$ 中的函数, 因此

$$J_\delta f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f_n(y) j_\delta(x-y) \mathrm{d}y.$$

利用式 (2.1.56) 有

$$\|J_\delta f - J_\delta f_n; L^p(\Omega)\| \leqslant \|f - f_n; L^p(\Omega)\|. \tag{2.1.64}$$

应用 Minkowski 不等式和式 (2.1.64) 得到

$$\begin{aligned}\|J_\delta f - f; L^p(\Omega)\| &\leqslant \|J_\delta f - J_\delta f_n; L^p(\Omega)\| + \|J_\delta f_n - f_n; L^p(\Omega)\| + \|f_n - f; L^p(\Omega)\| \\ &\leqslant 2\|f - f_n; L^p(\Omega)\| + \|J_\delta f_n - f_n; L^p(\Omega)\|.\end{aligned} \tag{2.1.65}$$

易知

$$J_\delta f_n(x) - f_n(x) = \int_{|y|\leqslant 1} [f_n(x - \delta y) - f_n(x)] j(y) \mathrm{d}y. \tag{2.1.66}$$

当 n 固定时, $f_n(x) \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 故 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中一致连续. 从而式 (2.1.66) 中的被积函数序列 $\{f_n(x-\delta y)-f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 当 $\delta \to 0^+$ 时, 一致收敛于零, 且 $\mathrm{supp}(J_\delta f_n(x)-f_n(x))$ 是有界闭集, 由式 (2.1.66) 推得

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|J_\delta f_n - f_n; L^p(\Omega)\| = 0.$$

利用式 (2.1.65) 和上式知

$$\overline{\lim_{\delta\to 0^+}} \|J_\delta f - f; L^p(\Omega)\| \leqslant 2\|f - f_n; L^p(\Omega)\|. \tag{2.1.67}$$

当 $n \to \infty$ 时, 式 (2.1.67) 取极限得

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|J_\delta f - f; L^p(\Omega)\| = 0.$$

(4) 因 $f \in C(\Omega)\bigcap L^1(G)$, 故

$$\begin{aligned}J_\delta f - f &= \int_{\mathbb{R}^N} [\widetilde{f}(x - \delta y) - \widetilde{f}(x)] j(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{|y|\leqslant 1} [\widetilde{f}(x - \delta y) - \widetilde{f}(x)] j(y) \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{2.1.68}$$

存在开集 G_1 满足

$$G \subset\subset G_1 \subset\subset \Omega.$$

记 $G_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N | \operatorname{dist}(x, G) \leqslant \delta\}$, 只要 δ 取得足够小, 就有 $G_\delta \subset G_1$. 所以当 $x \in G$ 时, 式 (2.1.68) 中的被积函数可写为

$$\widetilde{f}(x - \delta y) - \widetilde{f}(x) = f(x - \delta y) - f(x). \tag{2.1.69}$$

因为 $f(x)$ 在 G_1 上一致连续, 所以由式 (2.1.68) 推得当 $\delta \to 0^+$ 时, 式 (2.1.68) 中的被积函数一致收敛于零. 从而在 G 上一致地有

$$\lim_{\delta \to 0^+} J_\delta f(x) = f(x).$$

(5) 根据定理 2.1.19 (Lebesgue 微分定理) 知, 对于几乎处处 $x \in \Omega$, 有

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y = 0.$$

固定此点 x, 则由上式当 $\delta \to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} |J_\delta f(x) - f(x)| = |(j_\delta * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,\delta)} [f(y) - f(x)] j_\delta(x-y) \mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\delta^N} \int_{B(x,\delta)} j\left(\frac{x-y}{\delta}\right) |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{C}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y \to 0, \end{aligned}$$

其中 C 为常数, 即知 (5) 的结论成立. □

推论 2.1.4 设 $1 \leqslant p < \infty$, 则 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

证明 设 $f \in L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$. 因为 $C_c(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在函数 $g \in C_c(\Omega)$, 使得

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由定理 2.1.17 知, 对于 $g \in C_c(\Omega)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\|J_\delta g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而有

$$\|f - J_\delta g\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - J_\delta g\|_p < \varepsilon.$$

又因为 $J_\delta g \in C_c^\infty(\Omega)$, 推论得证. □

2.1.8 $L^p(\Omega)$ 空间的可分性

定理 2.1.21 若 $1 \leqslant p < \infty$, 则 $L^p(\Omega)$ 是可分的.

证明 设 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界. 对每一个正整数 $n = 1, 2, \cdots$, 设

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \text{ 且 } |x| < n \right\}.$$

容易证明

$$C_c(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_c(\Omega_n). \tag{2.1.70}$$

记 P 是系数为有理数的多项式全体, 而

$$P_n = \{\chi_{\Omega_n} f | f \in P\}$$

是可列集. 显然 $C_c(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ 和 $P_n \subset L^p(\Omega)$.

设 $f \in L^p(\Omega)$. 由定理 2.1.13 知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\Omega)$, 使得

$$\|f - g; L^p(\Omega)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.71}$$

由式 (2.1.70) 知, g 属于某一个 $C_c(\Omega_m)$. 由 Weierstrass 定理知 P_m 在 $C_c(\Omega_m)$ 中稠密, 即存在 $h \in P_m$, 满足

$$|g(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}[\mu(\Omega_m)]^{-\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \Omega_m. \tag{2.1.72}$$

因为 Ω_m 是一有界集, 由式 (2.1.72) 得

$$\begin{aligned}\|g - h; L^p(\Omega)\| &= \left[\int_\Omega |g(x) - h(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_{\Omega_m} |g(x) - h(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{2.1.73}$$

由式 (2.1.71) 和式 (2.1.73) 知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $h \in \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$, 使得

$$\|f - h; L^p(\Omega)\| \leqslant \|f - g; L^p(\Omega)\| + \|g - h; L^p(\Omega)\| < \varepsilon.$$

因为 P_m 是可列集, 则 $\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$ 也是可列集. 所以 $L^p(\Omega)$ 是可分的. □

注 2.1.5 因为 $C_B(\Omega)$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 的真闭子集, 所以它在 $L^\infty(\Omega)$ 中不稠密. 因此 $C_c(\Omega)$ 或 $C_c^\infty(\Omega)$ 都不在 $L^\infty(\Omega)$ 中稠密, 从而 $L^\infty(\Omega)$ 是不可分的.

2.1.9 $L^p(\Omega)$ 空间元素的整体连续性

定义 2.1.11 设 $\varphi \in L^p(\Omega)$. 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 只要 $|y| < \delta(\varepsilon)$, 就有

$$\left[\int_\Omega |\varphi(x + y) - \varphi(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 在 $L^p(\Omega)$ 内整体连续.

定理 2.1.22 设 $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, 则成立

$$\lim_{|y|\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(x+y) - \widetilde{f}(x)|^p \mathrm{d}x = 0, \tag{2.1.74}$$

其中

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \overline{\in} \Omega. \end{cases}$$

证明 设 $f \in L^p(\Omega)$. 因为 $C_c(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密, 因此在 $C_c(\Omega)$ 中存在函数序列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |g_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0. \tag{2.1.75}$$

定义 $g_n(x)$ 在 $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ 上的值为零, 则 $g_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$. 由式 (2.1.75) 得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x) - \widetilde{f}(x)|^p \mathrm{d}x = 0. \tag{2.1.76}$$

当 n 固定时, $g_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 且 $\mathrm{supp} g_n$ 是一有界集, 所以 $g_n(x)$ 在闭集 $\mathrm{supp} g_n$ 上一致连续, 于是成立

$$\lim_{|y|\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x+y) - g_n(x)|^p \mathrm{d}x = 0. \tag{2.1.77}$$

利用 Minkowski 不等式和式 (2.1.77) 导出

$$\begin{aligned} \varlimsup_{|y|\to 0} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(x+y) - \widetilde{f}(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant & \varlimsup_{|y|\to 0} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(x+y) - g_n(x+y)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\ & + \varlimsup_{|y|\to 0} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x+y) - g_n(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\ & + \varlimsup_{|y|\to 0} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x) - \widetilde{f}(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\ \leqslant & 2\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(x) - g_n(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

上式两端当 $n \to \infty$ 时, 取极限得

$$\varlimsup_{|y|\to 0} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f}(x+y) - \widetilde{f}(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 0.$$

由此得式 (2.1.74). □

2.2 $L^p(\Omega)$ 空间上线性泛函的表示形式

2.2.1 预备知识

现在讨论 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 上的线性泛函的表示形式.

设 p 和 p' 是一对共轭指数, 用 $(L^p(\Omega))'$ 表示 $L^p(\Omega)$ 上线性泛函的全体. 对于每个元素 $g \in L^{p'}(\Omega)$, 用

$$lgf = \int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^p(\Omega) \tag{2.2.1}$$

定义 $L^p(\Omega)$ 上的一个泛函, 并用 lg 表示.

引理 2.2.1 在以上假定下, 由式 (2.2.1) 定义的 lgf 是一线性泛函. 若 $g_1, g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ 不同, 则由式 (2.2.1) 分别定义的两个线性泛函 lg_1 和 lg_2 也不同.

证明 泛函 (2.2.1) 的可加性是显然的. 下面证明 lg 的连续性. 如果函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$, 则当 $1 < p < \infty$ 时, 利用 Hölder 不等式推出

$$\left|\int_\Omega g(x)(f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \left[\int_\Omega |g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}};$$

当 $p = 1$ 时,

$$\left|\int_\Omega g(x)(f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \|g; L^\infty(\Omega)\|\|f_n - f; L^1(\Omega)\|,$$

从而对于 $1 \leqslant p < \infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x)f_n(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 $L^p(\Omega)$ 上的泛函 lg 是连续的, 所以 lg 是线性泛函.

假设引理的第二个结论不成立, 那么 $lg_1 = lg_2$, 即

$$\int_\Omega g_1(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega g_2(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

或

$$\int_\Omega (g_1(x) - g_2(x))f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall f \in L^p(\Omega). \tag{2.2.2}$$

如果 $1 < p < \infty$, 作辅助函数

$$f_{12}(x) = |g_1(x) - g_2(x)|^{\frac{p'}{p}}\mathrm{sign}(g_1(x) - g_2(x)), \tag{2.2.3}$$

显然 $f_{12} \in L^p(\Omega)$. 用 $f_{12}(x)$ 代替式 (2.2.2) 中的 $f(x)$, 则有

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (g_1(x) - g_2(x))|g_1(x) - g_2(x)|^{\frac{p'}{p}} \operatorname{sign}(g_1(x) - g_2(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |g_1(x) - g_2(x)|^{p'} \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.2.4}
$$

于是 $g_1(x) = g_2(x)$, a.e., 矛盾, 说明 lg_1 与 lg_2 不同.

如果 $p = 1$, 作辅助函数

$$
f_0(x) = \operatorname{sign}(g_1(x) - g_2(x)), \tag{2.2.5}
$$

显然 $f_0 \in L^1(\Omega)$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Omega_0 \subset \Omega(\mu(\Omega_0) > 0)$, 使得

$$
|g_1(x) - g_2(x)| \geqslant \|g_1 - g_2; L^\infty(\Omega)\| - \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega_0.
$$

所以将式 (2.2.5) 代入式 (2.2.2), 可见

$$
\begin{aligned}
0 = \int_\Omega (g_1(x) - g_2(x)) f_0(x)\mathrm{d}x &= \int_\Omega |g_1(x) - g_2(x)|\mathrm{d}x \\
&\geqslant (\|g_1 - g_2; L^\infty(\Omega)\| - \varepsilon)\mu(\Omega_0).
\end{aligned}
$$

上式两端除以 $\mu(\Omega_0)$ 和由于 ε 的任意性, 导出

$$
\|g_1 - g_2; L^\infty(\Omega)\| \leqslant 0,
$$

从而 $g_1(x) = g_2(x)$, a.e., 矛盾说明 lg_1 与 lg_2 不同. □

引理 2.2.1 说明 $L^{p'}(\Omega)$ 中的元素通过式 (2.2.1) 与 $(L^p(\Omega))'$ 中的一个子集合建立了一一对应关系. $L^{p'}(\Omega)$ 能否通过式 (2.2.1) 同整个 $(L^p(\Omega))'$ 建立一一对应关系? 下面的定理会给出肯定的回答. 先证明一些引理.

引理 2.2.2　设 $1 < p < \infty$, $l \in (L^p(\Omega))'$ 且 $\|l; (L^p(\Omega))'\| = 1$, 则存在唯一的 $g \in L^p(\Omega)$, 使得 $\|g; L^p(\Omega)\| = 1$ 且 $l(g) = 1$.

证明　设 $l \in (L^p(\Omega))'$ 且 $\|l; (L^p(\Omega))'\| = \sup\limits_{\substack{f \in L^p(\Omega) \\ \|f\|_p = 1}} |l(f)| = 1$, 因此对自然数 n 存在序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ 满足 $\|f_n\|_p = 1$, 使得

$$
1 - \frac{1}{n} < |l(f_n)| \leqslant 1.
$$

如果 $l(f_n) > 0$, 则得

$$
\lim_{n\to\infty} l(f_n) = 1. \tag{2.2.6}
$$

若 $l(f_n) < 0$, 将 $\{-f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 代替 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 可得同样的结论.

下证 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的基本序列.

反证法. 若 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 不是基本序列, 必存在某一正数 $\varepsilon_0 > 0$, 以及 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个子序列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{f_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$\|f_{n_k} - f_{m_k}\|_p \geqslant \varepsilon_0. \tag{2.2.7}$$

当 $2 \leqslant p < \infty$ 时, 利用 Clarkson 不等式 (2.1.30), 则有

$$\left\|\frac{f_{n_k} + f_{m_k}}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f_{n_k} - f_{m_k}}{2}\right\|_p^p \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f_{n_k}\|_p^p + \frac{1}{2}\|f_{m_k}\|_p^p\right) = 1. \tag{2.2.8}$$

当 $1 < p \leqslant 2$ 时, 利用 Clarkson 不等式 (2.1.32), 则有

$$\left\|\frac{f_{n_k} + f_{m_k}}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f_{n_k} - f_{m_k}}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f_{n_k}\|_p^p + \frac{1}{2}\|f_{m_k}\|_p^p\right)^{p'-1} = 1. \tag{2.2.9}$$

因为 $\left\|\frac{f_{n_k} - f_{m_k}}{2}\right\|_p \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$, 所以由式 (2.2.8), 式 (2.2.9) 和利用在定理 2.1.9 中证明 $L^p(\Omega)$ 为一致凸空间的方法, 存在一个与 k 无关的数 $\eta \in (0,1)$, 使得

$$\left\|\frac{f_{n_k} + f_{m_k}}{2}\right\|_p < 1 - \eta.$$

由式 (2.2.6) 推知 $\lim\limits_{k\to\infty} l\left(\frac{f_{n_k}(x) + f_{m_k}(x)}{2}\right) = 1$, 所以在序列 $\left\{\frac{f_{n_k}(x) + f_{m_k}(x)}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$ 中只能出现有限个函数为零, 否则子序列 $\left\{\frac{f_{n_k}(x) + f_{m_k}(x)}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$ 不满足

$$\lim_{k\to\infty} l\left(\frac{f_{n_k}(x) + f_{m_k}(x)}{2}\right) = 1.$$

把可能出现的零函数除去, 仍记为 $\left\{\frac{f_{n_k}(x) + f_{m_k}(x)}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$. 作辅助函数

$$F_k(x) = \frac{f_{n_k}(x) + f_{m_k}(x)}{\|f_{n_k} + f_{m_k}\|_p}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

显然 $\|F_k\|_p = 1$, 且满足

$$l(F_k) = \frac{1}{2}[l(f_{n_k}) + l(f_{m_k})]\frac{1}{\left\|\frac{f_{n_k} + f_{m_k}}{2}\right\|_p} \geqslant \frac{1}{2(1-\eta)}[l(f_{n_k}) + l(f_{m_k})].$$

利用式 (2.2.6) 推得

$$\varliminf_{k\to\infty} l(F_k) \geqslant \frac{1}{1-\eta} > 1. \tag{2.2.10}$$

因为 $\|F_k\|_p = 1, \quad k = 1, 2, \cdots$, 所以至少存在一个 k_0, 有函数 $F_{k_0}(x)$ 的范数为 1, 而 $l(F_{k_0}) > 1$, 这与 $\sup\limits_{\substack{f \in L^p(\Omega) \\ \|f\|_p = 1}} |l(f)| = 1$ 矛盾. 因此 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一基本序列. 由于 $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间, 故 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于某一函数 $g \in L^p(\Omega)$. 利用线性泛函 l 和范数 $\|\cdot\|_p$ 的连续性, 显然有 $l(g) = 1$ 和 $\|g\|_p = 1$. 函数 $g(x)$ 即为该引理所求.

现在证明唯一性. 若不唯一, 则存在另一序列 $\{\widetilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\|\widetilde{f}_n\|_p = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} l(\widetilde{f}_n) = 1$ 和 $\{\widetilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛 $\widetilde{g}(x)$, 而不等于 $g(x)$. 把一对序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\widetilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 看成上面讨论过的一对序列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{f_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, 进行类似于由式 (2.2.7) 推出式 (2.2.10) 的过程, 同样会得出矛盾. 从而唯一性得证.

□

引理 2.2.3 设 $1 < p < \infty$, $F \in L^p(\Omega)$ 和 $\|F\|_p = 1$, 则存在唯一 $l \in (L^p(\Omega))'$, 满足 $\|l; (L^p(\Omega))'\| = 1$ 和 $l(F) = 1$.

证明 先证线性泛函 l 的存在性. 作函数

$$g(x) = \begin{cases} |F(x)|^{p-1}\mathrm{sign}F(x), & \text{当 } F(x) \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } F(x) = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

显然 $g \in L^{p'}(\Omega)$ 和 $\|g\|_{p'} = 1$. 另外

$$lg(f) = \int_{\Omega} g(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^p(\Omega) \tag{2.2.11}$$

是 $L^p(\Omega)$ 上的线性泛函, 且 $lg(F) = \int_{\Omega} |F(x)|^p \mathrm{d}x = 1$.

下证 lg 就是引理所要找的 l. 这时只需证明

$$\|lg; (L^p(\Omega))'\| = 1$$

即可. 事实上, 由式 (2.2.11) 和利用 Hölder 不等式, 我们有

$$|lg(f)| \leqslant \|g\|_{p'}\|f\|_p,$$

从而

$$\|lg; (L^p(\Omega))'\| \leqslant \|g\|_{p'} = 1. \tag{2.2.12}$$

作辅助函数

$$F_1(x) = \begin{cases} |g(x)|^{p'-1}\mathrm{sign}\ g(x), & \text{当 } g(x) \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } g(x) = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

显然, $F_1 \in L^p(\Omega)$, $\|F_1\|_p = \|g\|_{p'} = 1$ 且

$$lg(F_1) = \|g\|_{p'}^{p'} = 1. \tag{2.2.13}$$

由式 (2.2.12) 和式 (2.2.13) 推得 $\|lg; (L^p(\Omega))'\| = 1$. 又因为 $F_1(x) = F(x)$, 所以 lg 就是引理要求找的 l.

现在证明 l 的唯一性. 反证法. 若有两个不同的 l_1 和 l_2 满足引理的条件, 则必存在一个 $\widetilde{F}(\neq 0) \in L^p(\Omega)$, 使得

$$l_1(\widetilde{F}) \neq l_2(\widetilde{F}). \tag{2.2.14}$$

作辅助函数 $F_0(x) = C_1\widetilde{F} + C_2F$, 其中 C_1 和 C_2 由下列方程组

$$\begin{aligned} &l_1(C_1\widetilde{F} + C_2F) - l_2(C_1\widetilde{F} + C_2F) = 2, \\ &l_1(C_1\widetilde{F} + C_2F) = 1 \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

确定. 解此方程组得

$$C_1 = \frac{2}{l_1(\widetilde{F}) - l_2(\widetilde{F})}, \quad C_2 = 1 - C_1 l_1(\widetilde{F}).$$

对任意实数 $t > 0$, 作函数 $F + tF_0$. 由式 (2.2.15) 的第二个式子得

$$l_1(F + tF_0) = 1 + tl_1(F_0) = 1 + t.$$

利用 $\|l_1; (L^p(\Omega))'\| = 1$ 推出

$$1 + t \leqslant \|F + tF_0\|_p. \tag{2.2.16}$$

此外, 从式 (2.2.15) 的第一个式子解得

$$l_2(F - tF_0) = 1 - tl_2(F_0) = 1 + t.$$

同样有

$$1 + t \leqslant \|F - tF_0\|_p. \tag{2.2.17}$$

下面分两种情况讨论.

(1) 若 $1 < p \leqslant 2$, 利用 Clarkson 不等式 (2.1.33), (2.2.16) 以及式 (2.2.17) 导出

$$1 + t^p\|F_0\|_p^p = \left\|\frac{(F + tF_0) + (F - tF_0)}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{(F + tF_0) - (F - tF_0)}{2}\right\|_p^p$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\|F+tF_0\|_p^p+\frac{1}{2}\|F-tF_0\|_p^p \geqslant (1+t)^p. \tag{2.2.18}$$

(2) 如果 $2\leqslant p<\infty$, 利用 Clarkson 不等式 (2.1.31), 式 (2.2.16) 以及式 (2.2.17) 得

$$\begin{aligned}1+t^{p'}\|F_0\|_p^{p'} &= \left\|\frac{(F+tF_0)+(F-tF_0)}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{(F+tF_0)-(F-tF_0)}{2}\right\|_p^{p'}\\ &\geqslant \left(\frac{1}{2}\|F+tF_0\|_p^p+\frac{1}{2}\|F-tF_0\|_p^p\right)^{p'-1} \geqslant (1+t)^{p'}. \end{aligned}\tag{2.2.19}$$

一方面从推导过程来看式 (2.2.18) 和式 (2.2.19), 对一切 $t>0$ 成立. 然而另一方面若 $\|F_0\|_p\neq 0$, 式 (2.2.18) 和式 (2.2.19) 不可能对一切 $t>0$ 成立 (例如,

$$1+t^p\|F_0\|_p^p<1+t \quad (<(1+t)^p),$$

则

$$t^{p-1}<\frac{1}{\|F_0\|_p^p}.$$

所以当 $0<t<\dfrac{1}{\|F_0\|_p^{\frac{p}{p-1}}}$ 时, 式 (2.2.18) 不成立), 除非 $\|F_0\|_p=0$. 但这是不可能的, 因为由式 (2.2.15) 知 $l_1(F_0)=l_1(C_1\widetilde{F}+C_2F)=1$. 同理可说明式 (2.2.19) 不可能对一切 $t>0$ 成立. 唯一性得证. □

引理 2.2.4 设 $g\in L^\infty(\Omega)$, 则泛函

$$l(f)=\int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f\in L^1(\Omega) \tag{2.2.20}$$

是 $L^1(\Omega)$ 上的线性泛函, 且

$$\|l;(L^1(\Omega))'\|=\|g;L^\infty(\Omega)\|. \tag{2.2.21}$$

证明 显然由式 (2.2.20) 定义的泛函是线性的. 所以只需证明式 (2.2.21) 成立. 当 $g(x)=0$ 时, 式 (2.2.21) 显然成立. 现在假定 $g(x)\neq 0$. 设 $\varepsilon\in(0,\|g;L^\infty(\Omega)\|)$, 总存在 Ω 的一个子集 $A(0<\mu(A)<\infty)$ 满足

$$|g(x)|\geqslant \|g;L^\infty(\Omega)\|-\varepsilon, \quad \forall x\in A.$$

作辅助函数

$$f_0(x)=\begin{cases}\operatorname{sign} g(x), & x\in A,\\ 0, & x\overline{\in} A.\end{cases}$$

因此 $f_0 \in L^1(\Omega)$, $\|f_0; L^1(\Omega)\| = \mu(A)$, 且

$$l(f_0) = \int_\Omega g(x) f_0(x)\mathrm{d}x = \int_A |g(x)|\mathrm{d}x \geqslant (\|g; L^\infty(\Omega)\| - \varepsilon)\mu(A)$$
$$= (\|g; L^\infty(\Omega)\| - \varepsilon)\|f_0; L^1(\Omega)\|.$$

于是

$$\|l; (L^1(\Omega))'\| = \sup_{\substack{f \in L^1(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{|l(f)|}{\|f; L^1(\Omega)\|} \geqslant \frac{|l(f_0)|}{\|f_0; L^1(\Omega)\|}$$
$$\geqslant \|g; L^\infty(\Omega)\| - \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性可知

$$\|l; (L^1(\Omega))'\| \geqslant \|g; L^\infty(\Omega)\|. \tag{2.2.22}$$

此外, 由式 (2.2.20) 得出

$$|l(f)| \leqslant \|g; L^\infty(\Omega)\| \|f; L^1(\Omega)\|.$$

从而

$$\|l; (L^1(\Omega))'\| \leqslant \|g; L^\infty(\Omega)\|. \tag{2.2.23}$$

综合式 (2.2.22) 和式 (2.2.23) 推得式 (2.2.21) 成立. □

2.2.2 $L^p(\Omega)$ 空间的 Riesz 表示定理

定理 2.2.1($L^p(\Omega)$ 的 Riesz 表示定理) 设 $1 < p < \infty$, $l \in (L^p(\Omega))'$, 则存在唯一 $g \in L^{p'}(\Omega)$, 使得对一切 $f \in L^p(\Omega)$

$$l(f) = lg(f) = \int_\Omega g(x) f(x)\mathrm{d}x, \tag{2.2.24}$$

且

$$\|l; (L^p(\Omega))'\| = \|g; L^{p'}(\Omega)\|,$$

其中 p' 是 p 的共轭指数.

证明 若 $l = 0$, 取 $g = 0$, 定理成立. 若 $l \neq 0$, 其范数不为 1, 可取适当的常数 C, 使得 Cl 的范数为 1. 所以要证明此定理时, 先假定 $\|l; (L^p(\Omega))'\| = 1$. 由引理 2.2.2 推知, 存在 $f_0 \in L^p(\Omega)$, $\|f_0; L^p(\Omega)\| = 1$ 和 $l(f_0) = 1$. 作辅助函数

$$g_0(x) = \begin{cases} |f_0(x)|^{p-1}\mathrm{sign} f_0(x), & f_0(x) \neq 0, \\ 0, & f_0(x) = 0. \end{cases}$$

下证 $g_0(x)$ 就是定理中要求的 $g(x)$. 显然, $g_0 \in L^{p'}(\Omega)$ 和 $\|g_0\|_{p'} = 1$. 由函数 $g_0(x)$ 构造一个 $L^p(\Omega)$ 上的线性泛函

$$lg_0(f) = \int_\Omega g_0(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

显然成立 $lg_0(f_0) = 1$. 于是

$$\|lg_0; (L^p(\Omega))'\| = \|g_0; L^{p'}(\Omega)\| = 1,$$

从而线性泛函 l 和 lg_0 都满足引理 2.2.3 中的性质. 由唯一性知 $lg_0 = l$, 所以 $g_0(x)$ 就是定理中要找的 $g(x)$. □

定理 2.2.2 ($L^1(\Omega)$ 空间的 Riesz 表示定理)　设 $l \in (L^1(\Omega))'$, 则存在唯一的 $g \in L^\infty(\Omega)$ 满足

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^1(\Omega) \tag{2.2.25}$$

和

$$\|l; (L^1(\Omega))'\| = \|g; L^\infty(\Omega)\|. \tag{2.2.26}$$

证明　不妨再次假定 $l \neq 0$ 和 $\|l; (L^1(\Omega))'\| = 1$. 依 Ω 的测度分两种情况讨论.

(i) $\mu(\Omega)$ 为有限的情况. 应用定理 2.2.1 来证明此种情况. 设 n 是任一正整数, 取 $p_n = \dfrac{n+1}{n}$, 则 p_n 的共轭指数 $p_n' = n+1$ 且 $1 < p_n \leqslant 2$. 如果 $f \in L^{p_n}(\Omega)$, 则由 $\mu(\Omega)$ 的有界性和 Hölder 不等式, 可知

$$\begin{aligned}|l(f)| &\leqslant \|l; (L^1(\Omega))'\|\|f; L^1(\Omega)\| = \int_\Omega |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left[\int_\Omega |f(x)|^{p_n}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p_n}} \left[\int_\Omega \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p_n'}} \\ &= (\mu(\Omega))^{\frac{1}{n+1}}\|f\|_{p_n}.\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

由定理 2.1.10 有

$$L^{p_n}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega). \tag{2.2.28}$$

所以由式 (2.2.27) 和式 (2.2.28) 知, 我们可以把 $(L^1(\Omega))'$ 中的元素看成 $(L^{p_n}(\Omega))'$ 中的元素. 因此存在函数

$$g_n \in L^{p_n'}(\Omega) = L^{n+1}(\Omega)$$

满足

$$l(f) = \int_\Omega g_n(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^{p_n}(\Omega). \tag{2.2.29}$$

因为 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $L^{p_n}(\Omega)$ 中稠密, 又由于 n 的任意性, 并利用式 (2.2.29) 就成立

$$\int_\Omega g_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega g_m(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega),$$

即

$$\int_\Omega (g_n(x) - g_m(x))f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2.30}$$

因为 $g_n - g_m \in L^1(\Omega)$ 和 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中稠密, 由式 (2.2.30) 得到

$$g_n(x) = g_m(x), \quad \text{a.e.}. \tag{2.2.31}$$

因为 m 和 n 是任意的, 故在 Ω 中除去一个零测集外, 序列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 中的所有函数处处相等, 并用 $g(x)$ 记此函数. 下面证明 l 可用式 (2.2.25) 表示. 事实上, 在式 (2.2.29) 中以 $g \in L^{p_n'}(\Omega)$ 代替 $g_n(x)$, 得

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^{p_n}(\Omega).$$

由定理 2.2.1 ($L^p(\Omega)$ 的 Riesz 表示定理) 和式 (2.2.27) 推出

$$\|g; L^{p_n'}(\Omega)\| = \|l; (L^{p_n}(\Omega))'\| \leqslant (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p_n'}}.$$

再由定理 2.1.10(3) 知, $g \in L^\infty(\Omega)$. 利用 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中的稠密性, 所以泛函 l 可用式 (2.2.25) 表示. 易证 $g(x)$ 的唯一性.

现在证明式 (2.2.26). 利用式 (2.2.27), 有

$$\|l; (L^{p_n}(\Omega))'\| \leqslant (\mu(\Omega))^{\frac{1}{n+1}},$$

再由定理 2.2.1 知

$$\|l; (L^{p_n}(\Omega))'\| = \|g; L^{p_n'}(\Omega)\|,$$

于是

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|g; L^{p_n'}(\Omega)\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{n+1}} = 1.$$

利用定理 2.1.10(2), 推得

$$\|g; L^\infty(\Omega)\| = \lim_{n\to\infty} \|g; L^{p_n'}(\Omega)\| \leqslant 1 = \|l; (L^1(\Omega))'\|. \tag{2.2.32}$$

另外, 从 $l \in (L^1(\Omega))'$ 和 l 的表达式可见

$$\|l; (L^1(\Omega))'\| \leqslant \|g; L^\infty(\Omega)\|. \tag{2.2.33}$$

结合式 (2.2.32) 和式 (2.2.33) 得式 (2.2.26).

(ii) $\mu(\Omega)$ 为无限的情况. 作

$$\Omega_n = \{x \in \Omega |\ n-1 \leqslant |x| < n\},$$

可能某些 $\mu(\Omega_n) = 0$, 但不影响讨论. 显然 $\Omega_n \bigcap \Omega_m = \varnothing (n \neq m)$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ 和 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. 设 χ_{Ω_n} 表示 Ω_n 的特征函数. 如果 $f \in L^1(\Omega_n)$, 令

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega_n, \\ 0, & x \overline{\in} \Omega_n. \end{cases}$$

令 l_n 是 $L^1(\Omega_n)$ 上的泛函, 且由下式确定

$$l_n(f) = l(\widetilde{f}), \quad \forall f \in L^1(\Omega_n).$$

易证上面定义的泛函 l_n 是 $L^1(\Omega_n)$ 上的线性泛函, 则

$$l_n \in (L^1(\Omega_n))' \ \text{和} \ \|l_n; (L^1(\Omega_n))'\| \leqslant 1.$$

根据 (i) 知, 存在 $g_n \in L^\infty(\Omega_n)$, 使得

$$l_n(f) = \int_{\Omega_n} g_n(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

作定义在 Ω 上的函数 $g(x)$, 且 $g(x)$ 在 Ω_n 上的值与 $g_n(x)$ 一致. 于是

$$l_n(f) = \int_{\Omega} g(x) \widetilde{f}(x) \mathrm{d}x.$$

由于 $\|g_n; L^\infty(\Omega_n)\| \leqslant 1$, 因此 $\|g; L^\infty(\Omega)\| \leqslant 1$. 如果 $f \in L^1(\Omega)$, 则函数序列 $\left\{\sum_{i=1}^{m} \chi_{\Omega_i} f\right\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$. 事实上, 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} f(x)$, 则

$$|f(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\chi_{\Omega_n} f(x)|,$$

从而

$$\int_{\Omega} |f(x)| \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |\chi_{\Omega_n} f(x)| \mathrm{d}x.$$

因 $f \in L^1(\Omega)$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |\chi_{\Omega_n} f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛, 从而当 m 充分大时,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{m} \chi_{\Omega_n} f(x) \right| \mathrm{d}x &= \int_{\Omega} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} f(x) \right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{\Omega} |\chi_{\Omega_n} f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon. \end{aligned}$$

这样所证的结论成立. 因此函数序列 $\left\{g(x)\sum_{i=1}^{m}\chi_{\Omega_i}f(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于 $g(x)f(x)$. 于是当 $m\to\infty$ 时, 对等式

$$l\left(\sum_{n=1}^{m}\chi_{\Omega_n}f\right)=\sum_{n=1}^{m}l_n(\chi_{\Omega_n}f)=\int_\Omega\left(\sum_{n=1}^{m}\chi_{\Omega_n}f\right)g(x)\mathrm{d}x$$

取极限, 可推出

$$l(f)=\int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

类似于 $\mu(\Omega)$ 为有限情况, 可证式 (2.2.26) 成立和 $g(x)$ 的唯一性. □

当 $1<p<\infty$ 时, 定理 2.2.1 通过

$$lgf=\int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x,\quad \forall f\in L^p(\Omega),$$

解决了 $(L^p(\Omega))'$ 中的元素唯一地对应 $L^{p'}(\Omega)$ 中的元素. 因此 $(L^p(\Omega))'$ 与 $L^{p'}(\Omega)$ 建立了一一对应关系.

利用等距同构概念 (定义 1.2.7), 定理 2.2.1 和定理 2.2.2 可改写为如下.

定理 2.2.1′ 设 $1<p<\infty$, 则 $(L^p(\Omega))'$ 与 $L^{p'}(\Omega)$ 是等距同构的, 即 $(L^p(\Omega))'\cong L^{p'}(\Omega)$, 其中符号 $\cong$ 表示等距同构.

定理 2.2.2′ $(L^1(\Omega))'\cong L^\infty(\Omega)$.

定义 2.2.1 设 X 是线性赋范空间, X' 是 X 的对偶空间, 则当 $X=X''$ 时, 称 X 是自反的.

利用定理 2.2.1′ 可导出下面的定理.

定理 2.2.3 设 $1<p<\infty$, 则 $L^p(\Omega)$ 是自反空间.

证明 当 $1<p<\infty$ 时, 由定理 2.2.1′ 知

$$(L^p(\Omega))'\cong L^{p'}(\Omega),$$

$$(L^{p'}(\Omega))'\cong L^p(\Omega),$$

因此

$$(L^p(\Omega))''\cong L^p(\Omega),$$

所以 $L^p(\Omega)$ 是自反空间. □

由于 $L^1(\Omega)$ 是可分的, 而 $L^1(\Omega)$ 的对偶空间 $(L^1(\Omega))'$ 等距同构于 $L^\infty(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ 是不可分的, 所以 $L^1(\Omega)$ 和 $L^\infty(\Omega)$ 都是不可能自反的.

2.3 $L^p(\Omega)$ 空间的弱完备性

2.3.1 紧集的定义和关于强紧集定理

设 p 和 p' 是一对共轭指数, $1 \leqslant p < \infty$, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开集. 在第 1 章中介绍了赋范空间 X 中有两种收敛概念, 即强收敛和弱收敛. $L^p(\Omega)$ 空间的强收敛就是依 $L^p(\Omega)$ 空间范数的收敛. 而根据定义 1.2.12 和 $L^p(\Omega)$ 的 Riesz 表示定理, $L^p(\Omega)$ 中的序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 称为弱收敛于 $f \in L^p(\Omega)$, 如果满足

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

在强收敛意义下已证明 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是一 Banach 空间. 由 $L^p(\Omega)$ 内的两种收敛概念得出两种紧集的概念. 下面给出强紧集与弱紧集的定义.

定义 2.3.1 函数集合 $M \subset L^p(\Omega)$ 称为强紧的, 如果能从 M 的任意无穷序列中选出强收敛的子序列.

定义 2.3.2 函数集合 $M \subset L^p(\Omega)$ 称为弱紧的, 如果能从 M 的任意无穷序列中选出弱收敛的子序列.

由定理 1.2.6 知, 强收敛蕴涵弱收敛, 由此导出强紧集一定是弱紧集.

定理 2.3.1 设 $1 \leqslant p < \infty$, 集合 $M \subset L^p(\Omega)$ 是强紧的充分必要条件是

(1) 集合 M 在 $L^p(\Omega)$ 中有界, 即存在常数 K 满足

$$\|f\|_p \leqslant K, \quad \forall f \in M;$$

(2) 集合 M 在 $L^p(\Omega)$ 中是等度整体连续的, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta(\varepsilon) > 0$, 只要 $|y| < \delta(\varepsilon)$, 便成立

$$\left[\int_\Omega |\widetilde{f}(x+y) - \widetilde{f}(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall f \in M,$$

其中 $\widetilde{f}(x)$ 表示 $f(x)$ 在 Ω 外的零延拓 (见定理 2.1.22 中的 $\widetilde{f}(x)$).

2.3.2 $L^p(\Omega)$ 空间的弱完备性与弱紧集定理

特别注意, $L^p(\Omega)$ 空间在弱收敛意义下也是完备的. 而且还有一个重要定理是: 当 $1 < p < \infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 中的集合是弱紧的充要条件是它有界. 为证明以上问题, 先证明一个辅助定理.

定理 2.3.2 若 $L^p(\Omega)(1 < p < \infty)$ 上的线性泛函序列

$$l_1, l_2, \cdots, l_k, \cdots \tag{2.3.1}$$

无界, 即在 $L^p(\Omega)$ 空间的单位球上可取任意大的值, 则必存在元素 $\omega_0 \in L^p(\Omega)$, 使得这个序列在其上发散.

证明 证明的思想是, 从泛函序列 (2.3.1) 中抽出一个子序列

$$m_1, m_2, \cdots, m_s, \cdots, \tag{2.3.2}$$

其中

$$m_s = l_{k_s} \quad (s = 1, 2, \cdots), \quad \text{当 } s \to \infty \text{ 时}, \quad k_s \to \infty,$$
$$m_s\varphi = \int_\Omega \psi_s(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \psi_s \in L^{p'}(\Omega), \tag{2.3.3}$$

其中 p' 和 p 是一对共轭指数. 设 $\omega_s(x) = \dfrac{|\psi_s(x)|^{p'-1}\mathrm{sign}\psi_s(x)}{\|\psi_s\|_{p'}^{p'-1}}$. 显然

$$\omega_s \in L^p(\Omega), \quad \|\omega_s\|_p = 1, \quad m_s\omega_s = \|\psi_s\|_{p'}.$$

由函数 $\omega_s(x)$ 构造级数

$$\omega_0(x) = \sum_{s=1}^\infty a_s\omega_s(x), \tag{2.3.4}$$

其中 $a_s = \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}}$. 由于 $\|a_s\omega_s\|_p = \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}}\|\omega_s\|_p = \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}}$, 如果级数 $\sum\limits_{s=1}^\infty \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}}$ 收敛, 则级数 (2.3.4) 在 $L^p(\Omega)$ 中也收敛. 为此, 我们将要证明在适当选取 $\{m_s\}_{s=1}^\infty$ 的条件下, 也就是在适当选取 $\psi_s(x)$ 的条件下, 级数 (2.3.4) 在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛于元素 $\omega_0(x)$, 因而可证明 $l_k\omega_0$ 发散.

我们将归纳地构造序列 $\{m_s\}_{s=1}^\infty$. 设 m_s 已选出 (随之 $\psi_s(x)$ 已定), 下面指出应当如何选取 m_{s+1}. 考虑泛函序列 $l_1(\omega_s), l_2(\omega_s), \cdots, l_j(\omega_s), \cdots$. 若它无界, 则定理得证. 若此序列有界, 则令

$$A_s = \sup_{\substack{k=1,2,\cdots,s \\ j=1,2,\cdots}} |l_j(\omega_k)|.$$

于是 $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_s < \infty$. 序列 (2.3.1) 中的每个泛函 l_k 对应于 $\psi_k \in L^{p'}(\Omega)$, 使得 l_k 的范数等于 $\|\psi_k\|_{p'}$. 因为序列 (2.3.1) 无界, 从而 $\{\|\psi_k\|_{p'}\}_{k=1}^\infty$ 也无界, 故可选出某 l_k 作为 m_{s+1}, 使得下列不等式成立

$$\|\psi_s\|_{p'} > 1, \quad s = 1, 2, \cdots, \tag{2.3.5}$$

$$\|\psi_{s+1}\|_{p'}^{\frac{1}{2}} > 4(A_1 + A_2 + \cdots + A_s), \tag{2.3.6}$$

$$\|\psi_{s+1}\|_{p'} > 3^{2(s+1-j)}\|\psi_j\|_{p'} \quad (j \leqslant s). \tag{2.3.7}$$

根据式 (2.3.5) 和式 (2.3.7) 有

$$\|\psi_s\|_{p'} > 3^{2(s-1)}, \tag{2.3.8}$$

由此可见级数 $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_s = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}}$ 收敛. 事实上, 从式 (2.3.8) 得到

$$\|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{3^{(s-1)}}.$$

于是可知 $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_s$ 收敛. 所以级数 (2.3.4) 在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛. 下面证明 $l_k(\omega_0)$ 发散. 我们有

$$\begin{aligned}|m_s\omega_0| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j m_s\omega_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{s-1} a_j m_s\omega_j + a_s m_s\omega_s + \sum_{j=s+1}^{\infty} a_j m_s\omega_j\right| \\ &\geqslant a_s m_s\omega_s - \left|\sum_{j=1}^{s-1} a_j m_s\omega_j\right| - \left|\sum_{j=s+1}^{\infty} a_j m_s\omega_j\right|.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

下面对式 (2.3.9) 右端的三项进行估计可见

$$\begin{aligned}a_s m_s\omega_s &= \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} m_s \frac{|\psi_s(x)|^{p'-1}\mathrm{sign}\psi_s(x)}{\|\psi_s\|_{p'}^{p'-1}} \\ &= \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} \int_\Omega \psi_s(x) \frac{|\psi_s(x)|^{p'-1}\mathrm{sign}\psi_s(x)}{\|\psi_s\|_{p'}^{p'-1}} \mathrm{d}x \\ &= \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} \|\psi_s\|_{p'} = \|\psi_s\|_{p'}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

根据式 (2.3.5) 和式 (2.3.6) 推出

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{s-1} a_j m_s\omega_j\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{s-1} \|\psi_j\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} |m_s\omega_j| < \sum_{j=1}^{s-1} |m_s\omega_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{s-1} A_j \leqslant \frac{1}{4}\|\psi_s\|_{p'}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

将式 (2.3.7) 中的 j 和 s 互换, 得

$$\|\psi_{j+1}\|_{p'} > 3^{2(j+1-s)}\|\psi_s\|_{p'}, \quad j > s.$$

于是在上式中以 j 代替 $j+1$, 则有

$$a_j = \|\psi_j\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{3^{j-s}}\|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}}, \quad j > s,$$

由此和利用 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=s+1}^{\infty} a_j m_s \omega_j\right| &\leqslant \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{1}{3^{j-s}} \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} |m_s \omega_j| \\ &= \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{1}{3^{j-s}} \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} \left|\int_\Omega \frac{|\psi_j(x)|^{p'-1} \text{sign}\psi_j(x)}{\|\psi_j\|_{p'}^{p'-1}} \psi_s(x) \mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{1}{3^{j-s}} \|\psi_s\|_{p'}^{-\frac{1}{2}} \|\psi_s\|_{p'} = \frac{1}{2} \|\psi_s\|_{p'}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

所以由式 (2.3.8)∼ 式 (2.3.12) 导出

$$|m_s \omega_0| > \|\psi_s\|_{p'}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\|\psi_s\|_{p'}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\|\psi_s\|_{p'}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\|\psi_s\|_{p'}^{\frac{1}{2}} > \frac{3^{s-1}}{4},$$

由此可见, 当 k 增加时, $l_k(\omega_0)$ 不可能趋于任何极限. □

注 2.3.1 定理 2.3.2 可以用泛函弱收敛的术语表达为: 依范数无界的泛函序列不可能弱收敛.

定理 2.3.3 设 $1 < p < \infty$ 和 p' 是 p 的共轭指数. $L^{p'}(\Omega)$ 空间, 即 $L^p(\Omega)$ 上的线性泛函空间, 在弱收敛 (弱 $*$ 收敛) 意义下是完备的. 换言之, 任何弱收敛 (弱 $*$ 收敛) 的泛函序列以线性泛函为极限.

证明 根据定理 2.3.2, 当线性泛函序列 $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛, 则它不可能无界. 设 $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ 弱收敛于 l_0, 从而对任意的 $\varphi \in L^p(\Omega)$ 成立

$$|l_0(\varphi)| = |\lim_{k\to\infty} l_k(\varphi)| = \lim_{k\to\infty} |l_k(\varphi)| \leqslant K\|\varphi\|_p,$$

其中 K 是所有 l_k 范数的上界. 这样一来, 泛函 l_0 就是有界的, 从而是连续的. 可加性显然. 所以 l_0 是线性泛函. □

注 2.3.2 设 $1 < p < \infty$, 则 $L^p(\Omega)$ 在弱收敛意义下是完备的.

定理 2.3.4 设 $1 < p < \infty$. 集合 $M \subset L^p(\Omega)$ 是弱紧的充要条件是它有界.

证明 必要性. 条件的必要性由 $L^p(\Omega)$ 空间的弱完备性推出. 事实上, 若集合 M 无界, 则从中可选出序列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得当 $k \to \infty$ 时, $\|\varphi_k\|_p \to \infty$. 根据注 2.3.1, 从这个序列中不可能抽出弱收敛的子序列, 因而集合 M 不是弱紧的, 这与假定 M 是弱紧集矛盾, 所以 M 有界.

充分性. 设对一切 $\varphi \in M \subset L^p(\Omega)$, 均有

$$\|\varphi\|_p < K. \tag{2.3.13}$$

考虑 $L^p(\Omega)$ 的对偶空间 $L^{p'}(\Omega)$, 则它是可分的. 用

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_k(x), \cdots \tag{2.3.14}$$

表示 $L^{p'}(\Omega)$ 中的可数处处稠密网. 设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ 是任一无穷序列. 要证明从它之中可以抽出弱收敛的子序列. 取 $\psi_1(x)$, 并构造数序列

$$\langle\varphi_k, \psi_1\rangle = \int_\Omega \varphi_k(x)\psi_1(x)\mathrm{d}x = a_k^{(1)}.$$

这个数序列是有界的, 即

$$|a_k^{(1)}| \leqslant \|\varphi_k\|_p \|\psi_1\|_{p'} \leqslant K\|\psi_1\|_{p'},$$

于是从中可以抽出对应于子序列

$$\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(1)}(x), \cdots, \varphi_k^{(1)}(x), \cdots$$

的收敛子序列, 并且当 $k \to \infty$ 时,

$$\int_\Omega \varphi_k^{(1)}(x)\psi_1(x)\mathrm{d}x \to a^{(1)}.$$

取 $\psi_2(x)$, 数序列 $a_k^{(2)} = \langle\varphi_k^{(1)}, \psi_2\rangle$ 也是有界的, 从中又可抽出对应于子序列

$$\varphi_1^{(2)}(x), \varphi_2^{(2)}(x), \cdots, \varphi_k^{(2)}(x), \cdots$$

的收敛子序列, 且当 $k \to \infty$ 时,

$$\int_\Omega \varphi_k^{(2)}(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x \to a^{(2)}.$$

继续这一过程, 我们便得到一列收敛数序列 $\{a_k^{(s)}\}_{k=1}^{\infty}$ 和与之相应的函数序列 $\{\varphi_k^{(s)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$; 这些函数序列都是 $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 的部分序列, 后一个为前一个的子序列: $\{\varphi_k^{(s)}(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\varphi_k^{(s-1)}(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset \cdots \subset \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, 且当 $k \to \infty$ 时,

$$a_k^{(s)} = \int_\Omega \varphi_k^{(s)}(x)\psi_s(x)\mathrm{d}x \to a^{(s)}, \quad s = 1, 2, \cdots.$$

应用对角线法则, 从它们中可以抽出序列 $\{\varphi_k^{(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, 在整个可数处处稠密网 $\{\psi_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ 上弱收敛, 即当 $k \to \infty$ 时,

$$l_k\psi_s = \int_\Omega \varphi_k^{(k)}(x)\psi_s(x)\mathrm{d}x \to a^{(s)} = l\psi_s, \quad s = 1, 2, \cdots,$$

且

$$|l\psi_s| \leqslant K\|\psi_s\|_{p'}. \tag{2.3.15}$$

$\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在集合 $\{\psi_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ 上的收敛蕴涵处处收敛. 事实上, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 任意元素 $\psi \in L^{p'}(\Omega)$ 可以表示为如下形式

$$\psi(x)=\psi_s(x)+\overline{\psi}(x),$$

其中 $\|\overline{\psi}\|_{p'}<\varepsilon$, 而 $\psi_s(x)$ 是属于可数处处稠密网 (2.3.14) 中的. 于是由全部 l_k 的有界性推出对于任意的 k 和 m 均成立

$$\begin{aligned}|l_k\psi-l_k\psi_s|&=\left|\int_\Omega\varphi_k^{(k)}(x)(\psi(x)-\psi_s(x))\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\|\varphi_k^{(k)}\|_p\|\psi-\psi_s\|_{p'}<K\varepsilon\end{aligned}$$

和

$$|l_m\psi-l_m\psi_s|<K\varepsilon.$$

另外,

$$\begin{aligned}|l_m\psi-l_k\psi|\leqslant&|l_m\psi-l_m\psi_s|+|l_m\psi_s-l_k\psi_s|\\&+|l_k\psi_s-l_k\psi|\leqslant|l_k\psi_s-l_m\psi_s|+2K\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ 在集合 $\{\psi_s\}_{s=1}^\infty$ 上收敛, 所以当 m 和 k 充分大时, 得到

$$|l_m\psi-l_k\psi|<3K\varepsilon,$$

由此立即推出泛函序列 $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ 在 ψ 上的收敛性. 按早先所证, 极限 $l\psi$ 是 $L^{p'}(\Omega)$ 上的线性泛函, $l\in L^p(\Omega)$, 因而我们将它表示为

$$l\psi=\int_\Omega\varphi_0\psi\mathrm{d}x$$

的形式. 这样一来, 对于任意的 $\psi\in L^{p'}(\Omega)$, 有当 $k\to\infty$ 时,

$$\int_\Omega\varphi_k^{(k)}(x)\psi(x)\mathrm{d}x\to\int_\Omega\varphi_0(x)\psi(x)\mathrm{d}x,$$

从而对 $L^{p'}(\Omega)$ 中的任意泛函, 有 $l\varphi_k^{(k)}\to l\varphi_0$. 因此集合 M 是弱紧的. □

2.4 弱 $L^p(\Omega)$ 空间、Marcinkiewicz 插值定理

因为以后证明索伯列夫空间的嵌入定理时, 要用到 Marcinkiewicz 插值定理. 同时还需要引入弱 $L^p(\Omega)$ 空间、次线性算子、强型算子和弱型算子概念.

2.4.1 弱 $L^p(\Omega)$ 空间、次线性算子、强型算子和弱型算子

定义 2.4.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域和 $f(x)$ 是定义在 Ω 上的可测函数. 对于 $\lambda\geqslant0$, 令

$$\Omega_{f,\lambda}=\{x\in\Omega||f(x)|>\lambda\},$$

并称

$$f_*(\lambda) = \mu(\Omega_{f,\lambda})$$

为 $f(x)$ 的分布函数, 其中 μ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的 Lebesgue 测度.

关于分布函数 $f_*(\lambda)$ 我们列出以下性质:

(1) 如果在 Ω 上几乎处处 $|f(x)| \leqslant |g(x)|$, 则对于 $\lambda \geqslant 0$ 有 $f_*(\lambda) \leqslant g_*(\lambda)$;

(2) $f_*(\lambda)$ 是递减的且在 $[0,\infty)$ 上为右连续函数.

事实上, 显然, 对于 $\lambda \geqslant 0$, $f_*(\lambda)$ 是递减的. 设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ 是递减正数序列且以 λ 为极限, 则

$$\Omega_{f,\lambda} = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_{f,\lambda_n}.$$

由于 $\{\Omega_{f,\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ 是递增集合序列, 故知

$$\lim_{n\to\infty} f_*(\lambda_n) = f_*(\lambda).$$

这说明 $f_*(\lambda)$ 是右连续函数.

(3) 如果 $|f(x)|$ 是一递增函数序列 $\{|f_j(x)|\}_{j=1}^\infty$ 在每一点 x 的极限, 则由 $|f(x)| > \lambda$ 推出对于某个 j, $|f_j(x)| > \lambda$, 所以 $\Omega_{f,\lambda} = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_{f_j,\lambda}$. 因此 $\lim_{j\to\infty} (f_{j*})(\lambda) = f_*(\lambda)$.

(4) 如果 $|f(x) + g(x)| > \lambda$, 则或 $|f(x)| > \dfrac{\lambda}{2}$ 或 $|g(x)| > \dfrac{\lambda}{2}$ (或是两者), 所以 $\Omega_{f+g,\lambda} \subset \Omega_{f,\frac{\lambda}{2}} + \Omega_{g,\frac{\lambda}{2}}$, 因此

$$(f+g)_*(\lambda) \leqslant f_*\left(\frac{\lambda}{2}\right) + g_*\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{2.4.1}$$

(5) 设对于某个 $p(0<p<\infty)$, $f \in L^p(\Omega)$, 则对于 $\lambda > 0$ 有

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega_{f,\lambda}} |f(x)|^p \mathrm{d}x \geqslant \lambda^p \mu(\Omega_{f,\lambda}). \tag{2.4.2}$$

由式 (2.4.2) 得 Chebyshev 不等式

$$f_*(\lambda) = \mu(\Omega_{f,\lambda}) \leqslant \lambda^{-p}\|f\|_p^p.$$

定理 2.4.1(单调收敛定理)　设 $A \subset \mathbb{R}^N$ 是可测集, 而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是一可测函数序列, 对所有 $x \in A$ 满足 $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\mathrm{d}x = \int_A \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

引理 2.4.1 设 $f(x)$ 是 Ω 上的可测函数且 $0<p<\infty$, 则

$$\|f\|_p^p=\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x=p\int_0^\infty \lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{2.4.3}$$

证明 先假定 $|f(x)|$ 是一简单函数, 即在 $A_j\subset\Omega$ 上

$$|f(x)|=a_j,\quad 1\leqslant j\leqslant k,$$

其中 $0<a_1<a_2<\cdots<a_k$ 和 $A_i\bigcap A_j$ 对于 $i\neq j$ 是空集, 则

$$f_*(\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^k\mu(A_i), & \lambda<a_1,\\ \displaystyle\sum_{i=j}^k\mu(A_i), & a_{j-1}\leqslant\lambda<a_j\ (2\leqslant j\leqslant k),\\ 0, & \lambda\geqslant a_k.\end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned}p\int_0^\infty\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda&=p\left(\int_0^{a_1}+\sum_{j=2}^k\int_{a_{j-1}}^{a_j}+\int_{a_k}^\infty\right)\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=a_1^p\sum_{j=1}^k\mu(A_j)+\sum_{j=2}^k(a_j^p-a_{j-1}^p)\sum_{i=j}^k\mu(A_i)\\&=\sum_{j=1}^k a_j^p\mu(A_j)=\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

所以式 (2.4.3) 对简单函数成立. 根据定理 2.1.11, 如果 $f(x)$ 是一可测函数, 则 $|f(x)|$ 是一非负单调增加简单函数序列的极限. 再由定理 2.4.1 知式 (2.4.3) 成立. □

定义 2.4.2 设 $f(x)$ 是 Ω 上的可测函数, $0<p<\infty$,

$$[f]_p=[f]_{p,\Omega}=\left(\sup_{\lambda>0}\lambda^pf_*(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}},$$

并记 $[f]_p<\infty$ 的 $f(x)$ 的全体为 $L_*^p(\Omega)$, 称其为弱 $L^p(\Omega)$ 空间; 又认定 $p=\infty$ 时 $L_*^\infty(\Omega)=L^\infty(\Omega)$.

显然, 由不等式 (2.4.2) 可知 $L^p(\Omega)\subset L_*^p(\Omega)$. 然而反之则不成立, 例如, $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}$, $0<p<\infty$ 和 $\Omega=(0,\infty)$. 我们有

$$f_*(\lambda)=\mu(\{x\in(0,\infty)|x^{-\frac{1}{p}}>\lambda\})=\lambda^{-p},$$

即 $\lambda^pf_*(\lambda)=1$. 所以 $f\in L_*^p(\Omega)$. 然而若以

$$f_*(\lambda)=\lambda^{-p}$$

代入 $\|f\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, 则得 $\|f\|_p^p = \infty$.

容易验证 $[f]_p$ 满足范数的正定性和齐次性公理, 但是因为 $[f]_p$ 不满足三角不等式公理, 所以 $L_*^p(\Omega)$ 不是线性赋范空间. 但是根据不等式 (2.4.1) 和 C_p 不等式可得

$$\begin{aligned}
[f+g]_p &= \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p (f+g)_*(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \left(f_*\left(\frac{\lambda}{2}\right) + g_*\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(2^p \sup_{\lambda>0} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^p f_*\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2^p \sup_{\lambda>0} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^p g_*\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} = 2\left([f]_p + [g]_p\right).
\end{aligned}$$

泛函 $[\cdot]_p$ 虽然不满足三角不等式, 但具有范数的其他性质. 如果用弱形式 $[f+g]_p \leqslant 2([f]_p + [g]_p)$ 来代替三角不等式, 称 $[f]_p$ 为 f 的拟范数, 从而知 $p>1$ 时 $L_*^p(\Omega)$ 是线性拟赋范空间.

定义 2.4.3　称映可测函数的线性空间 X 到另一这样的空间 Y 的算子 L 为次线性算子, 如果对于所有的 $f, g \in X$ 和常数 C 满足

$$\begin{aligned}
|L(f+g)(x)| &\leqslant |Lf(x)| + |Lg(x)|, \\
|L(Cf)(x)| &= |C||Lf(x)|.
\end{aligned}$$

映 X 到 Y 的线性算子无疑是次线性算子.

下面讨论定义在 $\mathbb{R}^N$ 中的区域 Ω 上的 $L^p(\Omega)$ 空间到 $L^q(\Omega')$ (或 $L_*^q(\Omega')$) 的算子, 其中 Ω' 是 $\mathbb{R}^k$ 中的区域, k 不必等于 N. 现在给出强 (p,q) 型算子和弱 (p,q) 型算子的定义.

定义 2.4.4　设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 和 $1 \leqslant q \leqslant \infty$. 算子 L 称为强 (p,q) 型, 如果 L 映 $L^p(\Omega)$ 到 $L^q(\Omega')$ 和存在常数 $K_{p,q}$, 使得对于所有 $f \in L^p(\Omega)$, 有

$$\|Lf\|_{q,\Omega'} \leqslant K_{p,q}\|f\|_{p,\Omega},$$

其中 $K_{p,q}$ 的最小者称为 L 的 (界型) 常数 (或记为 $\|L\|$).

称算子 L 为弱 (p,q) 型, 如果 L 映 $L^p(\Omega)$ 到 $L_*^q(\Omega')$ 和存在常数 $K_{p,q}$, 使得对所有 $f \in L^p(\Omega)$

$$[Lf]_{q,\Omega'} \leqslant K_{p,q}\|f\|_{p,\Omega},$$

其中 $K_{p,q}$ 的最小者称为 L 的 (界型) 常数.

我们也知道如果 L 是强 (p,∞) 型算子, 则 L 是弱 (p,∞) 型算子. 强 (p,q) 型推出弱 (p,q) 型, 反之不成立, 除非 $q=\infty$.

2.4.2 Marcinkiewicz 插值定理

因为证明 Marcinkiewicz 插值定理, 需要 Minkowski 积分不等式, 所以先介绍此不等式.

现在考虑基本公式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N+m}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (2.4.4)\end{aligned}$$

定理 2.4.2 (Tonelli 定理) 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{N+m}$ 上的可测函数, 则下列两个条件是等价的:

(1) 函数 $f(x,y)$ 是可积的.

(2) 如果 $f(x,y)$ 用 $|f(x,y)|$ 替代, 即 $\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ 或 $\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ 存在, 在基本公式 (2.4.4) 中的累次积分至少有一个存在.

如果条件 (2) 满足, 那么 Fubini 定理的所有结论都成立.

2.4.3 Minkowski 积分不等式

定理 2.4.3 (Minkowski 积分不等式) 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^m$ 上的可测函数. 若对于几乎处处 $y\in\mathbb{R}^m$, 函数 $f(\cdot,y)\in L^P(\mathbb{R}^N)$, 且函数 $y\mapsto\|f(\cdot,y)\|_{p,\mathbb{R}^N}$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^m)$, 则对于几乎处处的 x, $f(x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^m)$, x 的函数 $\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}y$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 和

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y,$$

即

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot,y)\mathrm{d}y\right\|_{p,\mathbb{R}^N}\leqslant\int_{\mathbb{R}^m}\|f(\cdot,y)\|_{p,\mathbb{R}^N}\mathrm{d}y. \qquad (2.4.5)$$

证明 当 $p=1$ 时, 仅仅是 Tonelli 定理. 如果 $1<p<\infty$, 令 p' 是 p 的共轭指数. 记

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

考虑线性泛函

$$l_F\varphi=\int_{\mathbb{R}^N} F(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi\in L^{p'}(\mathbb{R}^N).$$

我们有

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}|F(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}=\|F\|_{p,\mathbb{R}^N}=\sup_{\substack{\varphi\in L^{p'}(\mathbb{R}^N)\\ \|\varphi\|_{p',\mathbb{R}^N}=1}}\left|\int_{\mathbb{R}^N}F(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|. \tag{2.4.6}$$

应用 Fubini 定理以及 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}F(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^m}f(x,y)\mathrm{d}y\right||\varphi(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right\}|\varphi(x)|\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^m}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|f(x,y)||\varphi(x)|\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^m}\|f(\cdot,y)\|_{p,\mathbb{R}^N}\|\varphi\|_{p',\mathbb{R}^N}\mathrm{d}y. \end{aligned}\tag{2.4.7}$$

将式 (2.4.7) 代入式 (2.4.6), 立得 $1<p<\infty$ 的式 (2.4.5).

当 $p=\infty$ 时, 式 (2.4.5) 是积分单调性的一个推论. □

注 2.4.1 定理 2.4.3 中的 $\mathbb{R}^m$ 取为区间 $\Omega\subset[0,\infty)$, 定理 2.4.3 仍成立.

定理 2.4.4 (Marcinkiewicz 插值定理[29,30]) 设 $1\leqslant p_1\leqslant q_1<\infty$ 和 $1\leqslant p_2\leqslant q_2\leqslant\infty$, 且 $q_1<q_2$. 又设 p 和 q 满足

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_1}+\frac{\theta}{q_2},$$

其中 $0<\theta<1$. 令 Ω 和 Ω' 分别是 $\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbb{R}^k$ 中的区域; k 可以等于 N 或者不等于 N. 又令 L 是从 $L^{p_1}(\Omega)+L^{p_2}(\Omega)$ 到定义在 Ω' 上的可测函数空间的次线性算子. 若 L 是弱 (p_1,q_1) 型, 又是弱 (p_2,q_2) 型, 则 L 是强 (p,q) 型, 即如果

$$[Lf]_{q_j,\Omega'}\leqslant K_j\|f\|_{p_j,\Omega},\quad j=1,2, \tag{2.4.8}$$

则

$$\|Lf\|_{q,\Omega'}\leqslant K\|f\|_{p,\Omega}, \tag{2.4.9}$$

其中常数 K 仅依赖于 p,p_1,q_1,p_2,q_2,K_1 和 K_2.

证明 首先, 考虑 $q_1<q<q_2<\infty$ 的情形. 于是 p_1 和 p_2 两者都必须是有限的. 由满足 p 和 q 的条件推出 $\left(\dfrac{1}{p},\dfrac{1}{q}\right)$ 是 (p,q) 平面上连接 (p_1^{-1},q_1^{-1}) 和 (p_2^{-1},q_2^{-1}) 线段的一内点. 令 C 是此线段的斜率乘以 $\dfrac{q}{p}$ 的实数, 即

$$C=\frac{p_1(q_1-q)}{q_1(p_1-p)}=\frac{p_2(q_2-q)}{q_2(p_2-p)}. \tag{2.4.10}$$

对于任意给定的实数 $\Lambda > 0$, 定义在 Ω 上的可测函数 $f(x)$ 可以写成定义为 "小" 部分

$$f_{S,\Lambda}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } |f(x)| \leqslant \Lambda \text{ 时}, \\ \Lambda \dfrac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{当 } |f(x)| > \Lambda \text{ 时} \end{cases}$$

和 "大" 部分

$$f_{B,\Lambda}(x) = f(x) - f_{S,\Lambda}(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |f(x)| \leqslant \Lambda \text{ 时}, \\ f(x)\left(1 - \dfrac{\Lambda}{|f(x)|}\right), & \text{当 } |f(x)| > \Lambda \text{ 时} \end{cases}$$

之和. 因为对于所有 $x \in \Omega$, $|f_{S,\Lambda}(x)| \leqslant \Lambda$ 和 $|f_{B,\Lambda}(x)| = \max\{0, |f(x)| - \Lambda\}$, $f_{S,\Lambda}(x)$ 和 $f_{B,\Lambda}(x)$ 的分布函数分别由

$$(f_{S,\Lambda})_*(\lambda) = \begin{cases} f_*(\lambda), & \text{当 } \lambda < \Lambda \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } \lambda \geqslant \Lambda \text{ 时} \end{cases}$$

和

$$(f_{B,\Lambda})_*(\lambda) = f_*(\lambda + \Lambda)$$

给出. 由式 (2.4.3) 导出

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_{S,\Lambda}(x)|^{p_2} \mathrm{d}x &= p_2 \int_0^\infty \lambda^{p_2 - 1} (f_{S,\Lambda})_*(\lambda) \mathrm{d}\lambda \\ &= p_2 \int_0^\Lambda \lambda^{p_2 - 1} f_*(\lambda) \mathrm{d}\lambda, \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_{B,\Lambda}(x)|^{p_1} \mathrm{d}x &= p_1 \int_0^\infty \lambda^{p_1 - 1} (f_{B,\Lambda})_*(\lambda) \mathrm{d}\lambda \\ &= p_1 \int_0^\infty \lambda^{p_1 - 1} f_*(\lambda + \Lambda) \mathrm{d}\lambda \\ &= p_1 \int_\Lambda^\infty (\lambda - \Lambda)^{p_1 - 1} f_*(\lambda) \mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant p_1 \int_\Lambda^\infty \lambda^{p_1 - 1} f_*(\lambda) \mathrm{d}\lambda. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

利用式 (2.4.3), L 是次线性算子和式 (2.4.1) 得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |Lf(y)|^q \mathrm{d}y =& q \int_0^\infty \lambda^{q-1} (Lf)_*(\lambda) \mathrm{d}\lambda \\ =& 2^q q \int_0^\infty \lambda^{q-1} (Lf)_*(2\lambda) \mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2^q q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}(L(f_{S,\Lambda}+f_{B,\Lambda}))_*(2\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&\leqslant 2^q q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}(Lf_{S,\Lambda})_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&\quad+2^q q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}(Lf_{B,\Lambda})_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \qquad (2.4.13)
\end{aligned}
$$

不等式 (2.4.13) 对于任意的 $\Lambda>0$ 成立. 如果我们希望选择 Λ 依赖于 λ, 则令 $\Lambda=\lambda^C$, 其中 C 是由式 (2.4.10) 确定的实数. 对于正的 s 由 $[\cdot]_s$ 的定义推出 $(Lf_{S,\Lambda})_*(\lambda)\leqslant\lambda^{-q_2}[Lf_{S,\Lambda}]_{q_2}^{q_2}$. 利用此不等式, 式 (2.4.11) 和给定的估计 $[Lv]_{q_2,\Omega'}\leqslant K_2\|v\|_{p_2,\Omega}$ 有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}(Lf_{S,\Lambda})_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda&\leqslant\int_0^{\infty}\lambda^{q-1-q_2}[Lf_{S,\Lambda}]_{q_2}^{q_2}\mathrm{d}\lambda\\
&\leqslant\int_0^{\infty}\lambda^{q-1-q_2}(K_2\|f_{S,\Lambda}\|_{p_2})^{q_2}\mathrm{d}\lambda\\
&\leqslant K_2^{q_2}p_2^{\frac{q_2}{p_2}}\int_0^{\infty}\lambda^{q-1-q_2}\left[\int_0^{\lambda^C}\tau^{p_2-1}f_*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{q_2}{p_2}}\mathrm{d}\lambda\\
&=K_2^{q_2}p_2^{\frac{q_2}{p_2}}I^*.
\end{aligned}
$$

因为 $q_2\geqslant p_2$, 我们能够用定理 2.4.3 和式 (2.4.3) 估计上面的累次积分 I^*.

$$
\begin{aligned}
I^*&=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\lambda^C}\lambda^{(q-1-q_2)\left(\frac{p_2}{q_2}\right)}\tau^{p_2-1}f_*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{q_2}{p_2}}\mathrm{d}\lambda\\
&\leqslant\left[\int_0^{\infty}\left(\int_{\tau^{\frac{1}{C}}}^{\infty}\lambda^{q-1-q_2}(\tau^{p_2-1}f_*(\tau))^{\frac{q_2}{p_2}}\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{q_2}{p_2}}\\
&=\left[\int_0^{\infty}\tau^{p_2-1}f_*(\tau)\left(\int_{\tau^{\frac{1}{C}}}^{\infty}\lambda^{q-1-q_2}\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{q_2}{p_2}}\\
&=\left[\frac{1}{(q_2-q)^{\frac{p_2}{q_2}}}\int_0^{\infty}\tau^{p_2-1+\left[\frac{q-q_2}{C}\right]\frac{p_2}{q_2}}f_*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{q_2}{p_2}}\\
&=\left(\frac{1}{(q_2-q)^{\frac{p_2}{q_2}}}\int_0^{\infty}\tau^{p-1}f_*(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{q_2}{p_2}}=\left(\frac{1}{p(q_2-q)^{\frac{p_2}{q_2}}}\|f\|_{p,\Omega}^p\right)^{\frac{q_2}{p_2}}.
\end{aligned}
$$

于是可知

$$
2^q q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}(Lf_{S,\Lambda})_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda\leqslant 2^q qK_2^{q_2}\left(\frac{p_2}{p(q_2-q)^{\frac{p_2}{q_2}}}\|f\|_{p,\Omega}^p\right)^{\frac{q_2}{p_2}}. \qquad (2.4.14)
$$

同理用 $q_1 < q$ 替代 $q_2 > q$ 可得

$$2^q q \int_0^\infty \lambda^{q-1}(Lf_{B,\Lambda})_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda \leqslant 2^q q K_1^{q_1} \left(\frac{p_1}{p(q-q_1)^{\frac{p_1}{q_1}}}\|f\|_{p,\Omega}^p\right)^{\frac{q_1}{p_1}}. \tag{2.4.15}$$

如果 $\|f\|_{p,\Omega} = 1$, 则由式 (2.4.13)～ 式 (2.4.15) 导出

$$\|Lf\|_{q,\Omega'} \leqslant K = 2q^{\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{p_2 K_2^{p_2}}{p(q_2-q)^{\frac{p_2}{q_2}}}\right)^{\frac{q_2}{p_2}} + \left(\frac{p_1 K_1^{p_1}}{p(q-q_1)^{\frac{p_1}{q_1}}}\right)^{\frac{q_1}{p_1}}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

利用 L 的齐次性, 如果在 $L^p(\Omega)$ 中 $f(x) \neq 0$, 则

$$\|Lf\|_{q,\Omega'} = \left\|L\left(\|f\|_{p,\Omega}\frac{f}{\|f\|_{p,\Omega}}\right)\right\|_{q,\Omega'} = \|f\|_{p,\Omega}\left\|L\left(\frac{f}{\|f\|_{p,\Omega}}\right)\right\|_{q,\Omega'} \leqslant K\|f\|_{p,\Omega}.$$

其次, 证明 $q_2 = \infty$ 的情形. 在上面的方法中可选择 Λ (依赖于 λ) 保证对所有的 $\lambda > 0, (Lf_{S,\Lambda})_*(\lambda) = 0$. 如果 $p_2 = \infty$, 适当选择 $\Lambda = \dfrac{\lambda}{K_2}$, 则

$$\|Lf_{S,\Lambda}\|_{\infty,\Omega'} \leqslant K_2\|f_{S,\Lambda}\|_{\infty,\Omega} \leqslant K_2\Lambda = \lambda$$

且 $(Lf_{S,\Lambda})_*(\lambda) = 0$. 如果 $p_2 < \infty$, 适当选择

$$\Lambda = \left(\frac{\lambda}{K_2\left(\frac{p_2\|f\|_{p,\Omega}^p}{p}\right)^{\frac{1}{p_2}}}\right)^C,$$

其中 $C = \dfrac{p_2}{p_2 - p}$ 是当 $q_2 \to \infty$ 时在此前用过的 C 的极限. 对这样选择的 Λ, 有

$$\begin{aligned}
\|Lf_{S,\Lambda}\|_{\infty,\Omega'}^{p_2} &\leqslant K_2^{p_2}\|f_{S,\Lambda}\|_{p_2}^{p_2} = K_2^{p_2} p_2 \int_0^\Lambda \lambda^{p_2-1}(f_{S,\Lambda})_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant K_2^{p_2} p_2 \Lambda^{p_2-p} \int_0^\Lambda \lambda^{p-1} f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant K_2^{p_2} p_2 \Lambda^{p_2-p} \int_0^\infty \lambda^{p-1} f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&= K_2^{p_2} p_2 \Lambda^{p_2-p} \left(\frac{1}{p}\right)\|f\|_{p,\Omega}^p = \lambda^{p_2}
\end{aligned}$$

且仍有 $(Lf_{S,\Lambda})_*(\lambda) = 0$. 在以上情形的任意之一的式 (2.4.13) 中的第一项为零以及当 $p_1 < p_2$ 时, 对于第二项类似于式 (2.4.15) 的估计成立.

还有最后一种情形: $q_1 < q < q_2 = \infty$, $p_1 = p = p_2 < \infty$ 尚待考虑. 对于这种情形直接从 $[\cdot]_s$ 的定义推出

$$\lambda^{q_1}(Lf)_*(\lambda) \leqslant [Lf]_{q_1}^{q_1} \leqslant K_1^{q_1}\|f\|_{p,\Omega}^{q_1},$$

因此, $(Lf)_*(\lambda) \leqslant \left(\dfrac{K_1\|f\|_{p,\Omega}}{\lambda}\right)^{q_1}$. 此外, 如果 $\lambda > \Lambda = K_2\|f\|_{p,\Omega} \geqslant \|Lf\|_{\infty,\Omega'}$, 则 $(Lf)_* = 0$. 从而

$$\begin{aligned}\|Lf\|_{q,\Omega'}^q &= q\int_0^\infty \lambda^{q-1}(Lf)_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda = q\int_0^\Lambda \lambda^{q-1}(Lf)_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant q(K_1\|f\|_{q,\Omega})^{q_1}\int_0^\Lambda \lambda^{q-1-q_1}\mathrm{d}\lambda = K^q\|f\|_{p,\Omega}^{q_1},\end{aligned}$$

其中由于 $q_1 < q$, K 是有限常数. □

2.5 混合范数 L^p 空间

考虑包含不同坐标方向不同指数的 $\mathbb{R}^N$ 上函数的 L^p 型范数对今后证明索伯列夫嵌入定理是有用的. 给定定义在 $\mathbb{R}^N$ 上一可测函数 f 和指标向量 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_N)$, 其中 $0 < p_i \leqslant \infty$, $1 \leqslant i \leqslant N$. 先计算 $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 关于变量 x_1 的 L^{p_1} 范数, 其次计算这个结果关于变量 x_2 的 L^{p_2} 范数. 这样继续下去, 最后完成关于变量 x_N 的 L^{p_N} 范数的计算:

$$\|f\|_{\boldsymbol{p}} = \left\|\cdots\left\|\|f\|_{L^{p_1}(\mathrm{d}x_1)}\right\|_{L^{p_2}(\mathrm{d}x_2)}\cdots\right\|_{L^{p_N}(\mathrm{d}x_N)},$$

其中

$$\|g\|_{L^q(\mathrm{d}s)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |g(\cdots, s, \cdots)|^q \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_s |g(\cdots, s, \cdots)|, & q = \infty. \end{cases}$$

显然 $\|\cdot\|_{L^q(\mathrm{d}s)}$ 不是一个范数, 除非 $q \geqslant 1$. 例如, 若所有的 p_i 是有限的, 那么

$$\|f\|_{\boldsymbol{p}} = \left[\int_{-\infty}^\infty \cdots \left[\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty |f(x_1, x_2, \cdots, x_N)|^{p_1}\mathrm{d}x_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\mathrm{d}x_2\right]^{\frac{p_3}{p_2}}\cdots \mathrm{d}x_N\right]^{\frac{1}{p_N}}.$$

我们将用 $L^{\boldsymbol{p}} = L^{\boldsymbol{p}}(\mathbb{R}^N)$ 表示满足 $\|f\|_{\boldsymbol{p}} < \infty$ 的 (几乎处处相等的等价类) 函数 f 的集合. 如果所有的 $p_i \geqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant N)$, $L^{\boldsymbol{p}}$ 是具有范数 $\|\cdot\|_{\boldsymbol{p}}$ 的 Banach 空间. 以后只用到一个基本结果, 就是 Hölder 不等式的一个变形. 所以不证明 $L^{\boldsymbol{p}}$ 是

Banach 空间, 只证明 Hölder 不等式的一个变形. 关于混合范数 $L^{\boldsymbol{p}}$ 空间的更多情况, 见文献 [31].

引理 2.5.1(混合范数的 Hölder 不等式) 设 $0 < p_i \leqslant \infty$ 和对于 $1 \leqslant i \leqslant N$, $0 < q_i \leqslant \infty$. 如果 $f \in L^{\boldsymbol{p}}$ 和 $g \in L^{\boldsymbol{q}}$, 则 $fg \in L^{\boldsymbol{r}}$, 其中

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{2.5.1}$$

且成立 Hölder 不等式

$$\|fg\|_{\boldsymbol{r}} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{p}} \|g\|_{\boldsymbol{q}}.$$

证明 利用推论 2.1.1 可证式 (2.5.1). 事实上,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\boldsymbol{r}} &= \left\| \cdots \left\| \|fg\|_{L^{r_1}(\mathrm{d}x_1)} \right\|_{L^{r_2}(\mathrm{d}x_2)} \cdots \right\|_{L^{r_N}(\mathrm{d}x_N)} \\
&\leqslant \left\| \cdots \left\| \|f\|_{L^{p_1}(\mathrm{d}x_1)} \|g\|_{L^{q_1}(\mathrm{d}x_1)} \right\|_{L^{r_2}(\mathrm{d}x_2)} \cdots \right\|_{L^{r_N}(\mathrm{d}x_N)} \\
&\leqslant \left\| \cdots \left\| \left\| \|f\|_{L^{p_1}(\mathrm{d}x_1)} \right\|_{L^{p_2}(\mathrm{d}x_2)} \left\| \|g\|_{L^{q_1}(\mathrm{d}x_1)} \right\|_{L^{q_2}(\mathrm{d}x_2)} \right\|_{L^{r_3}(\mathrm{d}x_3)} \cdots \right\|_{L^{r_N}(\mathrm{d}x_N)} \\
&\leqslant \cdots \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{p}} \|g\|_{\boldsymbol{q}}.
\end{aligned}$$

□

N 个方程 (2.5.1) 经常总结为便于记忆的记号

$$\frac{1}{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{\boldsymbol{q}}. \tag{2.5.2}$$

重复上面的 Hölder 不等式能够提供一个 k 个函数乘积的不等式

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} u_j \right\|_{\boldsymbol{r}} \leqslant \prod_{j=1}^{k} \|u_j\|_{\boldsymbol{P}_j},$$

其中 $\frac{1}{\boldsymbol{r}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\boldsymbol{P}_j}$.

2.6 $L^p(\Omega)$ 空间中的准紧集

定理 2.6.1 集合 F 在 Banach 空间 X 中是准紧的当且仅当对于每个正数 ε 存在一个由 X 中的点构成的有限子集 N_ε, 具有如下性质:

$$F \subset \bigcup_{y \in N_\varepsilon} B_\varepsilon(y),$$

其中集合

$$B(y, \varepsilon) = B_\varepsilon(y) = \{x \in X \big| \|x - y; X\| < \varepsilon\}$$

称为球心为 $y \in X$ 半径为 $\varepsilon > 0$ 的开球. 具有以上性质的集合 N_ε 称为 F 的一个有限 ε-网.

设 $f(x)$ 是几乎处处定义在 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上的函数. 我们用 $\widetilde{f}(x)$ 表示 $f(x)$ 在 Ω 外的零延拓.

定理 2.6.2　设 $1 \leqslant p < \infty$. 有界子集 $F \subset L^p(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是准紧的当且仅当对于每一个给定的 $\varepsilon > 0$ 存在数 $\delta > 0$ 和子集 $G \subset\subset \Omega$, 使得对于每一个 $f \in F$ 和每一个 $h \in \mathbb{R}^N (|h| < \delta)$ 下列两个不等式

$$\int_{\Omega - \overline{G}} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p \tag{2.6.1}$$

和

$$\int_{\Omega} |\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p \tag{2.6.2}$$

成立.

证明　必要性. 令 $\tau_h f$ 表示经 h 的 f 平移:

$$\tau_h f(x) = f(x+h).$$

假定 F 在 $L^p(\Omega)$ 中是准紧的. 给定 $\varepsilon > 0$. 因为根据定理 2.6.1 F 有有限的 $\dfrac{\varepsilon}{6}$-网, 又由于 $C_c(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密, 所以存在一个在 Ω 中有紧支集的连续函数的有限集合 S, 使得对于每一个 $f \in F$, 存在 $\phi \in S$ 满足 $\|f - \phi\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 令 G 是 S 中有限多个函数支集的并, 则 $G \subset\subset \Omega$, 立即推出不等式 (2.6.1).

为了证明不等式 (2.6.2) 选择中心在原点半径为 r 的闭球 $\overline{B}_r(0)$ 且包含 G. 注意到, $(\tau_h\phi - \phi)(x) = \phi(x+h) - \phi(x)$ 是一致连续的, 而且倘若 $|h| < 1$, 在 $B_{r+1}(0)$ 外恒为零. 所以对于 $\phi \in S$, 一致地成立

$$\lim_{|h| \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\tau_h\phi(x) - \phi(x)|^p \mathrm{d}x = 0.$$

对于充分小的 $|h|$ 有

$$\|\tau_h\phi - \phi\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

如果 $\phi \in S$ 满足 $\|f - \phi\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 则也有 $\|\tau_h\widetilde{f} - \tau_h\phi\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 因此对于充分小的 $|h|$ 推出

$$\|\tau_h\widetilde{f} - \widetilde{f}\|_p \leqslant \|\tau_h\widetilde{f} - \tau_h\phi\|_p + \|\tau_h\phi - \phi\|_p + \|\phi - f\|_p < \varepsilon,$$

此不等式不依赖于 $f \in F$, 因而不等式 (2.6.2) 成立. 式 (2.6.2) 也说明在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中平移是连续的.

充分性. 只要对特殊的情形 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 证明逆问题就够了, 因为对于一般情况 Ω 把这种特殊情况应用到集合 $\widetilde{F} = \{\widetilde{f} | f \in F\}$ 上去而得到.

给定 $\varepsilon>0$ 和选择 $G\subset\subset\mathbb{R}^N$, 使得对于一切 $f\in F$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N-\overline{G}}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.6.3}$$

对于任意的 $\delta>0$ 函数 $j_\delta*f$ 属于 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和特别属于 $C(\overline{G})$. 如果 $\phi\in C_c(\mathbb{R}^N)$, 则由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}|j_\delta*\phi(x)-\phi(x)|^p&=\left|\int_{\mathbb{R}^N}j_\delta(y)(\phi(x-y)-\phi(x))\mathrm{d}y\right|^p\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^N}j_\delta^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}(y)(\phi(x-y)-\phi(x))\mathrm{d}y\right|^p\\&\leqslant\int_{B_\delta}j_\delta(y)|\tau_{-y}\phi(x)-\phi(x)|^p\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 p 和 p' 是一对共轭指数. 所以

$$\|j_\delta*\phi-\phi\|_p\leqslant\sup_{h\in B_\delta}\|\tau_h\phi-\phi\|_p.$$

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$, 令 $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ 是 $C_c(\mathbb{R}^N)$ 中一序列, 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 范数下收敛于 $f(x)$. 由定理 2.1.18(3) 知, 当 $j\to\infty$ 时,

$$\|j_\delta*\phi_j-j_\delta*f\|_p=\|j_\delta*(\phi_j-f)\|_p\leqslant\|\phi_j-f\|_p\to0.$$

从而 $\{j_\delta*\phi_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中的一个收敛于 $j_\delta*f$ 的 Cauchy 序列. 还因为在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中 $\tau_h\phi_j\to\tau_hf$, 所以有

$$\|j_\delta*f-f\|_p\leqslant\sup_{h\in B_\delta}\|\tau_hf-f\|_p.$$

式 (2.6.2) 蕴涵对 $f\in F$ 一致地成立 $\lim\limits_{|h|\to0}\|\tau_hf-f\|_p=0$. 因此对于 $f\in F$ 一致地有 $\lim\limits_{\delta\to0}\|j_\delta*f-f\|_p=0$. 现在对于固定的 $\delta>0$, 使得对于所有的 $f\in F$, 有

$$\int_{\overline{G}}|j_\delta*f(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3\cdot2^{p-1}}. \tag{2.6.4}$$

下面证明 $\{j_\delta*f|f\in F\}$ 在 $\overline{G}$ 上满足定理 1.3.3(Ascoli-Arzelá定理) 的条件和是 $C(\overline{G})$ 中的准紧集. 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}|j_\delta*f(x)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^N}j_\delta(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^N}j_\delta(x-y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}j_\delta(x-y)|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_{\mathbb{R}^N}j_\delta(x-y)|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N}j_\delta(y)\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p.\end{aligned}$$

因为 F 是 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中的有界集和 δ 是固定的, 所以对于 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $f \in F$, $j_\delta * f$ 是一致有界的. 类似地

$$|j_\delta * f(x+h) - j_\delta * f(x)| \leqslant \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} j_\delta(y)\right)^{\frac{1}{p}} \|\tau_h f - f\|_p.$$

故对于 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $f \in F$ 一致地有

$$\lim_{|h|\to 0} J_\delta * f(x+h) = j_\delta * f(x).$$

因此 $\{j_\delta * f | f \in F\}$ 在 $C(\overline{G})$ 中是准紧的. 从而由定理 2.6.1 存在 $C(\overline{G})$ 中函数的有限集 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m\}$, 使得如果 $f \in F$, 则对于某个 j, $1 \leqslant j \leqslant m$ 和所有的 $x \in \overline{G}$ 有

$$|\varphi_j(x) - j_\delta * f|^p < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{p-1}\mu(\overline{G})}. \tag{2.6.5}$$

由式 (2.6.3)~ 式 (2.6.5) 和 C_p 不等式得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - \widetilde{\varphi}_j(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N - \overline{G}} |f(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{\overline{G}} |f(x) - \varphi_j(x)|^p \mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2^{p-1} \int_{\overline{G}} (|f(x) - j_\delta * f(x)|^p + |j_\delta * f(x) - \varphi_j(x)|^p) \mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2^{p-1} \left(\frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{p-1}} + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{p-1}\mu(\overline{G})} \mu(\overline{G}) \right) = \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 F 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中有一个有限的 ε-网和由定理 2.6.1 知 F 是准紧的. □

本章内容主要参考了文献 [1]~[3].

第 3 章　整数阶索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 及其基本性质

3.1　广 义 函 数

广义函数概念是函数概念的一种推广. 由于科学技术的发展, 在对许多现象的认识和处理上, 因受古典函数概念限制过多, 不易解释和解决这些问题, 需要提出新的概念以满足更广泛的要求, 这就是要建立广义函数概念的背景.

例如, 物理学家早就用 δ 函数作为点电荷、点光源和瞬时脉冲等物理概念的数学描述. δ 函数具有以下性质:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1,$$

并且对于相当好的函数 $\varphi(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

显然, 依照古典的数学概念, 这样的函数不可能存在. 为此需要提出新的概念使得对 δ 函数及其导数能给出数学解释.

又如工程师 Heaviside 在解电路方程时, 提出了一套运算微积分的法则. 这种算法要对如下的 Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

求导数, 并认为它的导数就是 $\delta(x)$. 但是依照古典分析中的求导法则, $H(x)$ 在 $x=0$ 点是不可导的. 这就要求人们研究这套运算法则的数学依据.

在数学本身的发展中, 也提出了冲破古典分析中一些概念与运算的要求. 例如, 研究偏微分方程解的存在性和唯一性问题时发现, 如果仅限于在古典分析的范围内理解导数并求偏微分方程的古典解, 就会在使用近代数学工具的可能性上受到限

制. 为了使泛函分析的方法能够应用于偏微分方程, 就必须扩充导数概念. 著名数学家、前苏联科学院院士索伯列夫最早在偏微分方程理论中系统地运用了泛函分析方法. 他引进了一类泛函空间 (现在被人们称为索伯列夫空间), 并且研究了这些空间之间的嵌入关系. 他还引入了偏微分方程广义解的概念, 并且在 1935 年给出了广义函数的第一个严格定义.

S. L. Schwartz 建立的广义函数理论有效地解决了上述问题. 在这一理论中, 每个连续函数都可以看成广义函数, 每个广义函数都是无穷次可导的. 对于广义函数定义的各种运算破除了古典分析中对运算的种种约束, 从而能够在更大的范围内进行运算, 使它们运算起来很方便. 现在, 广义函数理论已在许多学科领域中有着广泛的作用.

3.1.1 广义函数的性质

我们的目的是建立广义函数概念, 使得它满足以下要求:

(1) 它包含在物理, 无线电和各学科中出现的奇异函数, 如 δ 函数; 同时也包含一切连续函数.

(2) 它有任意阶导数, 并且使通常的求导法则也成立.

按照 S. L. Schwartz 的广义函数理论, 广义函数实质上就是定义在由一类性质很好的函数组成的基本空间上的线性泛函. 对于广义函数的各种要求都体现在基本空间中的函数上. 为此, 我们还必须在 $C_c^\infty(\Omega)$ (或 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$) 中定义收敛性, 才有可能以它为定义域定义线性泛函, 而且还可以使得它成为完备的空间.

定义 3.1.1 设 $\varphi, \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$(或 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$), 称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中收敛于 $\varphi(x)$, 如果满足下列条件:

(1) 存在 $K \subset\subset \Omega$ (或 $\mathbb{R}^N$), 使得 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_n(x)$ 的支集都包含在 K 中, 即

$$\operatorname{supp} \varphi \subset K, \quad \operatorname{supp} \varphi_n \subset K, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

(2) 对于任意 N 重指数 α, 函数序列 $\{D^\alpha \varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 K 上一致收敛于 $D^\alpha \varphi(x)$, 即对任意 N 重指数 α, 有

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| \right) = 0.$$

在给定上述收敛性后, 就称 $C_c^\infty(\Omega)$(或 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$) 为基本函数空间 (或简称为基本空间)$\mathscr{D}(\Omega)$ (或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$). 上述收敛记为

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \quad (\text{在 } \mathscr{D}(\Omega)(\text{或在 } \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))\text{中}).$$

由此可见, 基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 与 $C_c^\infty(\Omega)$(或 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$) 所含元素相同, 并且定义有上述收敛性. $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中的元素称为基本函数或试验函数.

定义 3.1.2 设 $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 若存在紧集 $K \subset\subset \Omega$(或 $\mathbb{R}^N$), 使得

$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset K, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

并对任意 N 重指数 α, 成立

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\max_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi_m(x)| \right) = 0,$$

就称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中的基本序列.

定理 3.1.1 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中的基本序列必是收敛的, 从而 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 是完备的.

证明 设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中的基本序列, 对于每个点 $x \in \Omega$(或 $\mathbb{R}^N$) 和 N 重指数 α, $\{D^\alpha \varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 也是基本数序列, 由实数域的完备性得知极限

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha \varphi_n(x)$$

存在, 且记为 $\psi_\alpha(x)$. 再由一致收敛性可知 $\psi_\alpha(x)$ 连续. 利用微积分基本定理得

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(a_1, x_1, \cdots, x_N) = \int_{a_1}^{x_1} D^{(1,0,\cdots,0)} \varphi_n(t, x_2, \cdots, x_N) \mathrm{d}t,$$

其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega$(或 $\mathbb{R}^N$) 是固定的. 根据一致收敛性, 令 $n \to \infty$, 有

$$\psi_{(0,0,\cdots,0)}(x) - \psi_{(0,0,\cdots,0)}(a_1, x_2, \cdots, x_N) = \int_{a_1}^{x_1} \psi_{(1,0,\cdots,0)}(t, x_2, \cdots, x_N) \mathrm{d}t.$$

由此知 $\psi_{(0,0,\cdots,0)}(x)$ 可导, 并且 $D^{(1,0,\cdots,0)} \psi_{(0,0,\cdots,0)}(x) = \psi_{(1,0,\cdots,0)}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$. 类似地可得

$$D^\alpha \psi_{(0,0,\cdots,0)}(x) = \psi_\alpha(x).$$

因为有紧集 K, 使得 $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K (n = 1, 2, \cdots)$, 所以 $\operatorname{supp} \psi_{(0,0,\cdots,0)}(x) \subset K$. 由此推知 $\psi_{(0,0,\cdots,0)}(x) \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 且可验证对任意的 N 重指数 α, 有

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \psi_{(0,0,\cdots,0)}(x)| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n(x) - \psi_\alpha(x)| \right) = 0.$$

这说明 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中收敛. □

定义 3.1.3 定义在 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上的线性泛函称为 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上的广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution), 亦即对于 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中的函数 $\varphi(x)$, 有一个实数 $l\varphi$ (或写成 $l(\varphi)$ 或写成 $\langle l, \varphi \rangle$) 与之对应, 如果 l 满足条件:

(1) 可加性. 对 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, 一切 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 则

$$\langle l,\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\rangle=\lambda_1\langle l,\varphi_1\rangle+\lambda_2\langle l,\varphi_2\rangle;$$

(2) 连续性. 如果 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 并且 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 ($\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中任一序列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $\varphi(x)$, 则成立

$$\lim_{n\to\infty}\langle l,\varphi_n\rangle=\langle l,\varphi\rangle.$$

定义 3.1.4 基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上的线性泛函全体记为 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$). $\mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 中的每一元素称为广义函数.

例 3.1.1 设 $f\in L^1_{loc}(\Omega)$(或 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$). 积分

$$\int_{\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)(\text{或}\mathscr{D}(\mathbb{R}^N))\tag{3.1.1}$$

在 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上定义了一个泛函. 因为 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 它具有紧支集并且有界, 所以上述积分存在且取有限值. 因为这个泛函依赖于局部可积函数 $f(x)$, 所以就用 l_f 来表示, 于是

$$l_f\varphi=\langle l_f,\varphi\rangle=\int_{\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)(\text{或}\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)).$$

泛函 l_f 显然是线性的. 事实上, 泛函的可加性是明显的. 下证连续性. 设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中收敛于 $\varphi(x)$, 于是存在一个紧集 $K\subset\subset\Omega$(或 $\mathbb{R}^N$), 使得 $\operatorname{supp}\varphi_n\subset K$ 和 $\operatorname{supp}\varphi\subset K$, 且

$$\begin{aligned}|l_f\varphi_n-l_f\varphi|&=\left|\int_{\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)}f(x)(\varphi_n(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_K f(x)(\varphi_n(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\max_{x\in K}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\int_K|f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x\in K}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=0$, $\int_K|f(x)|\mathrm{d}x$ 有界, 因此

$$\lim_{n\to\infty}l_f\varphi_n=l_f\varphi.$$

所以 l_f 是 $\mathscr{D}(\Omega)$(或$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上的广义函数. 有时把 l_f 就记为 f.

由积分 (3.1.1) 定义的广义函数称为正则的. 其他类型的广义函数称为奇异的.

例 3.1.2 任意取定 $x_0 \in \mathbb{R}$, 定义泛函

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

它显然满足可加性. 并且若 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 中收敛于 φ, 于是

$$|\delta_{x_0}(\varphi_n) - \delta_{x_0}(\varphi)| = |\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

从而可知 δ_{x_0} 连续. 所以 δ_{x_0} 是广义函数. 当 $x_0 = 0$ 时, $\delta = \delta_0$ 就是物理学上常用的 δ 函数或称为 Dirac 函数.

例 3.1.1 曾指出每个局部可积函数可以看成一个广义函数 (即由式 (3.1.1) 定义的一个广义函数). 可以证明 δ 函数并不是由任何局部可积函数按式 (3.1.1) 所决定的广义函数, 所以广义函数并非都是可以由局部可积函数决定. 事实上, 设存在局部可积函数 $f(x)$, 使得

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

特别地, 取函数 $\varphi(x)$ 为

$$\psi(x,a) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geqslant a, \end{cases}$$

其中 $a > 0$ 为常数. 由此可知 $\psi(x,a) \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$. 依上述假定可见

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x,a)\mathrm{d}x = \psi(0,a) = \mathrm{e}^{-1},$$

但上式左端的积分满足

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x,a)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{|x|<a} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_{|x|<a} |f(x)|\mathrm{d}x \to 0, \quad a \to 0. \end{aligned}$$

以上两式是矛盾的. 所以 δ 函数不能由任何局部可积函数按式 (3.1.1) 给出, 它是奇异的广义函数.

关于 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上满足可加性的泛函是否连续, 有以下判别准则.

定理 3.1.2 l 是 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上满足可加性的泛函, 则 $l \in \mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 的充要条件是: 对于 Ω(或 $\mathbb{R}^N$) 的每个紧集 $\mathbb{G}$, 存在常数 $C = C(\mathbb{G})$ 及非

负整数 $N_0 = N_0(\mathbb{G})$, 使得对于任意满足条件 $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{G}$ 的 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 有

$$|l(\varphi)| \leqslant C \sum_{0 \leqslant m \leqslant N_0} \sup_{x \in \mathbb{G}} |D^m \varphi(x)|. \tag{3.1.2}$$

证明 充分性是显然的. 下面用反证法证明必要性. 设 l 连续, 但对于每个紧集 $\mathbb{G}$, 不存在 C, N_0 使得式 (3.1.2) 成立, 则对一切自然数 j, 必存在 $\psi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), $\operatorname{supp}\psi_j \subset \mathbb{G}$, 有

$$|l(\psi_j)| > j \sum_{0 \leqslant m \leqslant j} \sup_{x \in \mathbb{G}} |D^m \psi_j(x)|. \tag{3.1.3}$$

令 $\varphi_j = \dfrac{\psi_j}{l(\psi_j)}$, 显然 $\varphi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \mathbb{G}$, $l(\varphi_j) = 1$. 但由式 (3.1.3) 推知

$$\sup_{x \in \mathbb{G}} |D^m \varphi_j(x)| < \frac{1}{j} \quad (0 \leqslant m \leqslant j),$$

所以 $\lim\limits_{j \to \infty} \varphi_j = 0$(在 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中). 由 l 的连续性便得

$$\lim_{j \to \infty} l(\varphi_j) = 0,$$

这与 $l(\varphi_j) = 1$ 矛盾. □

广义函数空间 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 是线性空间, 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 中定义收敛性如下.

定义 3.1.5 设 $\{l_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$), $l \in \mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$), 若对每个 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 有

$$\lim_{j \to \infty} l_j(\varphi) = l(\varphi)$$

成立, 就称广义函数序列 $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛于 l. 记为

$$\lim_{j \to \infty} l_j = l \quad (\text{在 } \mathscr{D}'(\Omega)(\text{或在 } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N))\text{中}).$$

定理 3.1.3 设 $\{l_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$). 如果对于每个 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), 极限 $\lim\limits_{j \to \infty} l_j(\varphi)$ 存在, 并记

$$l(\varphi) = \lim_{j \to \infty} l_j(\varphi),$$

则 $l \in \mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$), 即 $\lim\limits_{j \to \infty} l_j = l$(在 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 中).

定理 3.1.3 的证明略, 可参看文献 [26].

由定理 3.1.3 可知, 若 $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 中的基本序列, 即对一切 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$), $\lim\limits_{j,k\to\infty}(l_j - l_k)(\varphi) = 0$, 则必存在极限 $\lim\limits_{j\to\infty} l_j(\varphi) = l(\varphi)$. 从而由定理 3.1.3 知 $l \in \mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$), $\lim\limits_{j\to\infty} l_j = l$(在 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 中). 所以在这个意义上可以说 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 具有序列完备性.

3.1.2 广义函数的支集

根据线性泛函的定义可知, 称 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上两个广义函数 l_1 与 l_2 相等, 是指对一切 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$)

$$\langle l_1, \varphi\rangle = \langle l_2, \varphi\rangle.$$

设 V 是 Ω(或 $\mathbb{R}^N$) 的一个开子集, 属于 $\mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$) 的 l_1 与 l_2 可能并不相等, 但如果对一切 $\varphi \in \mathscr{D}(V)$, 有

$$\langle l_1, \varphi\rangle = \langle l_2, \varphi\rangle,$$

就称

$$l_1 = l_2 \quad (\text{在 } V \text{ 中}),$$

或记作 $l_1|_V = l_2|_V$. 同理, 设 $l \in \mathscr{D}'(\Omega)$(或 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$), 若

$$\langle l, \varphi\rangle = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D}(V),$$

就称 l 在 V 上等于零, 或记为 $l|_V = 0$.

定义 3.1.6 设 $l \in \mathscr{D}'(\Omega)$, l 的支集由 Ω 中所有如下的点 x 组成: $x \in \Omega$, 不存在 x 的一个邻域, 使得 l 在此邻域上为零. 记 l 的支集为 $\operatorname{supp} l$.

不难推知, 若 $l \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 并且 l 的支集与 φ 的支集的交集是空集, 即

$$\operatorname{supp} l \bigcap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing,$$

则

$$\langle l, \varphi\rangle = 0.$$

例 3.1.3 Heaviside 函数 $H(x)$ 的支集是半轴 $x \geqslant 0$, 即

$$\operatorname{supp} H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}.$$

例 3.1.4 $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

3.1.3 广义函数的直积

现在考虑两个普通函数 $f(x)$ 与 $g(y)$ 的乘积 $f(x)g(y)$ 在广义函数中的推广, 即两个广义函数的直积.

记 $\mathscr{D}_m = \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, $\mathscr{D}_N = \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ 以及 $\mathscr{D}_{m+N} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^{m+N})$. 设 $f(x)$ 与 $g(y)$ 分别是 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^N$ 上的局部可积函数, 则函数 $f(x)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{m+N}$ 上局部可积. 于是, 由它可定义如下的正则广义函数: 对于 $\varphi(x,y) \in \mathscr{D}_{m+N}$, 有

$$\begin{aligned}\langle f(x)g(y), \varphi(x,y)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

或

$$\begin{aligned}\langle g(y)f(x), \varphi(x,y)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

按照式 (3.1.4) 的形式, 定义两个广义函数的直积.

定义 3.1.7 设 $p(x) \in \mathscr{D}'_m(\mathbb{R}^m)$, $q(y) \in \mathscr{D}'_N(\mathbb{R}^N)$, 用 $p(x) \times q(y)$ 表示 $p(x)$ 与 $q(y)$ 的直积, 其定义为: 对于 $\varphi(x,y) \in \mathscr{D}_{m+N}$, 有

$$\langle p(x) \times q(y), \varphi(x,y)\rangle = \langle p(x), \langle q(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle. \tag{3.1.6}$$

为了说明式 (3.1.6) 右端确定了 $\mathscr{D}_{m+N}$ 上一个线性泛函, 证明以下定理.

定理 3.1.4 设 $p(x) \in \mathscr{D}'_m$, $q(y) \in \mathscr{D}'_N$, 则式 (3.1.6) 右端定义了 $\mathscr{D}_{m+N}$ 上的一个广义函数, 即 $p \times q \in \mathscr{D}'_{m+N}$.

证明 设 $\varphi(x,y) \in \mathscr{D}_{m+N}$, 记函数

$$\psi(x) = \langle q(y), \varphi(x,y)\rangle.$$

下面证明 $\psi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$.

首先, 注意到由于 $\varphi(x,y)$ 有紧支集, 所以可取到足够大的 $r > 0$, 使得

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+N} \mid |x| \leqslant r, |y| \leqslant r\}.$$

这表明, 当 $|x| > r$ 时, $\varphi(x,y) = 0$, 从而这时

$$\psi(x) = \langle q(y), \varphi(x,y)\rangle = \langle q(y), 0\rangle = 0.$$

由此可知 $\psi(x)$ 有紧支集.

其次, 验证 $\psi(x)$ 是连续函数. 取定一点 $x \in \mathbb{R}^m$, 记点序列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 的极限是 x. 显然, 若把 $\varphi(x_i,y)$ 及 $\varphi(x,y)$ 看成 y 的函数, 则它们的支集都包含在有界集 $\{y \in \mathbb{R}^N \mid |y| \leqslant r\}$ 中. 又因为 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{m+N})$, φ 及其各阶导数都是一致连续函数, 所以易知

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(x_i,y) = \varphi(x,y) \quad (\text{在 } \mathscr{D}_N \text{ 中}).$$

再由 $q(y) \in \mathscr{D}'_N$ 便得知, 当 $i \to \infty$ 时,

$$\psi(x_i) = \langle q(y), \varphi(x_i, y)\rangle \to \langle q(y), \varphi(x, y)\rangle = \psi(x),$$

即 $\psi(x)$ 连续.

现在证明 ψ 可导, 并且有

$$D_x^\alpha \psi(x) = \langle q(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)\rangle. \tag{3.1.7}$$

事实上, 取定一点 $x \in \mathbb{R}^m$, 令 $\Delta_j = (0, \cdots, 0, h, 0, \cdots, 0)$, 它的第 j 个分量是 h, 其余分量都是零. 于是可以证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[\psi(x+\Delta_j) - \psi(x)] &= \left\langle q(y), \frac{1}{h}[\varphi(x+\Delta_j, y) - \varphi(x, y)]\right\rangle \\ &\to \left\langle q(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j}\right\rangle, \quad h \to 0,\end{aligned}$$

亦即

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(x) = \left\langle q(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j}\right\rangle.$$

反复运用这样的步骤, 便得知, $\psi(x)$ 有任意阶的导数和式 (3.1.7) 成立.

综上所述, 知 $\psi(x) \in \mathscr{D}_m$. 因此式 (3.1.6) 的右端 $\langle p, \psi\rangle$ 是有定义的. 并且 $p \times q$ 是 $\mathscr{D}_{m+N}$ 上满足可加性的泛函.

最后, 证明这个泛函连续. 设任给在 $\mathscr{D}_{m+N}$ 中收敛于零的元素序列 $\{\varphi_i(x, y)\}_{i=1}^\infty$. 根据定义可知必存在适当大的 $r > 0$, 使得

$$\operatorname{supp} \varphi_i \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+N} \mid |x| \leqslant r, |y| \leqslant r\} = \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 = \mathbb{G},$$

其中

$$\mathbb{G}_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leqslant r\}, \quad \mathbb{G}_2 = \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y| \leqslant r\},$$

并且对于任意多重指数 α, 有

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sup_{(x,y)\in\mathbb{G}} |D^\alpha \varphi_i(x, y)|\right) = 0.$$

现在记

$$\psi_i(x) = \langle q(y), \varphi_i(x, y)\rangle.$$

由前面的讨论知 $\psi_i \in \mathscr{D}_m$, 并且

$$\operatorname{supp} \psi_i \subset \mathbb{G}_1.$$

因为 $q(y)\in\mathscr{D}'_N$, 根据定理 3.1.2 知, 对于紧支集 $\mathbb{G}_2$, 存在常数 C 与非负整数 N_0, 使得任意满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbb{G}_2$ 的 $\varphi(y)\in\mathscr{D}_N$, 有

$$|\langle q(y),\varphi(y)\rangle|\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant N_0}\sup_{y\in\mathbb{G}_2}|D_y^\beta\varphi(y)|.$$

由此推出, 对于任意给定的多重指数 α,

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha\psi_i(x)|&\leqslant|\langle q(y),D_x^\alpha\varphi_i(x,y)\rangle|\\&\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant N_0}\sup_{y\in\mathbb{G}_2}|D_y^\beta D_x^\alpha\varphi_i(x,y)|,\quad x\in\mathbb{G}_1.\end{aligned}$$

由此得知, 当 $i\to\infty$ 时,

$$\sup_{x\in\mathbb{G}_1}|D_x^\alpha\psi_i(x)|\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant N_0}\sup_{(x,y)\in\mathbb{G}}|D_y^\beta D_x^\alpha\varphi_i(x,y)|\to 0.$$

于是

$$\lim_{i\to\infty}\psi_i=0\quad(\text{在 }\mathscr{D}_m\text{ 中}).$$

因为 $p(x)\in\mathscr{D}'_m$, 便可得到

$$\lim_{i\to\infty}\langle p\times q,\varphi_i\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle p(x),\psi_i(x)\rangle=0.$$

这表明 $p\times q\in\mathscr{D}'_{m+N}$. □

广义函数的直积有以下性质 (证明见文献 [32]).

(1) 可交换性:

$$p(x)\times q(y)=q(y)\times p(x).$$

(2) 连续性: 若

$$\lim_{i\to\infty}p_i=p\quad(\text{在 }\mathscr{D}'_m\text{ 中}),$$

则

$$\lim_{i\to\infty}p_i(x)\times q(y)=p(x)\times q(y).$$

(3) 结合律:

$$p(x)\times[q(y)\times w(z)]=[p(x)\times q(y)]\times w(z).$$

(4) 可导性:

$$D_x^\alpha[p(x)\times q(y)]=[D_x^\alpha p(x)]\times q(y).$$

(5) 与 C^∞ 函数的乘法: 若 $a(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, 则

$$a(x)[p(x)\times q(y)]=[a(x)p(x)]\times q(y).$$

(6) $\operatorname{supp}(p\times q)=(\operatorname{supp}p)\times(\operatorname{supp}q)$.

3.1.4 广义函数的卷积

我们在 2.1.7 小节中定义了 $\mathbb{R}^N$ 上两个可积函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积如下:

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=(g*f)(x),$$

由定理 2.1.15 知它也可积, 于是可以定义一个正则广义函数, 即

$$\begin{aligned}\langle f*g,\varphi\rangle &=\int_{\mathbb{R}^N}(f*g)(z)\varphi(z)\mathrm{d}z\\ &=\int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(z-y)g(y)\mathrm{d}y\right]\varphi(z)\mathrm{d}z\\ &=\int_{\mathbb{R}^N} g(y)\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(z-y)\varphi(z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\\ &=\int_{\mathbb{R}^N} g(y)\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x+y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N).\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

根据式 (3.1.8) 可以定义两个广义函数的卷积.

定义 3.1.8 设 $p,q\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$. 如果以下等式

$$\langle w,\varphi\rangle=\langle p(x)\times q(y),\varphi(x+y)\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)\tag{3.1.9}$$

定义一个广义函数 $w\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, 那么, w 就称为 p 与 q 的卷积, 记为

$$w=p*q.$$

注意到 $\langle p(x)\times q(y),\psi(x,y)\rangle$ 对于一切 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ 是有定义的, 但在式 (3.1.9) 中 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. 令

$$\psi(x,y)=\varphi(x+y),\quad x,y\in\mathbb{R}^N.$$

显然 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^{2N})$, 它的支集

$$\operatorname{supp}\psi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2N}\mid x+y\in\operatorname{supp}\varphi\}\tag{3.1.10}$$

是闭集, 但一般来说不是有界的, 除非 $\varphi=0$.

以 $N=1$ 为例说明以上情况. 如果 φ 的支集为

$$\{x||x|\leqslant M\},$$

则 ψ 的支集为

$$\{(x,y)||x+y|\leqslant M\}.$$

如图 3.1.1 所示, 可以看出 ψ 的支集是位于 $x+y=M$ 与 $x+y=-M$ 两条直线之间的无限长条.

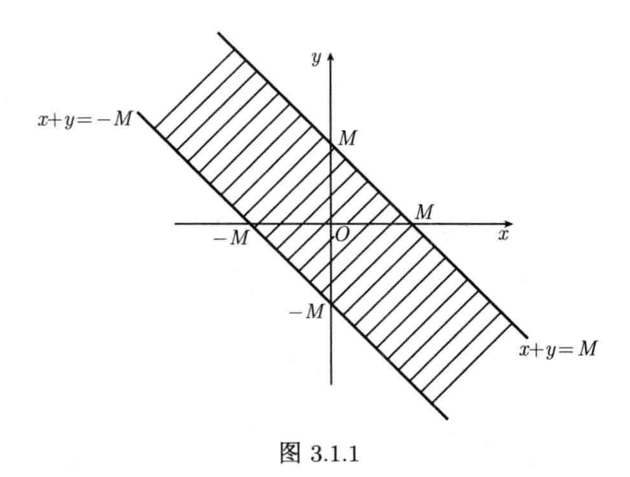


图 3.1.1

由定义 3.1.8 看出, 式 (3.1.9) 的右端可能没有意义, 也就是说, 并不是对任意两个广义函数都可以定义卷积的. 下面讨论在什么条件下, 它们的卷积存在.

引理 3.1.1　设 K 是有界开集 Ω 中的闭子集, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, 则存在函数 $f \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足

(1) 当 $x \in \Omega$ 时, 成立

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1; \tag{3.1.11}$$

(2) 在 K 的某个邻域上, 成立

$$f(x) = 1. \tag{3.1.12}$$

证明　记 $\delta = \mathrm{dist}(\partial\Omega, K)$, $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N | \mathrm{dist}(x, K) < \varepsilon\}$. K_ε 是包含闭集 K 的开集, 即 K_ε 是 K 的邻域. 取 ε 和 ε' 满足

$$0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon + \varepsilon' < \delta. \tag{3.1.13}$$

作函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_{\varepsilon'}, \\ 0, & x \overline{\in} K_{\varepsilon'}. \end{cases} \tag{3.1.14}$$

由定理 2.1.20(2) 知

$$J_\varepsilon g(x) = \int_{|y| \leqslant 1} g(x - \varepsilon y) j(y) \mathrm{d}y, \quad x \in K \tag{3.1.15}$$

属于 $C_c^\infty(\Omega)$. 由式 (3.1.13) 知 $K_{\varepsilon'-\varepsilon}$ 是 K 的邻域. 当 $x \in K_{\varepsilon'-\varepsilon}$, $|y| \leqslant 1$ 时, 成立 $x - \varepsilon y \in K_{\varepsilon'}$. 所以 $g(x - \varepsilon y) = 1$. 由式 (3.1.15) 得到

$$J_\varepsilon g(x) = 1, \quad \forall x \in K_{\varepsilon'-\varepsilon} \subset \Omega,$$

即 $J_\varepsilon g(x)$ 满足式 (3.1.12). 根据 $j(y)$ 的性质,

$$0 \leqslant J_\varepsilon g(x) \leqslant 1, \quad x \in \Omega.$$

函数 $J_\varepsilon g(x)$ 就是要找的 $f(x)$. □

引理 3.1.2 设 $q \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$. 若函数 $\sigma(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得集合

$$\mathbb{G} = \text{supp } q \bigcap \text{supp } \sigma$$

是紧集, 则可以把 q 的定义延拓到 σ 上.

证明 根据引理 3.1.1, 取函数 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得在 $\mathbb{G}$ 的一个邻域上 $g(x) = 1$(若 $\mathbb{G}$ 是空集, 则任意取 g). 显然 $g\sigma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. 因此, 定义 q 在 σ 上的值为

$$\langle q, \sigma \rangle = \langle q, g\sigma \rangle. \tag{3.1.16}$$

可以证明, 由式 (3.1.16) 定义 q 的延拓不依赖于函数 g 的选取. 事实上, 若有另一函数 $g_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使在 $\mathbb{G}$ 的某个邻域上 $g_1(x) = 1$, 则 $(g - g_1)\sigma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 并且

$$\text{supp}(g - g_1)\sigma \subset \mathbb{G}^c \bigcap \text{supp } \sigma,$$

从而

$$\text{supp } q \bigcap \text{supp}(g - g_1)\sigma \subset \mathbb{G} \bigcap \mathbb{G}^c = \varnothing.$$

于是

$$\langle q, (g - g_1)\sigma \rangle = 0,$$

即

$$\langle q, g\sigma \rangle = \langle q, g_1\sigma \rangle.$$

如果 $\sigma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 与上面的讨论类似, 可得

$$\langle q, (1 - g)\sigma \rangle = 0,$$

即 $\langle q, \sigma \rangle = \langle q, g\sigma \rangle$. 这表明, 当 $\sigma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 时, 延拓后的定义与原定义是一致的. □

下面给出保证卷积存在的条件.

条件 3.1.1 设 $p, q \in \mathscr{D}'_N$ 满足以下条件: 令 $A = \text{supp } p$, $B = \text{supp } q$, 对于 $\mathbb{R}^N$ 中每个紧集 F, 由下式所定义的集合

$$\widetilde{F} = (A \times B) \bigcap \{(x, y) \big| x + y \in F\} \tag{3.1.17}$$

是 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ 中的有界集.

定理 3.1.5 如果 $p, q \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ 满足条件 3.1.1, 则 $p*q$ 存在并且属于 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$.

证明 对于 $\varphi \in \mathscr{D}_N$, 令 $F = \text{supp}\ \varphi$, 根据假定条件 3.1.1 便知相应的 $\widetilde{F}$ 是有界的, 即集合

$$\text{supp}(p \times q)\bigcap\{(x,y)\big|x+y \in F\}$$

有界. 令

$$\psi(x,y) = \varphi(x+y),$$

则

$$\text{supp}\ \psi = \{(x,y)\big|x+y \in F\}.$$

按照引理 3.1.2 所述方法, 取一函数 $g(x,y) \in \mathscr{D}_{2N}$, 使得它在 $\widetilde{F}$ 的一个邻域等于 1. 对于 $\varphi \in \mathscr{D}_N$ 定义泛函 w 为

$$\begin{aligned}\langle w, \varphi\rangle &= \langle p(x) \times q(x), \varphi(x+y)\rangle \\ &\triangleq \langle p(x) \times q(y), g(x,y)\psi(x,y)\rangle,\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

其中 “ $\triangleq$ ” 表示右端是左端的定义. 根据引理 3.1.2 推知 w 的定义与 g 的选择无关. 显然 w 是 $\mathscr{D}_N$ 上满足可加性的泛函. 下面证明 w 的连续性.

设 $\mathscr{D}_N$ 中一元素序列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 收敛于零. 必存在一个紧集 $\mathbb{G}$, 使得 $\text{supp}\ \varphi_i \subset \mathbb{G}$. 由式 (3.1.17) 给定的集合 $\widetilde{\mathbb{G}}$ 是有界集. 取函数 $g(x,y) \in \mathscr{D}_{2N}$, 使得它在 $\widetilde{\mathbb{G}}$ 的一个邻域上等于 1. 由

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i = 0 \quad (\text{在 } \mathscr{D}_N \text{ 中}),$$

便推知

$$\lim_{i\to\infty} [g(x,y)\varphi_i(x+y)] = 0 \quad (\text{在 } \mathscr{D}_{2N} \text{ 中}).$$

因为直积 $p(x) \times q(y) \in \mathscr{D}'_{2N}$, 所以依式 (3.1.18) 得

$$\lim_{i\to\infty} \langle w, \varphi_i\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle p(x) \times q(y), g(x,y)\varphi_i(x+y)\rangle = 0,$$

这表明 $w \in \mathscr{D}'_N$. 所以, 卷积 $w = p * q$ 存在, 并且属于 $\mathscr{D}'_N$. □

下面给出满足条件 3.1.1 的一个例子.

例 3.1.5 设 $p,\ q \in \mathscr{D}'_N$. 若 $p,\ q$ 之中至少有一个具有紧支集, 则满足条件 3.1.1, 从而卷积 $p * q$ 存在.

事实上, 先设 q 有紧支集, 必存在常数 M, 使得

$$B = \text{supp}\ q \subset \{y\big||y| \leqslant M\}.$$

对于紧集 F 也有 M_1, 使得

$$F \subset \{x\big||x| \leqslant M_1\}.$$

任给 $(x,y)\in\widetilde{F}$, 必满足条件

$$|y|\leqslant M,\quad |x+y|\leqslant M_1,$$

从而推出 $|x|\leqslant M+M_1$. 因此 $\widetilde{F}$ 有界.

若 p 有紧支集, 其证明类似.

下面只列几个广义函数卷积的性质.

性质 3.1.1 可交换性. 设 p, q 满足条件 3.1.1, 则 $p*q$ 与 $q*p$ 都存在, 并且

$$p*q=q*p.$$

证明 由定理 3.1.5 知 $p*q$ 与 $q*p$ 都存在. 再由广义函数直乘的可交换性知, 性质 $p*q=q*p$ 成立. □

性质 3.1.2 可微性. 设 p, q 满足条件 3.1.1, 则对于多重指数 α 有

$$D^\alpha(p*q)=(D^\alpha p)*q=p*(D^\alpha q). \tag{3.1.19}$$

证明 只需对一阶偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 证明式 (3.1.19). 对于 $\varphi\in\mathscr{D}_N$, 由定义 3.1.8 和直积的可交换性, 得

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}(p*q),\varphi\right\rangle&=(-1)\left\langle p*q,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle\\&=(-1)\left\langle p(x)\times q(y),\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_i}\right\rangle\\&=\left\langle q(y),\left\langle -p(x),\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_i}\right\rangle\right\rangle\\&=\left\langle q(y),\left\langle \frac{\partial p(x)}{\partial x_i},\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle\\&=\left\langle \frac{\partial p(x)}{\partial x_i}\times q(y),\varphi(x+y)\right\rangle\\&=\left\langle \frac{\partial p(x)}{\partial x_i}* q(y),\varphi\right\rangle,\quad i=1,2,\cdots,N,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p*q)=\frac{\partial p}{\partial x_i}*q,\quad i=1,2,\cdots,N.$$

再由性质 3.1.1 可得式 (3.1.19) 的第二个等式. □

性质 3.1.3 对于 δ 函数, 有

$$\delta*p=p*\delta=p,\quad p\in\mathscr{D}'_N. \tag{3.1.20}$$

证明 因为 δ 函数的支集是单点集 $\{0\}$, 它显然是紧集. 于是对于任意的 $p \in \mathscr{D}'_N$, $\delta * p$ 存在, 有

$$\begin{aligned}\langle \delta * p, \varphi \rangle &= \langle \delta(x) \times p(y), \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle p(y), \langle \delta(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle p(y), \varphi(y) \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}_N,\end{aligned}$$

所以

$$\delta * p = p.$$

根据性质 3.1.2, 进一步可得

$$D^\alpha p = D^\alpha \delta * p. \qquad \square$$

性质 3.1.4 连续性. 设广义函数序列 $\{p_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathscr{D}'_N (i = 1, 2, \cdots)$, p, $q \in \mathscr{D}'_N$, 并且

$$\lim_{i \to \infty} p_i = p \quad (\text{在 } \mathscr{D}'_N \text{ 中}),$$

若以下两条件之一成立:

(1) 设 q 有紧支集, 即 $\operatorname{supp} q = \mathbb{G}$ 是紧集;

(2) 设存在紧集 $\mathbb{G}$, 使得

$$\operatorname{supp} p_i \subset \mathbb{G},$$

则有

$$\lim_{i \to \infty} (p_i * q) = p * q \quad (\text{在 } \mathscr{D}'_N \text{ 中}).$$

证明 设条件 (1) 成立. 根据定理 3.1.5 知卷积 $p * q$ 和 $p_i * q$ 存在. 依广义函数的收敛定义, 只需证明

$$\lim_{i \to \infty} \langle p_i * q, \varphi \rangle = \langle p * q, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_N.$$

记 $A_i = \operatorname{supp} p_i$. 在式 (3.1.17) 中用 A_i 取代 A 得 $\widetilde{F}_i$. 用例 3.1.5 的方法可得有 $\mathbb{R}^{2N}$ 中的有界集 $\widetilde{\mathbb{G}}$, 使得 $\widetilde{F}_i \subset \widetilde{\mathbb{G}}$. 用定理 3.1.5 的做法, 取一个函数 $g(x, y) \in \mathscr{D}_{2N}$, 使得它在 $\widetilde{\mathbb{G}}$ 的一个邻域上等于 1, 由式 (3.1.18) 知, 对于 $\varphi \in \mathscr{D}_N$,

$$\begin{aligned}\langle p_i * q, \varphi \rangle &= \langle p_i(x) \times q(y), g(x,y)\varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle p_i(x), \langle q(y), g(x,y)\varphi(x+y) \rangle \rangle. \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

记函数

$$\sigma(x) = \langle q(y), g(x,y)\varphi(x+y) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

应用定理 3.1.5 的方法可以证明 $\sigma(x) \in \mathscr{D}_N$. 于是

$$\lim_{i\to\infty} \langle p_i, \sigma\rangle = \langle p, \sigma\rangle.$$

利用式 (3.1.21) 得

$$\lim_{i\to\infty} \langle p_i * q, \varphi\rangle = \langle p, \sigma\rangle = \langle p * q, \varphi\rangle.$$

若条件 (2) 成立, 类似可证. □

3.1.5 广义函数的导数

给出广义导数定义之前, 先看一个例子, 对定义广义函数的广义导数是很有启发性的. 设 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$(或 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$), $f \in C^1(\Omega)$(或 $C^1(\mathbb{R}^N)$), 由 Green 公式可知, 成立等式

$$\int_{\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x.$$

如果 α 是一 N 重指数, $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$(或 $C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^N)$), 重复使用 $|\alpha|$ 次 Green 公式推出

$$\int_{\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)} D^\alpha f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega(\text{或}\mathbb{R}^N)} f(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

因此把广义函数 l 的 α 阶广义导数 $D^\alpha l$ 用以下方式来定义.

定义 3.1.9 广义函数 l 的 α 阶广义导数 $D^\alpha l$ 用下式定义

$$\langle D^\alpha l, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle l, D^\alpha\varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)(\text{或 } \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)). \tag{3.1.22}$$

为了说明定义 3.1.9 的合理性, 还需要证明 $D^\alpha l \in \mathscr{D}'(\Omega)$(或$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$), 也就是说, 需要证明 $D^\alpha l$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$(或 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上的线性泛函. 事实上, 泛函 $D^\alpha l$ 满足可加性是显然的. 所以只需证明 $D^\alpha l$ 的连续性. 设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(\Omega)$(或$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 在 $\mathscr{D}(\Omega)$(或$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 中收敛于 $\varphi(x)$. 所以存在紧集 K, 满足 $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ 和 $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. 对于任一 N 重指数 α, 函数序列 $\{D^\alpha\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 K 上一致收敛于 $D^\alpha\varphi$. 对序列 $\{D^\alpha\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 和 $D^\alpha\varphi(x)$, 有 $\operatorname{supp} D^\alpha\varphi_n \subset K$ 和 $\operatorname{supp} D^\alpha\varphi \subset K$; 且对于任一 N 重指数 β, 序列 $\{D^\beta(D^\alpha\varphi_n(x))\}_{n=1}^\infty = \{D^{\beta+\alpha}\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 K 上一致收敛于 $D^\beta(D^\alpha\varphi(x)) = D^{\beta+\alpha}\varphi(x)$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha\varphi_n(x) = D^\alpha\varphi(x) \quad (\text{在}\mathscr{D}(\Omega)(\text{或}\mathscr{D}(\mathbb{R}^N))\text{中}).$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\langle D^\alpha l, \varphi_n\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_{n\to\infty}\langle l, D^\alpha\varphi_n\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle l, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha l, \varphi\rangle.$$

因此我们证明了 $D^\alpha l$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$(或$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) 上的线性泛函. 从上面的证明不难看出:

(1) 任一广义函数 l 的 α 阶广义导数 $D^\alpha l$ 仍是一广义函数, 由于 α 可取任一 N 重指数, 所以每一广义函数有任意阶的广义导数;

(2) 求广义函数的导数与求导的次序无关. 以二阶导数为例, 有

$$D_iD_jl = D_jD_il.$$

事实上, 对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$(或$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$),

$$\langle D_iD_jl, \varphi\rangle = \langle l, D_jD_i\varphi\rangle = \langle D_jD_il, \varphi\rangle.$$

例 3.1.6 考虑 Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

我们知道它作为通常函数来说, $H(x)$ 在 $x \neq 0$ 时导数为 0, 在 $x = 0$ 处导数不存在, 可是作为广义函数, 它在 $\mathbb{R}$ 上可导. 对于任一 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 得

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}, \varphi\right\rangle = -\left\langle H, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right\rangle = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

因此 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x) = \delta(x)$.

从上面可以看出 $L^1_{loc}(\Omega)$(或$L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$) 中每一个函数 $f(x)$ 对应着一个广义函数 l_f. 然而不是每一个局部可积函数的广义导数都是局部可积的. 为此, 举例之前先证明一个引理.

引理 3.1.3 设 $f(x)$ 是定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上的连续函数, 若

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{3.1.23}$$

则 $f(x) \equiv 0$.

证明 反证法. 如果 $f(x)$ 不恒等于零, 必存在一点 x_0, 使得 $f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) > 0$(同样可证 $f(x_0) < 0$ 也不可能), 因而存在一个数 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $K_\delta = \{x \in \Omega \big| |x - x_0| < \delta\} \subset \Omega$ 上大于零. 在 $C_c^\infty(K_\delta)$ 中取一个函数 $\varphi_0(x)$, 使得在 K_δ 上 $\varphi_0(x) \geqslant 0$ 且 $\varphi_0(x)$ 不恒等于零, 于是

$$\int_{K_\delta} f(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x > 0. \tag{3.1.24}$$

此外, 可以把 $\varphi_0(x)$ 看成 $C_c^\infty(\Omega)$ 中的函数, 由式 (3.1.23) 得到

$$\int_{K_\delta} f(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x = 0.$$

这与式 (3.1.24) 矛盾. □

例 3.1.7 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续函数, 且在区间 $[x_0,x_1](\subset(-1,1))$ 上不是绝对 (全) 连续函数. 显然, $f\in L^1_{loc}(-1,1)$, 我们证明 $f(x)$ 的一阶广义导数 $g(x)$ 不属于 $L^1_{loc}(-1,1)$.

证明 反证法. 若 $g\in L^1_{loc}(-1,1)$, 则

$$F(x)=\int_a^x g(x)\mathrm{d}x$$

是 $(-1,1)$ 上的绝对连续函数, 其中 $-1<a<1(a<x<1)$ 是一常数. 由于 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的广义导数, 所以成立

$$\int_{-1}^1 f(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1 g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(-1,1). \tag{3.1.25}$$

此外,

$$\begin{aligned}-\int_{-1}^1 g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x&=-\int_{-1}^1\varphi(x)\mathrm{d}\left(\int_a^x g(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\int_{-1}^1 F(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(-1,1).\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

由式 (3.1.25) 和式 (3.1.26) 推出

$$\int_{-1}^1(f(x)-F(x))\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0,\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(-1,1). \tag{3.1.27}$$

取一个 $\varphi_0\in C_c^\infty(-1,1)$, 且 $\displaystyle\int_{-1}^1\varphi_0(x)\mathrm{d}x=1$. 例如, 取

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\left(\frac13\right)^2-|x|^2}}, & |x|<\dfrac13,\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac13,\end{cases}$$

其中 $\gamma=\displaystyle\int_{-\frac13}^{\frac13}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\left(\frac13\right)^2-|x|^2}}\mathrm{d}x$. 设 $\varphi(x)$ 是 $C_c^\infty(-1,1)$ 中的任一元素, 记 $\lambda=\displaystyle\int_{-1}^1\varphi(x)\mathrm{d}x$, 于是

$$\chi(x)=\varphi(x)-\lambda\varphi_0(x)\in C_c^\infty(-1,1),$$

且满足

$$\int_{-1}^1\chi(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\varphi(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_{-1}^1\varphi_0(x)\mathrm{d}x=\lambda-\lambda=0.$$

记

$$\psi(x) = \int_0^x \chi(x)\mathrm{d}x,$$

则 $\psi \in C_c^\infty(-1,1)$. 由式 (3.1.27) 导出

$$\int_{-1}^1 (f(x) - F(x))\chi(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (f(x) - F(x))\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 0. \tag{3.1.28}$$

记 $G(x) = f(x) - F(x)$, 它是定义在区间 $(-1,1)$ 上的连续函数, 将 $\chi(x) = \varphi(x) - \lambda\varphi_0(x)$ 代入式 (3.1.28) 有

$$\int_{-1}^1 G(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - C\lambda = 0,$$

其中 $C = \int_{-1}^1 G(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x$, 于是

$$\int_{-1}^1 (G(x) - C)\varphi(x) = 0, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(-1,1).$$

由引理 3.1.3 得到 $G(x) - C = 0$, 即 $f(x) = F(x) + C$. 因为 $F(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ $(\subset (-1,1))$ 上是绝对连续函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上必须是绝对连续函数, 这是不可能的. 故 $f(x)$ 的广义导数不属于 $L^1_{loc}(-1,1)$. □

从例 3.1.7 的证明过程中, 还可以得到下面的引理.

引理 3.1.4 设 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的连续函数, 且满足

$$\int_{-1}^1 f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(-1,1),$$

则 $f(x)$ 是一常数.

定义 3.1.10 设 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, 于是 l_f 和 $D^\alpha l_f$ 都是广义函数, 其中 α 是任意 N 重指数. 如果存在某一函数 $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, 且 $l_{g_\alpha} = D^\alpha l_f$, 就称 $g_\alpha(x)$ 是 f 的 α 阶弱导数, 即设 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, 如果存在 $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

就称 $g_\alpha(x)$ 是 $f(x)$ 在区域 Ω 上的 α 阶弱导数.

引理 3.1.5 (弱导数的唯一性) 函数 $f(x)$ 的 α 阶弱导数若存在, 则除去一个零测集外是唯一的.

证明 设 $g, \widetilde{g} \in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \widetilde{g}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

则

$$\int_\Omega (g(x)-\widetilde{g}(x))\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

从而 $g(x)=\widetilde{g}(x)$, a.e.. □

例 3.1.8 设 $N=1$, $\Omega=(0,2)$ 和

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 1, \\ 1, & 1<x<2. \end{cases}$$

定义

$$g(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & 1<x<2. \end{cases}$$

我们证明在弱导数意义下 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=g(x)$. 事实上, 必须证明

$$\int_0^2 f(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\int_0^2 g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

但是容易计算

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ &= \varphi(1)-\varphi(1)-\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^2 g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\end{aligned}$$

这就是所要的结果.

3.2 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间及其性质

本节介绍定义在任意开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的整数阶索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$, 并证明其一些性质; 当 m 为非负整数时, 索伯列夫空间是 $L^p(\Omega)$ 的子空间. 以下假设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, D 表示求弱导数.

定义 3.2.1 设 α 是 N 重指数, m 是非负整数, 集合 $W^{m,p}(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega)|D^\alpha f\in L^p(\Omega),\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant m\}$ 的元素 $f(x)$ 的范数定义为

$$\|f;W^{m,p}(\Omega)\| = \|f\|_{m,p} = \left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1\leqslant p<\infty, \tag{3.2.1}$$

$$\|f;W^{m,\infty}(\Omega)\| = \|f\|_{m,\infty} = \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_\infty. \tag{3.2.2}$$

现在首先验证 $\|f;W^{m,p}(\Omega)\|(1\leqslant p<\infty)$ 是一范数. 显然

$$\|f;W^{m,p}(\Omega)\|=0 \quad 当且仅当 \quad \text{a.e. } f=0$$

和

$$\|\lambda f;W^{m,p}(\Omega)\| = |\lambda|\|f;W^{m,p}(\Omega)\|,$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}$. 其次假定 $f,g\in W^{m,p}(\Omega)$, 则如果 $1\leqslant p<\infty$, 应用离散型的 Minkowski 不等式 (见附录 I(8)) 推出

$$\begin{aligned}\|f+g;W^{m,p}(\Omega)\| &= \left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha(f+g)\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(\|D^\alpha f\|_p+\|D^\alpha g\|_p)^p\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha g\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= \|f;W^{m,p}(\Omega)\| + \|g;W^{m,p}(\Omega)\|.\end{aligned}$$

类似地可以验证 $\|f;W^{m,\infty}(\Omega)\|$ 是一范数. $W^{m,p}(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 是线性空间是显然的, 于是 $W^{m,p}(\Omega)$ 是一线性赋范空间, 称 $W^{m,p}(\Omega)$ 为 Ω 上的整数阶索伯列夫空间.

为了避免区域混淆, 有时记为 $\|f\|_{m,p,\Omega}$ 代替 $\|f\|_{m,p}$. 显然 $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $W^{m,p}(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 的子空间. 如果 $p=2$, 常常把 $W^{m,2}(\Omega)$ 写成 $H^m(\Omega)(m=0,1,\cdots)$. 用字母 H 是因为 $H^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 注意 $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$.

介绍索伯列夫空间的重要性质之前, 让我们先证明弱导数的一些基本性质.

定理 3.2.1 设 $f,g\in W^{m,p}(\Omega)$, $|\alpha|\leqslant m$, 则

(1) 对于任意满足 $|\alpha|+|\beta|\leqslant m$ 的 N 重指数 α 和 β 有

$$D^\alpha f\in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega) \text{ 和 } D^\beta(D^\alpha f)=D^\alpha(D^\beta f)=D^{\alpha+\beta}f.$$

(2) 对于每一 $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ 和 $|\alpha|\leqslant m$, $\lambda f+\mu g\in W^{m,p}(\Omega)$ 和

$$D^\alpha(\lambda f+\mu g)=\lambda D^\alpha f+\mu D^\alpha g.$$

(3) 若 Ω_1 是 Ω 的一开子集, 那么 $f\in W^{m,p}(\Omega_1)$.

证明 为了证明 (1), 先固定 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 则 $D^\beta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 且

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^\alpha f(x) D^\beta \varphi(x) \mathrm{d}x &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^{\beta+\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而在弱导数意义下 $D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta} f$. 同理可证 $D^\alpha(D^\beta f) = D^{\alpha+\beta} f$.

(2) 的证明是显然的. 下证 (3). 由弱导数定义和对于 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ 知

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

因为可以把 $C_c^\infty(\Omega_1)$ 看成 $C_c^\infty(\Omega)$ 的子集, 因此

$$\int_{\Omega_1} f(x) D^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega_1)$$

由于上式中的 $\varphi(x)$ 在 $\Omega - \Omega_1$ 上为零, 故上式等价于

$$\int_{\Omega_1} f(x) D^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega_1} D^\alpha f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega_1). \tag{3.2.3}$$

所以 $f \in W^{m,p}(\Omega_1)$. □

注 3.2.1 设 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N)$ 和 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ 是两个 N 重指数, 如果 $\beta_i \leqslant \alpha_i (i = 1, 2, \cdots, N)$, 称 $\beta \leqslant \alpha$, 此时 $\alpha - \beta$ 也是 N 重指数. 记

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_N!.$$

若 $\beta \leqslant \alpha$, 则记 $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_N}{\beta_N}$.

定理 3.2.2 设 $a \in C_c^\infty(\Omega)$ 和 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 则 $af \in W^{m,p}(\Omega)$, 且对于满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的 N 重指数 α 成立 Leibniz 公式

$$D^\alpha(af) = \sum_{\beta \leqslant \alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} f, \tag{3.2.4}$$

其中 $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

证明 关于 $|\alpha|$ 应用归纳法证明式 (3.2.4). 首先, 设 $|\alpha| = 1$, 选任意的 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x) f(x) D^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_\Omega [f(x) D^\alpha(a(x)\varphi(x)) - f(x)(D^\alpha a(x))\varphi(x)]\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega (a(x) D^\alpha f(x) + f(x) D^\alpha a(x))\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而 $D^\alpha(af) = aD^\alpha f + fD^\alpha a$ 是所要证明的.

其次, 假定 $n < m$ 和式 (3.2.4) 对于所有的 $|\alpha| \leqslant n$ 和所有的 $a(x)$ 成立. 选取一满足 $|\alpha| = n+1$ 的 N 重指数 α, 则对于 $|\beta| = n$ 和 $|\gamma| = 1$ 成立 $\alpha = \beta + \gamma$. 因此对于以上的 $\varphi(x)$, 由归纳法假定可知

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)f(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_\Omega a(x)f(x)D^\beta(D^\gamma\varphi(x))\mathrm{d}x \\
&=(-1)^{|\beta|}\int_\Omega \sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^\sigma a(x)D^{\beta-\sigma}f(x)D^\gamma\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&=(-1)^{|\beta|+|\gamma|}\int_\Omega \sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^\gamma(D^\sigma a(x)D^{\beta-\sigma}f(x))\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}[D^\rho a(x)D^{\alpha-\rho}f(x)+ \\
&\qquad + D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

其中 $\rho = \sigma + \gamma$.

为了证明式 (3.2.4) 成立, 只需证明

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}\left[D^\rho a(x)D^{\alpha-\rho}f(x) + D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_\Omega\left[\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

事实上, 因为 $\binom{\beta}{\sigma-\gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma}$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\left[\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_\Omega\left[\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\left[\binom{\beta}{\sigma}+\binom{\beta}{\sigma-\gamma}\right]D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_\Omega\left[\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)+\sum_{\sigma_1\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma_1}D^{\sigma_1+\gamma}a(x)D^{\beta-\sigma_1}f(x)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_\Omega\left[\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)+\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma+\gamma}a(x)D^{\beta-\sigma}f(x)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_\Omega\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}\Big[D^\sigma a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)+D^\rho a(x)D^{\alpha-\rho}f(x)\Big]\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

于是

$$\int_{\Omega} a(x)f(x)D^{\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\left[\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}D^{\sigma}a(x)D^{\alpha-\sigma}f(x)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

因此根据弱导数定义得

$$D^{\alpha}(af) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\beta}aD^{\alpha-\beta}f. \qquad \square$$

定理 3.2.3 $W^{m,p}(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 空间是一 Banach 空间.

证明 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中任一基本序列, 即

$$\lim_{n,k\to\infty}\left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^{\alpha}(f_n-f_k)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0, \quad 1\leqslant p<\infty;$$

$$\lim_{n,k\to\infty}\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^{\alpha}(f_n-f_k)\|_{\infty} = 0.$$

因为对任一 N 重指数 α $(0\leqslant|\alpha|\leqslant m)$, 序列 $\{D^{\alpha}f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 中的基本序列. 因为 $L^p(\Omega)$ 是一 Banach 空间, 所以序列 $\{D^{\alpha}f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 $f_{\alpha}\in L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty,\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant m)$. 如果能证明

$$f_{\alpha}(x) = D^{\alpha}f(x), \tag{3.2.5}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f;W^{m,p}(\Omega)\| = 0,$$

其中 $f_{\alpha=0}(x)=f(x)$, 也就完成了定理 3.2.3 的证明. 下证式 (3.2.5) 成立.

由于 $L^p(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega)$, 所以每一个 $D^{\alpha}f_n(x)$ 和 $f_{\alpha}(x)$ 分别对应一个广义函数, 且分别记为 $l_{D^{\alpha}f_n}$ 和 $l_{f_{\alpha}}$. 下面证明 $l_{D^{\alpha}f_n}$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中收敛意义下收敛于 $l_{f_{\alpha}}$.

只证 $\alpha=0$ 的情况. 当 $1<p<\infty$ 时, 利用 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}|l_{f_n}(\varphi)-l_f(\varphi)| &= \left|\int_{\Omega}(f_n(x)-f(x))\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{p'}\|f_n-f\|_p, \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

其中 p' 是 $p(1<p<\infty)$ 的共轭指数. 当 $p=1$ 时, 有

$$|l_{f_n}(\varphi)-l_f(\varphi)| \leqslant \sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|\int_{\Omega}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x. \tag{3.2.7}$$

而当 $p=\infty$ 时, 直接得

$$|l_{f_n}(\varphi)-l_f(\varphi)| \leqslant \|f_n-f\|_\infty \int_\Omega |\varphi(x)|\mathrm{d}x. \tag{3.2.8}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $\|\varphi\|_{p'}(1<p'<\infty)$ 有界, $\sup\limits_{x\in\Omega}|\varphi(x)|$ 有界和 $\int_\Omega|\varphi(x)|\mathrm{d}x$ 有界, 所以由式 (3.2.6)~ 式 (3.2.8) 推得

$$\lim_{n\to\infty} l_{f_n}(\varphi)=l_f(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{3.2.9}$$

同理可证, 当 $1\leqslant|\alpha|\leqslant m$ 时, 成立

$$\lim_{n\to\infty} l_{D^\alpha f_n}(\varphi)=l_{f_\alpha}(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{3.2.10}$$

所以对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 和 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, 利用式 (3.2.9) 和式 (3.2.10) 导出

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_\alpha(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = l_{f_\alpha}(\varphi) &= \lim_{n\to\infty} l_{D^\alpha f_n}(\varphi)\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega D^\alpha f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f_n(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}l_{f_n}(D^\alpha\varphi)=(-1)^{|\alpha|}l_f(D^\alpha\varphi)\\
&=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

根据弱导数的定义知, 上式说明 $f_\alpha(x)=D^\alpha f(x)$. 等式 (3.2.5) 得证. □

定义 3.2.2 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是集合 $C_c^\infty(\Omega)$ 关于空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 范数的完备化空间.

因为 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是一 Banach 空间. 于是 $f\in W_0^{m,p}(\Omega)$ 的充要条件是存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset C_c^\infty(\Omega)$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $\|f_n-f, W^{m,p}(\Omega)\|=0$. 我们理解为 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 所包含的元素 $f\in W^{m,p}(\Omega)$, 使得对于所有的 $|\alpha|\leqslant m-1$"在 $\partial\Omega$ 上 $D^\alpha f(x)=0$ ".

为了证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一致凸性和可分性等, 我们将建立 $W^{m,p}(\Omega)$ 与乘积空间之间的关系.

设 α 是一 N 重指数, 用 $Q(m,N)$ 或 Q 表示满足条件 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$ 的 N 重指数 α 的个数. 显然此数依赖于 m 和 N. 把 Q 个 N 重指数依次序排列为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_Q$. 作乘积空间 $L_Q^p=\prod_1^Q L^p(\Omega)=L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)\times\cdots\times L^p(\Omega)$. 乘积空间 L_Q^p 中的元素 $F=(f_1,f_2,\cdots,f_Q)$ 的范数定义如下:

$$\|F;L_Q^p\|=\left[\sum_{j=1}^Q\|f_j;L^p(\Omega)\|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1\leqslant p<\infty;$$

$$\|F;L_Q^{\infty}\| = \max_{1\leqslant j\leqslant Q} \|f_j;L^{\infty}(\Omega)\|,$$

所以乘积空间 $L_Q^p(0\leqslant p\leqslant\infty)$ 是 Banach 空间.

下面建立 $W^{m,p}(\Omega)$ 和 L_Q^p 的一个子空间 $W(m,p)$ 之间的一个等距同构.

设 A 是

$$Af=(D^{\alpha_1}f,D^{\alpha_2}f,\cdots,D^{\alpha_Q}f)(\text{或记为}(D^{\alpha}f)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}),\quad \forall f\in W^{m,p}(\Omega) \tag{3.2.11}$$

确定的算子, 它把 $W^{m,p}(\Omega)$ 映入 L_Q^p 内. 由式 (3.2.11) 知, A 一对一地把 $W^{m,p}(\Omega)$ 映射到 L_Q^p 的一个子空间 $W(m,p)$ 内, 且 $\|f;W^{m,p}(\Omega)\|=\|Af;L_Q^p\|$, 因此算子 A 建立了 $W^{m,p}(\Omega)$ 和 L_Q^p 的一个子空间 $W(m,p)$ 之间的一个等距同构. 因为 $W^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间, 所以 $W(m,p)$ 是乘积空间 L_Q^p 中的一闭集.

引理 3.2.1 设 $1\leqslant p<\infty$, 则 L_Q^p 是可分空间.

证明 由定理 2.1.18 知, 当 $1\leqslant p<\infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 是可分空间. 定义

$$P_n=\{\chi_{\Omega_n}f|f\in P\},$$

其中 P 表示系数为有理数的多项式全体和 $\Omega_n=\left\{x\in\Omega\middle|\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>\frac{1}{n},\ |x|<n\right\}$. 记

$$\widetilde{P}=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n.$$

由于 P_n 是可列集, 所以 $\widetilde{P}$ 也是可列集. 从证明定理 2.1.18 的过程知, $\widetilde{P}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密. 因而 $\prod_1^Q\widetilde{P}$ 是 L_Q^p 中的可列集, 且在 L_Q^p 中稠密, 故 L_Q^p 是可分空间. □

定理 3.2.4 设 $1\leqslant p<\infty$, 则空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是可分的.

证明 当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 由于 $W^{m,p}(\Omega)$ 与 L_Q^p 的子空间 $W(m,p)$ 等距同构, 且 L_Q^p 是可分的, 所以 $W^{m,p}(\Omega)$ 也是可分的. □

由定理 3.2.4 知, $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$ 是一个可分的 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u,v)_m=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(D^{\alpha}u,D^{\alpha}v),$$

其中 (u,v) 是 $L^2(\Omega)$ 中的内积.

为了证明 $W^{m,p}(\Omega)(1<p<\infty)$ 是一致凸空间, 需要证明 L_Q^p 空间是一致凸的, 为此先证明以下几个引理.

引理 3.2.2 设 $0<p<1$, $m>1$, 则存在实数 $x_0\in(0,1)$ 使得成立不等式

$$(1-x)^p<1-x^m,\quad \forall x\in(0,x_0). \tag{3.2.12}$$

证明　作辅助函数 $f(x) = (1-x)^p - (1-x^m)$. 于是

$$f'(x) = -p(1-x)^{p-1} + mx^{m-1}.$$

显然 $f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是连续函数, 且 $f'(0) = -p$. 由于 $f'(x)$ 的连续性, 总存在 x_0, 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$. 从而 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是单调减少函数. 又因为 $f(0) = 0$, 所以

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in (0, x_0).$$

式 (3.2.12) 得证. □

引理 3.2.3　设 $0 < p < 1$, $m > 1$, 则存在一个常数 $p_1 \in (0,1)$, 使得不等式

$$(1-x)^p \leqslant 1 - p_1 x^m, \quad \forall x \in [0,1] \tag{3.2.13}$$

成立.

证明　因为引理 3.2.3 的条件和引理 3.2.2 的条件一样, 所以引理 3.2.2 的结论仍成立. 设 x_0 是由引理 3.2.2 确定. 显然不管 p_1 在 $(0,1)$ 中如何选取, 当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 或 $x \in (0, x_0)$ 时, 不等式式 (3.2.13) 总成立. 因此, 只需选取 p_1, 使得式 (3.2.14) 成立即可.

$$(1-x)^p \leqslant 1 - p_1 x^m, \quad \forall x \in [x_0, 1]. \tag{3.2.14}$$

显然 $\max_{x\in[x_0,1]}(1-x)^p = (1-x_0)^p$, 而 $\min_{x\in[x_0,1]}(1-p_1x^m) = 1-p_1$.

如果 p_1 由方程

$$1 - p_1 = (1-x_0)^p$$

确定, 即取 $p_1 = 1-(1-x_0)^p$, 则

$$(1-x)^p \leqslant 1 - [1-(1-x_0)^p]x^m, \quad \forall x \in [x_0, 1].$$

故式 (3.2.14) 成立. □

引理 3.2.4　设 $0 < p < 1$, $m > 1$, p_1 由引理 3.2.3 确定. 若 $0 \leqslant b \leqslant a \leqslant 1$, 那么不等式

$$(a-b)^p \leqslant a^p - p_1 b^m \tag{3.2.15}$$

成立.

证明　当 $b = 0$ 时, 式 (3.2.15) 总成立, 所以只需证明 $0 < b \leqslant a \leqslant 1$ 的情形即可. 由引理 3.2.3 推出

$$\begin{aligned}(a-b)^p &= a^p\left(1-\frac{b}{a}\right)^p \leqslant a^p\left[1 - p_1\left(\frac{b}{a}\right)^m\right]\\ &= a^p - p_1\frac{b^m}{a^{m-p}} \leqslant a^p - p_1 b^m.\end{aligned}$$

□

引理 3.2.5 设 $1 < p < \infty$, 则乘积空间 L_Q^p 是一致凸的.

证明 设 $F = (f_1, f_2, \cdots, f_Q)$ 和 $G = (g_1, g_2, \cdots, g_Q)$ 属于 L_Q^p, $\|F; L_Q^p\| = \|G; L_Q^p\| = 1$ 和对于任一 $\varepsilon \in (0, 2)$, $\|F - G; L_Q^p\| \geqslant \varepsilon$. 下面分两种情形证明 L_Q^p 空间的一致凸性.

(1) 当 $2 \leqslant p < \infty$ 时, 利用 Clarkson 不等式 (2.1.30) 有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F+G}{2}; L_Q^p\right\|^p &= \sum_{j=1}^{Q}\left\|\frac{f_j+g_j}{2}\right\|_p^p \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{Q}\left(\frac{1}{2}\|f_j\|_p^p + \frac{1}{2}\|g_j\|_p^p - \left\|\frac{f_j-g_j}{2}\right\|_p^p\right) \\ &= 1 - \left\|\frac{F-G}{2}; L_Q^p\right\|^p \leqslant 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

于是

$$\left\|\frac{F+G}{2}; L_Q^p\right\| \leqslant \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = 1 - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right];$$

或者利用引理 3.2.3 由式 (3.2.16) 推得

$$\left\|\frac{F+G}{2}; L_Q^p\right\| \leqslant \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 - p_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{mp}, \quad p_1 \in (0,1), \quad m > 1.$$

以上两式说明当 $2 \leqslant p < \infty$ 时, L_Q^p 是一致凸的.

(2) 当 $1 < p \leqslant 2$ 时, 利用 Clarkson 不等式 (2.1.32) 有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F+G}{2}; L_Q^p\right\|^p &= \sum_{j=1}^{Q}\left\|\frac{f_j+g_j}{2}\right\|_p^p = \sum_{j=1}^{Q}\left(\left\|\frac{f_j+g_j}{2}\right\|_p^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{Q}\left[\left(\frac{1}{2}\|f_j\|_p^p + \frac{1}{2}\|g_j\|_p^p\right)^{p'-1} - \left\|\frac{f_j-g_j}{2}\right\|_p^{p'}\right]^{\frac{p}{p'}}. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

因为 $1 < p \leqslant 2$, 所以 $0 < \dfrac{p}{p'} = p - 1 \leqslant 1$. 由于 $\|F; L_Q^p\| = \|G; L_Q^p\| = 1$, $p' - 1 = \dfrac{1}{p-1} \geqslant 1$, 因此

$$\left(\frac{1}{2}\|f_j\|_p^p + \frac{1}{2}\|g_j\|_p^p\right)^{p'-1} \leqslant 1.$$

任取一个数 $m > 1$, 根据引理 3.2.4$\left(\text{这里的 } \dfrac{p}{p'} \text{ 和 } m \text{ 相当于引理 3.2.4 中的 } p \text{ 和 } m\right)$ 和式 (3.2.17) 导出

$$\left\|\frac{F+G}{2}; L_Q^p\right\|^p \leqslant \sum_{j=1}^{Q}\left[\left(\frac{1}{2}\|f_j\|_p^p + \frac{1}{2}\|g_j\|_p^p\right)^{(p'-1)\frac{p}{p'}} - p_1\left(\left\|\frac{f_j-g_j}{2}\right\|_p^{p'}\right)^m\right], \quad p_1 \in (0,1). \tag{3.2.18}$$

由于 $(p'-1)\dfrac{p}{p'}=1$, 有

$$\left\|\frac{F+G}{2};L_Q^p\right\|^p \leqslant 1-p_1\sum_{j=1}^{Q}\left\|\frac{f_j-g_j}{2}\right\|_p^{p'm}. \tag{3.2.19}$$

因为 $\left\|\dfrac{F-G}{2};L_Q^p\right\|\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, 所以至少存在一个 j_0 满足

$$\left[Q\left\|\frac{f_{j_0}-g_{j_0}}{2}\right\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\left\|\frac{f_{j_0}-g_{j_0}}{2}\right\|_p\geqslant\frac{1}{2Q^{\frac{1}{p}}}\varepsilon. \tag{3.2.20}$$

利用式 (3.2.19) 和式 (3.2.20) 得

$$\left\|\frac{F+G}{2};L_Q^p\right\|^p\leqslant 1-p_1\left(\frac{\varepsilon}{2Q^{\frac{1}{p}}}\right)^{p'm}. \tag{3.2.21}$$

类似于 $2\leqslant p<\infty$ 的情况, 从式 (3.2.21) 可得

$$\left\|\frac{F+G}{2};L_Q^p\right\|\leqslant 1-\delta(\varepsilon). \tag{3.2.22}$$

这说明 L_Q^p, 当 $1<p\leqslant 2$ 时, 是一致凸的. □

于是有下面的结论.

定理 3.2.5　设 $1<p<\infty$, 则空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是一致凸的.

引理 3.2.6　设 $1\leqslant p<\infty$. 对于每个 $l\in(L_Q^p)'$ 有唯一的 $g\in L_Q^{p'}$ 与之对应, 使得对于一切 $f\in L_Q^p$

$$l(f)=\sum_{j=1}^{Q}\langle g_j,f_j\rangle, \tag{3.2.23}$$

其中 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_Q)$ 和 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_Q)$, 而且

$$\|l;(L_Q^p)'\|=\|g;L_Q^{p'}\|. \tag{3.2.24}$$

于是

$$(L_Q^p)'\cong L_Q^{p'}. \tag{3.2.25}$$

证明 如果 $1 \leqslant j \leqslant Q$ 且 $w \in L^p(\Omega)$, 设 $w_{(j)} = (0, \cdots, 0, w, 0, \cdots, 0)$ 是 L_Q^p 的元素, 它的第 j 个分量是 w, 其余分量都是零. 令 $l_j(w) = l(w_{(j)})$. 因为 $l_j \in (L^p(\Omega))'$, 由定理 2.2.1 和定理 2.2.2 知存在唯一的 $g_j \in L^{p'}(\Omega)$, 使得对一切 $w \in L^p(\Omega)$, 有

$$l(w_{(j)}) = l_j(w) = \langle g_j, w \rangle.$$

如果 $f \in L_Q^p$, 则

$$l(f) = l\left(\sum_{j=1}^{Q} f_{j(j)}\right) = \sum_{j=1}^{Q} l(f_{j(j)}) = \sum_{j=1}^{Q} \langle g_j, f_j \rangle.$$

于是式 (3.2.23) 成立. 利用函数及离散型的 Hölder 不等式, 得

$$|l(f)| \leqslant \sum_{j=1}^{Q} \|f_j\|_p \|g_j\|_{p'} \leqslant \|g; L_Q^{p'}\| \|f, L_Q^p\|,$$

所以 $\|l; (L_Q^p)'\| \leqslant \|g; L_Q^{p'}\|$. 事实上, 这两个范数是相等的. 当 $1 < p < \infty$ 和 $1 \leqslant j \leqslant Q$ 时, 令

$$f_j(x) = \begin{cases} |g_j(x)|^{p'-2}\overline{g_j(x)}, & \text{当 } g_j(x) \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } g_j(x) = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

则

$$f_j \in L^p(\Omega).$$

易证 $|l(f_1, f_2, \cdots, f_Q)| = \|g; L_Q^{p'}\|^{p'} = \|g; L_Q^{p'}\| \|f; L_Q^p\|$. 所以式 (3.2.24) 成立. 当 $p = 1$ 时, 可以选 k 使得 $\|g_k\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant Q} \|g_j\|_\infty$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个测度有限且非零的可测集 $A \subset \Omega$, 使得对于 $x \in A$, 有 $|g_k(x)| \geqslant \|g_k\|_\infty - \varepsilon$. 令

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{g_k(x)}}{|g_k(x)|}, & \text{当 } x \in A \text{ 且 } g_k(x) \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是 } \Omega \text{ 的其他点时}, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} l(f_{(k)}) = \langle g_k, f \rangle &= \int_A |g_k(x)| \mathrm{d}x \geqslant (\|g_k\|_\infty - \varepsilon) \int_A \mathrm{d}x \\ &= (\|g_k\|_\infty - \varepsilon) \|f\|_1 = (\|g; L_Q^\infty\| - \varepsilon) \|f_{(k)}; L_Q^1\|. \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

由于 ε 是任意的且式 (3.2.26), 因此在这种情形下式 (3.2.24) 也成立. 于是式 (3.2.25) 成立. □

引理 3.2.7 设 $1 < p < \infty$, 则乘积空间 L_Q^p 是自反的.

证明 因为

$$(L_Q^p)' \cong L_Q^{p'}, \quad (L_Q^{p'})' \cong L_Q^p,$$

所以

$$(L_Q^p)'' \cong L_Q^p. \qquad \square$$

定理 3.2.6 设 $1 < p < \infty$, 则空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是自反的.

3.3 单位分解定理

定理 3.3.1 设 K 是 $\mathbb{R}^N$中的有界闭集和 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 是一些开集, 且 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$, 则存在函数 $f_i \in C_c^\infty(O_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 且满足

(1) 在 $\mathbb{R}^N$ 上, $f_i(x) \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \leqslant 1$;

(2) 在包含 K 的某一个开集上 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$.

证明 证明分两步: 第一步, 证明可找到 n 个闭集 $K_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 满足 $K_j \subset O_j$ 和 $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j$. 事实上, 令

$$\eta_j(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x, O_j^c), & \text{当 } O_j^c \neq \varnothing \text{ 时}, \\ \infty, & \text{当 } O_j^c = \varnothing (j = 1, 2, \cdots, n) \text{ 时} \end{cases}$$

和

$$F_i(x) = \{x | \eta_i(x) \geqslant \eta_j(x), j = 1, 2, \cdots, n\} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

集合 $F_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是闭的. 因此集合

$$K_i = K \bigcap F_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.3.1}$$

是闭的. 注意到对于每一个 $x \in \mathbb{R}^N$, $\eta_i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中至少有一个不被其他的超过, 即 x 至少属于集合 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 之一. 所以

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

由式 (3.3.1) 得

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i = \bigcup_{i=1}^{n} (K \bigcap F_i) = K \bigcap \bigcup_{i=1}^{n} F_i = K.$$

下面证明 $K_i \subset O_i(i=1,2,\cdots,n)$, 为此假定 $x \in K_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 由式 (3.3.1) 知 $x \in K$. 由定理假定 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$, 所以存在一个 j, 使得 $x \in O_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. 若 $x \in O_i$, 则 $K_i \subset O_i$, 即得所要的结果. 假定 $x \overline{\in} O_i$, 即与我们证的结论相反, 于是 $\eta_i(x)=0$, $\eta_j(x)>0$, 从而 $x \overline{\in} F_i$. 由式 (3.3.1) 知, 这与假定 $x \in K_i$ 矛盾. 所以我们断言 $K_i \subset O_i(i=1,2,\cdots,n)$.

第二步, 构造函数 $f_i(x)$. 利用引理 3.1.1 存在一组函数 $g_i \in C_c^\infty(O_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $0 \leqslant g_i(x) \leqslant 1$ 且在 K_i 的某个邻域上，有

$$g_i(x)=1.$$

令

$$f_1(x)=g_1(x), \quad f_i(x)=g_i(x)(1-g_1(x))\cdots(1-g_{i-1}(x)), \quad i=2,\cdots,n.$$

显然, 函数 $f_i(x) \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$, $f_i \in C_c^\infty(O_i)$. 利用归纳法可知

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x)=1-(1-g_1(x))\cdots(1-g_m(x)), \quad m=1,2,\cdots,n.$$

因此根据 $g_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 的性质得到在 $\mathbb{R}^N$ 上处处有 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \leqslant 1$ 和在 K 的某一个邻域上有 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=1$. 于是 $f_i(x)$ 满足定理所要求的结论. □

定义 3.3.1 开集族 $O=\{O_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 称为集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ 的局部有限开覆盖, 如果满足

(i) $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$;

(ii) 对于 $\mathbb{R}^N$ 中任一有界闭集 G, $\{O_n\}$ 中只有有限个开集与 G 的交不空 (这样的局部有限集合必须是可数的, 因此它的元素可排成序列. 如果 K 是闭的, 则 K 的任一局部开覆盖有局部有限的子覆盖).

开集族 O 称为集合 K 的开覆盖, 如果只满足条件 (i).

现在证明单位分解定理. 函数集合 $\{f_i(x)\}$ 称为单位分解, 更确切地说, 它是关于覆盖 O 的单位分解.

定理 3.3.2(单位分解定理) 设 K 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个集合, 开集族 $O=\{O_n\}$ 是 K 的一个局部有限开覆盖, 则在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (有时可能只有有限个) 满足

(i) 对于每一个 $f_n(x)$ 成立

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

(ii) 如果 $G \subset\subset K$, 函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中只有有限个函数在 G 上不等于零;

(iii) 对于任一 $f_n(x)$, O 中必存在一个 O_n, 使得 $\mathrm{supp} f_n(x) \subset O_n$;

(iv) 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1, \quad \forall x \in K.$$

证明　分三种情形证明.

(1) K 为有界闭集. 从 O 中可以选出有限个开集, 为方便起见, 就假定为 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 且满足 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$. 从已证的定理 3.3.1 知道, 存在函数 $f_i \in C_c^{\infty}(O_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足

(a) 在 $\mathbb{R}^N$ 上 $f_i(x) \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \leqslant 1$;

(b) 在包含 K 的某一个开集上 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$.

显然所得的函数 $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ 满足定理 3.3.2 中的结论 (i)~(iv).

(2) K 为开集. 用 ∂K 表示 K 的边界. 作集合

$$G_n = \left\{ x \in K \middle| \, |x| \leqslant n, \ \ \mathrm{dist}(x, \partial K) \geqslant \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $G_0 = \varnothing$, G_n 是闭集. 用 G_n' 表示由 G_n 的内点组成的集合, 可能开始几个 G_n 为空集. 再作集合

$$K_n = G_n - G_{n-1}', \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因为 G_n 都是闭集, 且 $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$, 所以 K_n 是有界闭集, 可能开始几个 K_n 是空集, 但不影响讨论.

作开集族

$$\widetilde{O}_1 = \widetilde{O}_2 = \left\{ O_n \bigcap G_3' \middle| n = 1, 2, \cdots \right\},$$

$$\widetilde{O}_i = \left\{ O_n \bigcap (G_{i+1}' \bigcap G_{i-2}^c) \middle| n = 1, 2, \cdots \right\}, \quad i \geqslant 3.$$

显然只要在 $\widetilde{O}_i$ 中取有限个开集就能覆盖 K_i, 为方便起见, 设

$$\widetilde{O}_i = \{O_{i1}, O_{i2}, \cdots, O_{in_i}\}$$

是 K_i 的开覆盖.

根据已证明的情形 (1), 存在函数 $g_{ij}(x)(j=1,2,\cdots,n_i)$ 满足

(a) $g_{ij}\in C_c^\infty(O_{ij})$;

(b) 在 $\mathbb{R}^N$ 上满足

$$g_{ij}(x)\geqslant 0,\quad \sum_{j=1}^{n_i}g_{ij}(x)\leqslant 1,\quad i=1,2,\cdots;$$

(c) 在 K_i 的某个邻域上 $\sum\limits_{j=1}^{n_i}g_{ij}(x)=1$.

在 K 中任一有界闭集 G 上, 函数序列 $\{g_{ij}(x)\}(j=1,2,\cdots,n_i;i=1,2,\cdots)$ 中只有有限个函数不为零. 事实上, 因为 G 是 K 中的有界闭集, 所以存在自然数 N_0, 使得 $G\subset G_{N_0}$. 当 $n>N_0+1$ 时, $G\bigcap K_n=\varnothing$ 且

$$\bigcup_{i=1}^{N_0}K_i\supset G.$$

故对 $j=1,2,\cdots,n_i;\ i=1,2,\cdots,N_0$, $\{g_{ij}(x)\}$ 在 G 上不为零. 因而函数

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}g_{ij}(x)$$

属于 $C^\infty(K)$, 且在 K 上 $g(x)>0$. 作函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{g_{ij}(x)}{g(x)}.$$

显然有对于 $x\in K$, $f(x)=1$. 易证由函数 $f_{ij}(x)=\dfrac{g_{ij}(x)}{g(x)}$ 构成的序列 $\{f_{ij}(x)\}(j=1,2,\cdots,n_i;i=1,2,\cdots)$ 满足结论 (i)~(iv).

(3) K 是 $\mathbb{R}^N$ 中任一集合. 记 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}O_i$, G 是开集, O 是 G 的开覆盖. 因为由情形 (2) 知, 对 G 存在满足结论 (i)~(iv) 的序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$. 显然对 K 来讲, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 也满足结论 (i)~(iv). □

3.4 区域的几何性质

定义在区域 Ω 上的索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的许多性质, 依赖于 Ω 的正则性. 例如, 第 4 章介绍的索伯列夫空间的嵌入定理和插值定理, 函数的定义域 Ω 需要满足一定的几何条件. 下面考虑五类几何条件, 为此先引进一些几何概念和符号.

令 v 是 $\mathbb{R}^N$ 中的非零向量, 并对每一 $x \neq 0$ 令 $\angle(x,v)$ 表示向量 x 和 v 之间的夹角. 对给定这样的 v, $\rho > 0$ 和满足 $0 < \kappa \leqslant \pi$ 的 κ, 集合

$$C_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^N \middle| x = 0 \text{ 或 } 0 < |x| \leqslant \rho, \angle(x,v) \leqslant \frac{\kappa}{2}\right\}$$

称为顶点在原点高为 ρ, 轴向为 v 和口径角为 κ 的有限锥.

称集合 $C_x = \{x + y | y \in C_0\}$ 是顶点在 x 的有限锥. C_x 是 C_0 经平移运动得到的, 平移量是 x. 当 $N = 2$ 时, 称有限锥为有限扇形.

设 $y_1, y_2, \cdots, y_N \in \mathbb{R}^N$, 可把它们看成 N 个向量. 如果这 N 个向量线性无关, 就称集合

$$P_0 = \left\{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \middle| 0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, \cdots, N\right\}$$

为平行多面体, 其中有一个顶点在坐标原点. $P_x = \{x + y | y \in P_0\}$ 是 P_0 经过平移运动得到, 平移量是 x. 当 $N = 2$ 时, P_0 是由向量 y_1 和 y_2 合成的平行四边形.

现在定义开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 可能具有的五个正则性条件.

定义 3.4.1 称 Ω 具有线段条件, 如果对于每个 $x \in \partial\Omega$ 有一个邻域 O_x 和非零向量 y_x, 使得如果 $z \in \overline{\Omega} \bigcap O_x$, 则对于 $0 < t < 1$, $z + t y_x \in \Omega$. 因为 Ω 的边界必须是闭的, 可以用具有一局部有限子覆盖 $\{O_1, O_2, \cdots\}$ 和对应的向量 $y_1, y_2, \cdots$ 代替它的开覆盖, 使得如果对于某个 i, $x \in \overline{\Omega} \bigcap O_i$, 则对于 $0 < t < 1$, $x + t y_i \in \Omega$.

定义 3.4.2 称 Ω 具有锥条件, 如果 Ω 中的任一点 x 都是有限锥 $C_x (\subset \Omega)$ 的顶点, 并且每一个有限锥 C_x 全同于过原点的某一有限锥 C_0 (注意 C_x 不需要都由 C_0 经平移运动得到, 但是可以由刚体运动得到. 刚体运动是由平移和旋转两部分组成). 若 Ω 又是有界的, 则称 Ω 为有界锥形区域.

因此可以说有界锥形区域是有限锥 C_0 在有限范围内经刚体运动留下的迹, 且这种运动不要求具有连续性.

定义 3.4.3 称 Ω 具有一致锥条件, 如果 $\partial\Omega$ 有局部有限开覆盖 $\{O_i\}$ 以及对应的有限锥序列 $\{C_i\}$, 而每一个 C_i 全等于某一固定的有限锥 C, 使得

(1) 对某一有限数 M, 每一 O_i 直径小于 M;

(2) 对某一 $\delta > 0$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_i \supset \Omega_\delta \triangleq \{x \in \Omega | \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$;

(3) 对每个 i, $\bigcup\limits_{x \in \Omega \bigcap O_i} (x + C_i) \triangleq Q_i \subset \Omega$;

(4) 对某一有限数 R, 集合 Q_i 中任意 $R+1$ 个交于空集.

定义 3.4.4 称 Ω 具有强局部 Lipschitz 条件, 如果存在正数 δ, M 和 $\partial\Omega$ 的一个局部有限开覆盖 $\{O_i\}$, 以及对每一个 O_i 有一 $N-1$ 个实变量的实值函数 f_i, 使得以下条件成立:

(1) 对于某一个有限数 R, 集合 $\{O_i\}$ 中的任意 $R+1$ 个交于空集;

(2) 对于满足 $|x-y|<\delta$ 的每一对点 $x, y \in \Omega_\delta$, 存在 i, 使得

$$x, y \in V_i \triangleq \{x \in O_i \big| \operatorname{dist}(x, \partial O_i) > \delta\};$$

(3) 每一个函数 f_i 满足具有常数 M_0 的 Lipschitz 条件, 即如果 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N-1})$ 和 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{N-1})$ 是 $\mathbb{R}^{N-1}$ 中的两点, 则

$$|f_i(\xi)-f_i(\eta)| \leqslant M_0|\xi-\eta|;$$

(4) 对于 O_i 内的某一笛卡儿坐标系 $(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{iN})$, $\partial\Omega_i=\partial\Omega\bigcap O_i(i=1,2,\cdots)$ 在此坐标系中可用满足 Lipschitz 条件的函数 $\xi_{iN}=f_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{iN-1})$ 来表示. 集合 $\Omega\bigcap O_i$ 由不等式

$$\xi_{iN} < f_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{iN-1})$$

表示.

如果 Ω 具有强局部 Lipschitz 条件, 且 Ω 是有界区域, 则称 Ω 为 L 型区域.

定义 3.4.5 设 Ω 和 G 是 $\mathbb{R}^N$ 中的两个区域. N 维向量函数 $y=\phi(x)$ 确定一个变换 F, 把 Ω 一一变换成 G, 并且存在逆变换 $F^{-1}x=\psi(y)=\phi^{-1}(y)$, 把 G 变换成 Ω. 若写成分量形式, 就有 N 个函数

$$y_i=\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_N), \quad i=1,2,\cdots,N, \tag{3.4.1}$$

把 Ω 变换成 G. 式 (3.4.1) 的反函数

$$x_i=\psi_i(y_1, y_2, \cdots, y_N), \quad i=1,2,\cdots,N, \tag{3.4.2}$$

把 G 变换成 Ω.

如果 $\varphi_i \in C^m(\overline{\Omega})$, $\psi_i \in C^m(\overline{G})(i=1,2,\cdots,N)$, 则称变换 F 是 m 次光滑的.

定义 3.4.6 称 Ω 具有一致 C^m-正则性条件, 如果存在 $\partial\Omega$ 的一个局部有限开覆盖 $\{O_i\}$, 以及对应的 m 次光滑一一变换的序列 $\{\varphi_i(x)\}$, $\varphi_i(x)$ 把 O_i 映射到球 $B=\{y \in \mathbb{R}^N \big|\, |y|<1\}$ 上, 使得

(1) 对于某个 $\delta>0$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \psi_i\left(\left\{y \in \mathbb{R}^N \big|\, |y|<\frac{1}{2}\right\}\right) \supset \Omega_\delta$, 其中 $\psi_i(y)=\varphi_i^{-1}(y)$;

(2) 对于某个有限数 R, 集合 $\{O_i\}$ 中的任意 $R+1$ 个交于空集;

(3) 对于每一个 i, $\varphi_i(O_i\bigcap\Omega)=\{y \in B \big|\, y_N>0\}=B_+, \psi_i(B_+)=O_i\bigcap\Omega$;

(4) 对于每一个 i, $\varphi_i(O_i\bigcap\partial\Omega)=\{y \in B \big|\, y_N=0\}=B_0, \psi_i(B_0)=O_i\bigcap\partial\Omega$;

(5) 若 $(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \cdots, \varphi_{iN})$ 和 $(\psi_{i1}, \psi_{i2}, \cdots, \psi_{iN})$ 分别表示 φ_i 和 ψ_i 的分量, 则存在有限数 M_1, 使得对所有的 N 重指数 α, $|\alpha| \leqslant m$, 对所有的 j, $1 \leqslant j \leqslant N$, 和对所有的 i, 有

$$|D^\alpha \varphi_{ij}(x)| \leqslant M_1, \quad x \in O_i,$$

$$|D^\alpha \psi_{ij}(y)| \leqslant M_1, \quad y \in B.$$

特别注意除了锥条件外, 所有以上具有其他条件的区域都要求 Ω 的边界是 $N-1$ 维的和 Ω 只在它的边界一侧.

容易验证对于区域 Ω:

具有一致 C^m-正则性条件 $(m \geqslant 2)$ 蕴涵具有强局部 Lipschitz 条件;

具有强局部 Lipschitz 条件蕴涵具有一致锥条件;

具有一致锥条件蕴涵具有线段条件.

还有 Ω 具有一致锥条件蕴涵具有锥条件. 但 Ω 具有锥条件不蕴涵以上其他条件. 例如,

$$A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \big| 0<|x_1|<1,\ 0<x_2<1\} \bigcup \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \big| x_1=0,\ \frac{1}{2}<x_2<1\right\}$$

是有界锥形区域, 但不是 L 型区域, 因为 A 不在边界 ∂A 的一侧.

下面举例说明在 $\mathbb{R}^2$ 中有界锥形区域的例子和不是有界锥形区域的例子.

图 3.4.1 中画有阴影线的二维区域, 在每一种情况, 我们可以在这个区域 Ω 内的每一点 x 为顶点作一个小扇形, 它的每一点都位于 Ω 内, 所以这些画有阴影线的区域都是有界锥形区域. 但是在图 3.4.2 中有尖点的区域不是有界锥形区域, 因为以尖点作顶点的扇形不能全部位于这个区域的内部.

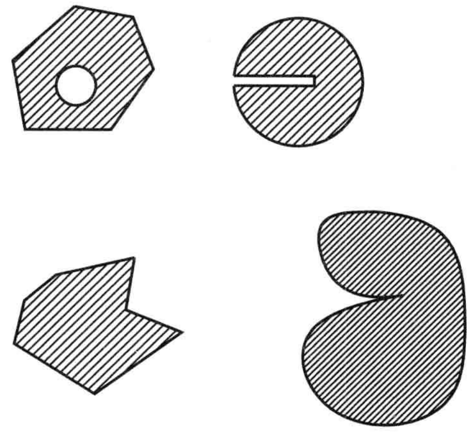


图 3.4.1

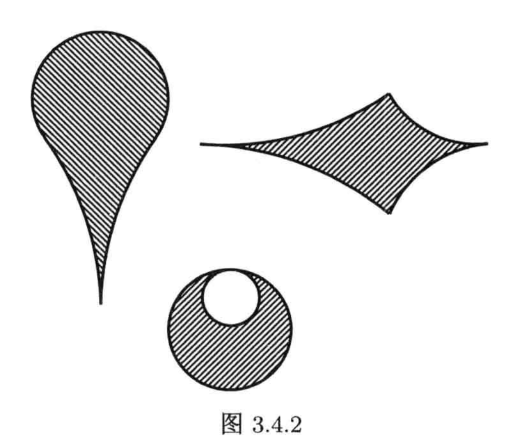


图 3.4.2

尽管具有锥条件的区域不蕴涵强局部 Lipschitz 条件, 从下面将要证明的 Gagliardo 定理知道, 有界锥形区域和 L 型区域的关系极为密切, 有界锥形区域是由有限个 L 型区域的并组成.

引理 3.4.1 设 A 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界集合, $\overline{A}$ 表示 A 的闭包, P_0 是有一顶点在原点的平行多面体, 则成立

$$\bigcup_{x\in A}(x+P_0)=\bigcup_{x\in\overline{A}}(x+P_0).$$

证明 因为 $\bigcup\limits_{x\in\overline{A}}(x+P_0)\supset\bigcup\limits_{x\in A}(x+P_0)$, 所以只需证明 $\bigcup\limits_{x\in A}(x+P_0)\supset\bigcup\limits_{x\in\overline{A}}(x+P_0)$ 就够了, 即只需证明, 当任意的 $x_0\in\overline{A}$, 但 $x_0\overline{\in}A$ 时, 成立

$$x_0+P_0\subset\bigcup_{x\in A}(x+P_0). \tag{3.4.3}$$

由于 $x_0\in\overline{A}$, 但 $x_0\overline{\in}A$, 因此在 A 中存在点序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0. 当点 $y\in(x_0+P_0)$ 时, y 一定属于 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i+P_0)$, 也就是 $y\in\bigcup\limits_{x\in A}(x+P_0)$. 于是式 (3.4.3) 成立. □

定理 3.4.1(Gagliardo 定理、Ω 的分解[33]) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 满足锥条件, 则存在 Ω 的有限开子集 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_{m_0}$, 具有下面性质:

(1) $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{m_0}\Omega_i$;

(2) 每一个 Ω_i 对应一子集 $A_i\subset\Omega_i$和一个顶点在原点的开平行多面体 P_i, 使得 $\Omega_i=\bigcup\limits_{x\in A_i}(x+P_i)$. 如果 Ω 是有界的和 $d>0$ 是给定的, 则可以利用每一个 A_i

的直径小于 d 的集合完成以上分解.

最后如果 Ω 是有界的和 $d>0$ 充分小, 则每个 Ω_i 满足强局部 Lipschitz 条件.

证明 设 C 是顶点在原点 O 的有限锥, 使得任意 $x\in\Omega$ 都是同 C 全等的有限锥 $C_x\subset\Omega$ 的顶点. 我们可以选择有限个有限锥 $C_1,C_2,\cdots,C_k$, 而每一个顶点在 O(每一个同 C 有一样的高, 但每个口径角都小于 C 的口径角), 使得任意顶点在 O 与 C 全等的有限锥必须包含锥 C_j 中的一个. 对于每一 j, 令 P_j 是有一个顶点在原点的一个开平行多面体, $P_j\subset C_j$ 和有正的测度, 则对于每一个 $x\in\Omega$, 存在 j, $1\leqslant j\leqslant m_0$, 使得

$$x+P_j\subset x+C_j\subset C_x\subset\Omega.$$

因为 Ω 是开的和 $\overline{x+P_j}$ 是紧的, 对于充分接近 x 的任意 y, $y+P_j\subset\Omega$. 所以对于某个 j 和某个 $y\in\Omega$ 每一个 $x\in\Omega$ 属于 $y+P_j$. 令 $A_j=\{y\in\overline{\Omega}\mid y+P_j\subset\Omega\}$ 和 $\Omega_j=\bigcup\limits_{y\in A_j}(y+P_j)$. 于是 $\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{m_0}\Omega_j$. 现在假定 Ω 是有界的和 $d>0$ 是给定的. 如果 $\operatorname{diam}(A_i)\geqslant d$, 可以把 A_j 分解为集合 A_{ji} 的有限个并, 使得 $\operatorname{diam}(A_{ji})<d$. 定义对应的平行多面体 $P_{ji}=P_j$. 因此我们重新命名集合 A_{ji} 的总体分为单独的有限族, 仍记为 $\{A_j\}$, 并如上定义 Ω_j.

图 3.4.3 试图对于 $\mathbb{R}^2$ 中的区域

$$\begin{aligned}
&\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0<|x|<1,0<y<1\},\\
&C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x>0,y>0,x^2+y^2<\frac{1}{4}\right\},\\
&d<0.98
\end{aligned}$$

说明前面那些说法.

最后, 我们说明如果 d 充分小, 则 Ω_j 满足强局部 Lipschitz 条件. 为了书写符号简单起见, 用 $G=\bigcup\limits_{x\in A}(x+P)$ 来代替 Ω_j, 其中 $\operatorname{diam}(A)<d$ 和 P 是固定的平行多面体. 下面说明如果 d 充分小, G 满足强局部 Lipschitz 条件. 对于 P 的每一个顶点 v_j, 令 $Q_j=\{y=v_j+\lambda(x-v_j)|\ x\in P,\lambda>0\}$ 是由 P 生成的顶点为 v_j 的无限锥, 则 $P=\bigcap Q_j$, 这里是对 P 的所有 2^N 个顶点取交集. 设 $G_j=\bigcup\limits_{x\in A}(x+Q_j)$. 令 δ 是从 P 的中心到 P 的边界的距离和令 B 为半径 $\sigma=\dfrac{\delta}{2}$ 的任意球. 对于任意固定的 $x\in G$, B 不能与 $x+P$ 的相对两面相交, 所以我们可以找到 P 的顶点 v_j, 使得 $x+v_j$ 是 $x+P$ 与 B 相交的所有面的公共点, 如果任意这样的面存在. 于是 $B\bigcap(x+P)=B\bigcap(x+Q_j)$. 事实上, B 与平行多面体相对位置有如下形式:

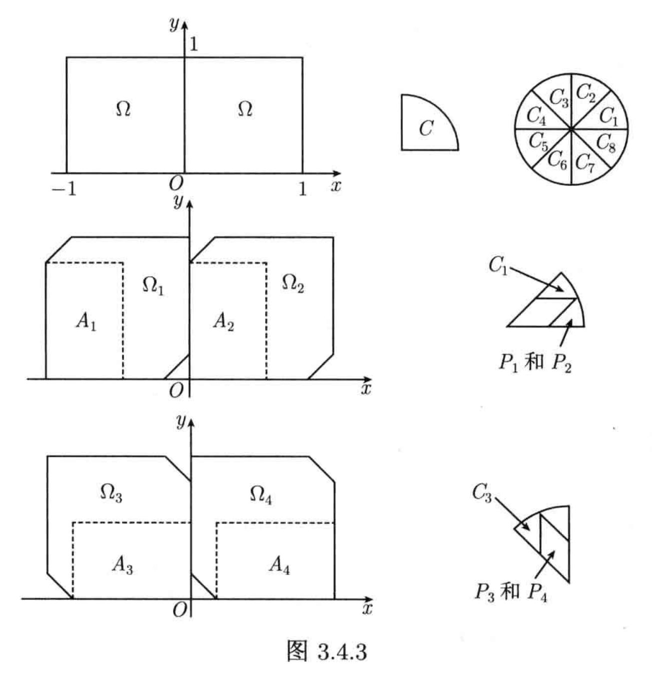


图 3.4.3

(1) 球 B 与 $x+P$ 的相邻 N 个面相交, 设相邻 N 面的交点为 v_j, 则成立 $B\bigcap(x+P)=B\bigcap(x+Q_j)$;

(2) 球 B 只与 $x+P$ 的一个面相交, 于是

$$B\bigcap(x+P)=B\bigcap(x+Q_j);$$

(3) 球 $B\subset x+P$, 则成立 $B\bigcap(x+P)=B\bigcap(x+Q_j)(j=1,2,\cdots,2^N)$;

(4) 球 $B\bigcap(x+P)=\varnothing$, 则必存在一个 j, 使得成立

$$B\bigcap(x+P)=B\bigcap(x+Q_j).$$

因此, 无论哪种情况, 总能找到一个 j, 成立

$$B\bigcap(x+P)=B\bigcap(x+Q_j).$$

现在设 $x,y\in A$ 并假定 B 能和 $x+P$ 与 $y+P$ 的相应对面相交, 即存在 P 对面上两点 a 和 b, 使得 $x+a\in B$ 及 $y+b\in B$, 所以

$$\begin{aligned}d&\geqslant \mathrm{dist}(x,y)=\mathrm{dist}(x+b,y+b)\\&\geqslant \mathrm{dist}(x+b,x+a)-\mathrm{dist}(x+a,y+b)\\&\geqslant 2\delta-2\sigma=\delta.\end{aligned}$$

因此推出如果 $d<\delta$, 则对于任意的 $x,y\in A$, B 不能与 $x+P$ 和 $y+P$ 的相应对面相交. 故对于任意某个固定的 j, $B\bigcap(x+P)=B\bigcap(x+Q_j)$ 与 $x\in A$ 无关, 从而 $B\bigcap G=B\bigcap G_j$.

在 B 内取坐标 $\xi=(\xi',\xi_N)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N-1},\xi_N)$, 使得 ξ_N 轴位于从 P 的中心到顶点 v_j 的向量方向, 则 $B\bigcap(x+Q_j)$ 在 B 内由形如 $\xi_N<f_x(\xi')$ 的不等式确定, 其中 f_x 满足一个常数与 x 无关的 Lipschitz 条件. 所以 $B\bigcap G_j$, 因此 $B\bigcap G$, 由 $\xi_N<f(\xi')$ 确定, 其中 $f(\xi')=\sup\limits_{x\in A}f_x(\xi')$ 本身是一个 Lipschitz 连续函数. 因为对于 G 的边界上任意点的邻域 B 都可以这样做. 所以 G 满足强局部 Lipschitz 条件. □

现在列出 L 型区域 Ω 的一些性质.

(1) 存在开集 $O_1,O_2,\cdots,O_{m_0}$, 使得 $\partial\Omega\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m_0}O_i$;

(2) 存在开集 O_0, 使得 $\Omega\subset\bigcup\limits_{i=0}^{m_0}O_i$;

(3) 设 $\Omega_\delta=\{\,x\in\Omega|\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega\,)<\delta\}$, 则存在一个适当小的 δ_1, 只要 $|x-y|<\delta_1$, 且 $x,y\in\Omega_{\delta_1}$, 就可以找到 j, 使得

$$x,y\in V_j=\{\,x\in O_j\big|\mathrm{dist}(x,\partial O_j)>\delta_1\,\};$$

(4) 对每一个 j, 存在一个多面体 P_j, P_j 有一个顶点在原点 O, 只要 $x\in V_j\bigcap\Omega$, 就有 $x+P_j\subset\Omega$, 由此推出 L 型区域是有界锥形区域.

(5) 存在这样的数 $\delta_2>0$(且 $\delta_2<\delta_1$) 和常数 K, 使得当 $x,y\in V_j\bigcap\Omega$ 和 $|x-y|<\delta_2$ 时, 必存在 $z\in(x+P_j)\bigcap(y+P_j)$, 并成立不等式

$$|x-z|+|y-z|\leqslant K|x-y|.$$

(6) 存在这样的一个多面体 P_0, 使得只要 $x\in\Omega-\Omega_{\delta_1}$, 就有 $x+P_0\subset\Omega$. 存在这样的 $\delta_3>0$, 使得只要 $x,y\in\Omega-\Omega_{\delta_1}$ 和 $|x-y|<\delta_3$, 就有 $x+P_0$ 和 $y+P_0$ 必相交.

(7) 从定理 3.4.1 的证明过程可知, 存在向量 y_i, 当 $x\in\partial\Omega\bigcap O_i$ 时, $x+ty_i\in\Omega(0<t<1)$. 当 $N=2$ 时, y_i 可取平行局部坐标轴 ξ_{i2} 的向量.

3.5 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的稠密性

定理 3.5.1 设 $1\leqslant p<\infty$, $f\in W^{m,p}(\Omega)$, $K\subset\subset\Omega$, 则 $J_\delta f(x)$ 在 $W^{m,p}(K)$ 中收敛于 $f(x)$.

证明 设 α 是 N 重指数, $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$. 取 $\delta<\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)$. 作函数

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\overline{\in}\Omega,\end{cases}$$

则对任意的 $\varphi\in C_c^\infty(K)$ 可证明

$$\int_K J_\delta f(x)D_x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_K\varphi(x)J_\delta(D_x^\alpha f(x))\mathrm{d}x, \tag{3.5.1}$$

其中 D_x 表示对 x 求弱导数. 若式 (3.5.1) 成立, 说明在弱导数意义下 $D_x^\alpha J_\delta f=J_\delta D_x^\alpha f(x)$. 下面证明式 (3.5.1).

$$\begin{aligned}\int_K J_\delta f(x)D_x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^N}D_x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{f}(y)j_\delta(x-y)\mathrm{d}y\\ &=(-1)^{|\alpha|}\delta^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{f}(y)D_x^\alpha\Big(j\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)\Big)\mathrm{d}y\\ &=(-1)^{|\alpha|}\delta^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{f}(x-\delta t)D_t^\alpha(j(t))\delta^{-|\alpha|}\delta^N\mathrm{d}t\\ &=(-1)^{|\alpha|}\delta^{-|\alpha|}\int_K\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{|t|\leqslant 1}f(x-\delta t)D_t^\alpha(j(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 δ 充分小时, 上式右端函数 $f(x-\delta t)$ 的变量 $x-\delta t\in\Omega$, 所以

$$\begin{aligned}\int_K J_\delta f(x)D_x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x&=\delta^{-|\alpha|}\int_K\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{|t|\leqslant 1}D_t^\alpha f(x-\delta t)j(t)\mathrm{d}t\\ &=(-1)^{|\alpha|}\int_K\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{|x-y|\leqslant\delta}D_y^\alpha f(y)j\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)\delta^{-N}\mathrm{d}y\\ &=(-1)^{|\alpha|}\int_K\varphi(x)\mathrm{d}x\int_\Omega D_y^\alpha f(y)j_\delta(x-y)\mathrm{d}y\\ &=(-1)^{|\alpha|}\int_K\varphi(x)J_\delta(D_x^\alpha f(x))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

上式说明在弱导数意义下

$$D_x^\alpha J_\delta f=J_\delta D_x^\alpha f.$$

由弱导数的性质 (定理 3.2.1(3)) 知, 如果 $f\in W^{m,p}(\Omega)$, 则 $f\in W^{m,p}(K)$. 从而 $D_x^\alpha f\in L^p(K)(\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant m\ )$. 再由定理 2.1.20(3) 推出

$$\lim_{\delta\to 0}\|J_\delta D_x^\alpha f-D_x^\alpha f;L^p(K)\|=0.$$

利用 $D_x^\alpha J_\delta f=J_\delta D_x^\alpha f$, 上式变为

$$\lim_{\delta\to 0}\|D_x^\alpha J_\delta f-D_x^\alpha f;L^p(K)\|=0,$$

即对一切 α($0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$) 成立

$$\lim_{\delta\to 0}\|J_\delta f - f; W^{m,p}(K)\| = 0. \qquad \square$$

定理 3.5.2 设 Ω 满足线段条件, $1 \leqslant p < \infty$, 则 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

证明 设 $g(x)$ 是满足以下条件

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leqslant 1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } |x| \geqslant 2 \text{ 时} \end{cases}$$

和对于一切 x 和 $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, $|D^\alpha g(x)| \leqslant M$(常数) 的 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$中的一固定函数. 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 令 $g^\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$. 于是当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ 时, $g^\varepsilon(x) = 1$ 以及当 $\varepsilon \leqslant 1$ 时, $|D^\alpha g^\varepsilon(x)| \leqslant M\varepsilon^{|\alpha|} \leqslant M$. 若 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 则 $f^\varepsilon(x) = g^\varepsilon(x)f(x)$ 属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 且具有有界支集. 所以根据 Leibniz 公式对于 $0 < \varepsilon \leqslant 1$ 和 $|\alpha| \leqslant m$ 有

$$|D^\alpha f^\varepsilon(x)| = \left|\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta f(x)D^{\alpha-\beta}g^\varepsilon(x)\right| \leqslant M\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^\beta f(x)|.$$

设 $\Omega_\varepsilon = \left\{x \in \Omega \middle| |x| > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$, 得到

$$\begin{aligned}\|f - f^\varepsilon; W^{m,p}(\Omega)\| &= \|f - f^\varepsilon; W^{m,p}(\Omega_\varepsilon)\| \\ &\leqslant \|f; W^{m,p}(\Omega_\varepsilon)\| + \|f^\varepsilon; W^{m,p}(\Omega_\varepsilon)\| \\ &\leqslant M_1\|f; W^{m,p}(\Omega_\varepsilon)\|, \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

其中 M_1 为常数. 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 式 (3.5.2) 右端趋于零. 从而任意属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的函数可以用 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的具有有界支集的函数来逼近. 因此现在我们可以假定 $K = \{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}$ 是有界的, 故集合 $F = \overline{K} - \left(\bigcup_{x\in\partial\Omega} O_x\right)$ 是紧的, 而且包含在 Ω 中, 而 $\{O_x\}$ 是在开集具有线段条件的定义中指出的开集的集族. 存在一个开集 O_0, 使得 $F \subset\subset O_0 \subset\subset \Omega$. 由于 $\overline{K}$ 是紧的, 存在有限个集合 O_x, 重新记它们为 $O_1, O_2, \cdots, O_k$, 使得 $\overline{K} \subset O_0 \bigcup O_1 \bigcup \cdots \bigcup O_k$. 同时存在另外的一些开集 $\widetilde{O}_0, \widetilde{O}_1, \cdots, \widetilde{O}_k$, 使得对于 $0 \leqslant i \leqslant k$, $\widetilde{O}_i \subset\subset O_i$, 但仍有 $\overline{K} \subset \widetilde{O}_0 \bigcup \widetilde{O}_1 \bigcup \cdots \bigcup \widetilde{O}_k$.

对 $\widetilde{O}_0, \widetilde{O}_1, \cdots, \widetilde{O}_k$, 根据单位分解定理 3.3.2, 存在 $k+1$ 个函数 $\psi_i(x)(i = 0, 1, \cdots, k)$ 满足① $\psi_i \in C_c^\infty(\widetilde{O}_i)$; ② $0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1$; ③ 在 $\Omega + \partial\Omega$ 的一个邻域上 $\sum\limits_{i=0}^{k}\psi_i(x) = 1$. 令 $f_i(x) = \psi_i(x)f(x)(i = 0, 1, \cdots, k)$, 则成立 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i(x)$.

由 Leibniz 公式可知 $f_i \in W^{m,p}(\Omega)$, 且 $\operatorname{supp} f_i \subset \widetilde{O}_i$. 对于每个 i 我们能够找到 $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$\|f_i - \varphi_i; W^{m,p}(\Omega)\| < \frac{\varepsilon}{k+1}. \tag{3.5.3}$$

因此置 $\varphi = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i$, 得到

$$\|f - \varphi; W^{m,p}(\Omega)\| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \|f_i - \varphi_i; W^{m,p}(\Omega)\| < \varepsilon.$$

因为 $\operatorname{supp} f_0 \subset \widetilde{O}_0 \subset\subset \Omega$, 由定理 3.5.1 对于 $i=0$ 可以找到满足式 (3.5.3) 的一个函数 $\varphi_0 = J_\delta f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$\lim_{\delta\to 0} \|J_\delta f_0 - f_0; W^{m,p}(\Omega)\| = 0. \tag{3.5.4}$$

所以接下来对于 $1 \leqslant i \leqslant k$ 需要寻找满足式 (3.5.3) 的函数 φ_i. 对于固定的 i 我们把 f_i 延拓成为 Ω 外恒等于零的函数. 从而 $f_i \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N - \widetilde{\partial\Omega_i})$, 其中 $\widetilde{\partial\Omega_i} = \overline{\widetilde{O}_i} \bigcap \partial\Omega$. 设 y 是 Ω 具有线段条件定义中与集合 O_i 相应的非零向量, 如图 3.5.1 所示. 令 $\widetilde{\partial\Omega_t} = \{x - ty |\ x \in \widetilde{\partial\Omega_i}\}$, 其中选 t 使得

$$0 < t < \min\{1, \operatorname{dist}(\widetilde{O}_i, \mathbb{R}^N - O_i)/|y|\}.$$

因此根据 Ω 具有线段条件 $\widetilde{\partial\Omega_t} \subset O_i$ 和 $\widetilde{\partial\Omega_t} \bigcap \overline{\Omega}$ 是空集. 定义 $f_{i,t}(x) = f_i(x + ty)$. 于是 $f_{i,t} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N - \widetilde{\partial\Omega_t})$. 由定理 2.1.22 知, 在 $L^p(\Omega)$ 中平移是连续的, 所以对于 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $\lim_{t\to 0^+} \|D^\alpha f_{i,t} - D^\alpha f_i; L^p(\Omega)\| = 0$, 如图 3.5.1 所示.

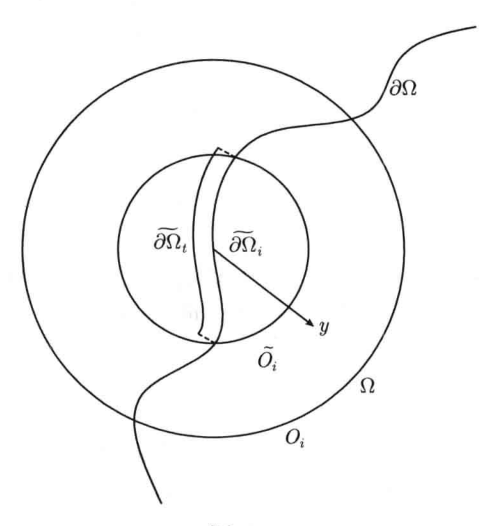


图 3.5.1

因此

$$\lim_{t\to 0^+} \|f_{i,t} - f_i; W^{m,p}(\Omega)\| = 0. \tag{3.5.5}$$

所以只要找到 $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得 $\|f_{i,t} - \varphi_i; W^{m,p}(\Omega)\|$ 充分小就够了. 但是, $\Omega \bigcap O_i \subset\subset \mathbb{R}^N - \widetilde{\partial\Omega_t}$ 和利用定理 3.5.1 有

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|J_\delta f_{i,t} - f_{i,t}; W^{m,p}(\Omega)\| = 0. \tag{3.5.6}$$

根据式 (3.5.5) 和式 (3.5.6), 可以选出一组 δ_n, t_n, 当 $n\to\infty$ 时, $\delta_n \to 0$ 和 $t_n \to 0$, 成立

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \|J_{\delta_n} f_{i,t_n} - f_i; W^{m,p}(\Omega)\| \\ =& \lim_{n\to\infty} \|J_{\delta_n} f_{i,t_n} - f_{i,t_n} + f_{i,t_n} - f_i; W^{m,p}(\Omega)\| = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

由式 (3.5.4) 和式 (3.5.7) 推出

$$\lim_{n\to\infty} \left\| J_{\delta_n} f_0 + \sum_{i=1}^k J_{\delta_n} f_{i,t_n} - f; W^{m,p}(\Omega) \right\| = 0.$$

因为 $\left(J_{\delta_n} f_0 + \sum_{i=1}^k J_{\delta_n} f_{i,t_n}\right) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 所以定理 3.5.2 得证. □

3.6 $H^{m,p}(\Omega)$ 空 间

本节介绍与 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间有关的 $H^{m,p}(\Omega)$ 空间.

定义 3.6.1 空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 是集合 $\{f \in C^m(\Omega) | \|f; W^{m,p}(\Omega)\| < \infty\}$ 关于空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 范数 $\|\cdot; W^{m,p}(\Omega)\|$ 的完备化空间.

定理 3.6.1(Meyers-Serrin[34]) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开集和 $1 \leqslant p < \infty$, 则

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

证明 首先证明 $H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. 因为当古典偏导数存在且连续时, 广义函数意义下的偏导数与古典偏导数是一致的, 所以集合

$$G = \{f \in C^m(\Omega) | \|f; W^{m,p}(\Omega)\| < \infty\}$$

显然包含在 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间中. 由于 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备空间, G 上的恒等算子把 G 延拓成完备化空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 和 G 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包之间的一个等距同构. 因此自然把 $H^{m,p}(\Omega)$ 和这个闭包看成是一样的, 从而 $H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$.

其次证明 $W^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega)$, 即证明 $\{f \in C^m(\Omega) \| \|f; W^{m,p}(\Omega)\| < \infty\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中是稠密的. 若 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 和 $\varepsilon > 0$, 则证明存在 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, 使得 $\|f - \varphi; W^{m,p}(\Omega)\| < \varepsilon$ 即可. 对于 $k = 1, 2, \cdots$, 令

$$\Omega_k = \left\{x \in \Omega \middle| |x| < k \text{ 和 } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\right\}$$

和设 $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \varnothing$ 是空集, 则

$$O = \{O_k | O_k = \Omega_{k+1} \bigcap (\overline{\Omega}_{k-1})^c, k = 1, 2, \cdots\}$$

是一个覆盖 Ω 的 Ω 的开子集族. 令 Ψ 是 Ω 的关于 O 的一个单位分解. 设 $\psi_k(x)$ 表示它的支集包含在 O_k 中的有限个函数$\psi \in \Psi$ 之和, 则 $\psi_k \in C_c^\infty(O_k)$ 和在 Ω 上 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1$.

如果$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$, 则 $j_\varepsilon * (\psi_k f)$ 在交集 $V_k = \Omega_{k+2} \bigcap (\Omega_{k-2})^c \subset\subset \Omega$ 中有支集. 因为 $\psi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$, 所以可以选择满足 $0 < \varepsilon_k < \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ 的 ε_k, 使得

$$\|j_{\varepsilon_k} * (\psi_k f) - \psi_k f\|_{m,p,\Omega} = \|j_{\varepsilon_k} * (\psi_k f) - \psi_k f\|_{m,p,V_k} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

令 $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} j_{\varepsilon_k} * (\psi_k f)$, 在任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 上, 在和式中只可能有有限多项不为零. 所以 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. 对于 $x \in \Omega_k$, 有

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(x) f(x), \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{k+2} j_{\varepsilon_j} * (\psi_j f)(x).$$

这样

$$\|f - \varphi\|_{m,p,\Omega_k} \leqslant \sum_{j=1}^{k+2} \|j_{\varepsilon_j} * (\psi_j f) - \psi_j f\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon.$$

由单调收敛定理知 $\|f - \varphi\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$. □

推论 3.6.1 设 $1 \leqslant p < \infty$, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开集, 则 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

3.7 对偶性与空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$

在本节中对于记号 Ω , m 和 p, 数 Q, 空间 L_Q^p 和 $W(m,p)$ 以及算子 A 采用

3.2 节中规定的那样, p 和 p' 是一对共轭指数, 我们还定义

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中上式对一切使右端有意义的 $f(x), g(x)$ 有定义.

3.7.1　$W^{m,p}(\Omega)$ 的对偶与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的赋范对偶

定理 3.7.1($W^{m,p}(\Omega)$ 的对偶)　设 $1 \leqslant p < \infty$. 对于每一个 $l \in (W^{m,p}(\Omega))'$ 存在一个元素 $g \in L_Q^{p'}$, 使得把向量 g 写成 $(g_1, g_2, \cdots, g_Q)$(或 $(g_\alpha)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}$) 的形式时, 对一切 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 有

$$l(f) = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha f, g_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{Q} \int_\Omega D^{\alpha_i} f(x) g_i(x)\mathrm{d}x, \tag{3.7.1}$$

而且

$$\|l; (W^{m,p}(\Omega))'\| = \inf \|g; L_Q^{p'}\| = \min \|g; L_Q^{p'}\|, \tag{3.7.2}$$

其下确界是在对于一切 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 使得式 (3.7.1) 成立的所有的 $g \in L_Q^{p'}$ 构成的集合上取的, 而且一定在这个集合上取到.

若 $1 < p < \infty$, 则满足式 (3.7.1) 和式 (3.7.2) 的 $g \in L_Q^{p'}$ 是唯一的.

证明　定义满足可加性的泛函 l^* 如下:

$$l^*(Af) = l(f), \quad \forall f \in W^{m,p}(\Omega).$$

它是定义在由式 (3.2.11) 定义的算子 A 的值域上的. 由于算子 A 建立了 $W^{m,p}(\Omega)$ 和 L_Q^p 的一个子空间 $W(m,p)$ 的等距同构, $l^* \in (W(m,p))'$, 而且

$$\|l^*; (W(m,p))'\| = \|l; (W^{m,p}(\Omega))'\|.$$

由 Hahn-Banach 定理知, 存在一个 l^* 到 L_Q^p 全体的保范延拓 $\widetilde{l}^*$, 从而由引理 3.2.6 推得, 存在 $g \in L_Q^{p'}$, 使得如果 $f = (f_\alpha)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \in L_Q^p$, 则

$$\widetilde{l}^*(f) = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \langle g_\alpha, f_\alpha\rangle.$$

因此对于 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 有

$$l(f) = l^*(Af) = \widetilde{l}^*(Af) = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha f, g_\alpha\rangle,$$

而且

$$\|l; (W^{m,p}(\Omega))'\| = \|l^*; (W(m,p))'\| = \|\widetilde{l}^*; (L_Q^p)'\| = \|g; L_Q^{p'}\|. \tag{3.7.3}$$

现在对一切 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 使得式 (3.7.1) 成立的任意元素 $g \in L_Q^{p'}$ 与 l^* 的一个延拓 $\widetilde{l}^*$ 相对应, 所以范数 $\|g; L_Q^{p'}\|$ 不小于 $\|l; (W^{m,p}(\Omega))'\|$. 把这一点和式 (3.7.3) 结合起来, 就得到式 (3.7.2).

当 $1 < p < \infty$ 时, g 的唯一性由类似于证明引理 2.2.3 的方法, 并利用 $L^p(\Omega)$ 和 $L^{p'}(\Omega)$ 的一致凸性推出. □

注 3.7.1 若 $1 \leqslant p < \infty$, 空间 $(W^{m,p}(\Omega))'$ 中的每一个元素 l 是一个广义函数 $\widetilde{l} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的延拓. 事实上, 设 l 是对某个 $g \in L_Q^{p'}$ 由式 (3.7.1) 给出的, 且由

$$\widetilde{l} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{l}_{g_\alpha}, \quad \widetilde{l}_{g_\alpha}(\varphi) = \langle \varphi, g_\alpha \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m \tag{3.7.4}$$

分别定义 $\widetilde{l}$ 和 $\widetilde{l}_{g_\alpha}$.

对于每一个 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$, 有

$$\widetilde{l}(\varphi) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \widetilde{l}_{g_\alpha}(D^\alpha \varphi) = l(\varphi),$$

所以 l 显然是 $\widetilde{l}$ 的一个延拓. 同时, 按照式 (3.7.2) 知

$$\|l; (W^{m,p}(\Omega))'\| = \min \left\{ \|g; L_Q^{p'}\| \,|l \text{ 延拓了由式 (3.7.4) 给出的 } \widetilde{l} \right\}.$$

定理 3.7.2($W_0^{m,p}(\Omega)$ 的赋范对偶) 设 $1 \leqslant p < \infty$, p' 是 p 的共轭指数和 $m \geqslant 1$, 对偶空间 $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ 等距同构于由满足式 (3.7.4) 和赋予范数

$$\|\widetilde{l}\| = \min \left\{ \|g; L_Q^{p'}\| \,|g \text{ 满足式 (3.7.4)} \right\}$$

的某些广义函数 $\widetilde{l} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 组成的 Banach 空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$.

证明 显然, 对于 $l \in (W_0^{m,p}(\Omega))'$, 注 3.7.1 也适用, 因为任意这样的泛函有一个到 $W^{m,p}(\Omega)$ 的保范延拓.

现在证明 $\widetilde{l}$ 在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 上的连续延拓是唯一的. 当 $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ 时, 设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C_c^\infty(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$ 中的一个序列, 使得当 $n \to \infty$ 时, $\|\varphi_n - f\|_{m,p} \to 0$. 从而当 $k, n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{l}(\varphi_k) - \widetilde{l}(\varphi_n)| &\leqslant \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |\widetilde{l}_{g_\alpha}(D^\alpha \varphi_k - D^\alpha \varphi_n)| \\
&= \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |\langle D^\alpha(\varphi_k - \varphi_n), g_\alpha \rangle| \\
&\leqslant \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha(\varphi_k - \varphi_n)\|_p \, \|g_\alpha\|_{p'} \\
&\leqslant \|\varphi_k - \varphi_n\|_{m,p} \, \|g; L_Q^{p'}\| \to 0.
\end{aligned}$$

因此 $\{\widetilde{l}(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个 Cauchy 序列, 从而收敛到一个极限, 我们把它记为 $l(f)$. $\{\widetilde{l}(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛与在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$ 的序列无关. 事实上, 若另有 $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(\Omega)$, 则当 $n\to\infty$ 时, $\|\psi_n-f\|_{m,p}\to 0$. 于是当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{l}(\varphi_n)-\widetilde{l}(\psi_n)\right| &\leqslant \|\varphi_n-\psi_n\|_{m,p}\ \|g;L_Q^{p'}\|\\ &\leqslant \{\|\varphi_n-f\|_{m,p}+\|\psi_n-f\|_{m,p}\}\ \|g;L_Q^{p'}\|\to 0.\end{aligned}$$

这样的泛函 l 满足可加性而且属于 $(W_0^{m,p}(\Omega))'$. 若如前所述当 $n\to\infty$ 时, $\|\varphi_n-f\|_{m,p}\to 0$, 从而

$$|l(f)|=\lim_{n\to\infty}\left|\widetilde{l}(\varphi_n)\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_{m,p}\ \|g;L_Q^{p'}\|=\|f\|_{m,p}\ \|g;L_Q^{p'}\|.\qquad\square$$

$W^{-m,p'}(\Omega)$ 的完备性是以上所述的等距同构的一个推论.

推论 3.7.1 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 是完备的.

显然以下定理成立.

定理 3.7.3 设 $1<p<\infty$, 则 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 是可分的, 而且还是自反的.

3.7.2 空间 $L^{p'}(\Omega)$ 的 $(-m,p')$-范数

(1) 当 $1<p<\infty$ 时, 我们利用另一种方法刻画 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶. 每个元素 $v\in L^{p'}(\Omega)$ 通过 $L_v(f)=\langle f,v\rangle$ 确定 $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ 中的一个元素 L_v, 其中 $f\in W_0^{m,p}(\Omega)$, 原因是

$$|L_v(f)|=|\langle f,v\rangle|\leqslant\|v\|_{p'}\ \|f\|_p\leqslant\|v\|_{p'}\ \|f\|_{m,p}.$$

把 L_v 的范数定义为 $v\in L^{p'}(\Omega)$ 的 $(-m,p')$-范数, 即

$$\|v\|_{-m,p'}=\|L_v;(W_0^{m,p}(\Omega))'\|=\sup_{\substack{f\in W_0^{m,p}(\Omega)\\ \|f\|_{m,p}\leqslant 1}}|\langle f,v\rangle|.$$

显然, 对于任意 $f\in W_0^{m,p}(\Omega)$ 和 $v\in L^{p'}(\Omega)$, 有

$$\|v\|_{-m,p'}\leqslant\|v\|_{p'};$$

$$|\langle f,v\rangle|=\|f\|_{m,p}\left|\left\langle\frac{f}{\|f\|_{m,p}},v\right\rangle\right|\leqslant\|f\|_{m,p}\ \|v\|_{-m,p'}.\qquad(3.7.5)$$

式 (3.7.5) 是 Hölder 不等式的一个推广.

(2) 设 $V=\{L_v|v\in L^{p'}(\Omega)\}$, 则 V 是 $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ 的线性子空间, 而且 V 在 $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ 中稠密. 事实上, 证明此事实, 易见这等价于证明, 如果 $F\in(W_0^{m,p}(\Omega))''$, 对一切 $L_v\in V$, 有 $F(L_v)=0$ 成立, 则在 $(W_0^{m,p}(\Omega))''$ 中 $F=0$.

现在证明此事实, 说明 V 在 $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ 中稠密. 由于当 $1<p<\infty$ 时, $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是自反的, 存在对应于 $F\in(W_0^{m,p}(\Omega))''$ 的 $f\in W_0^{m,p}(\Omega)$, 使得对一切 $v\in L^{p'}(\Omega)$,

$$\langle f,v\rangle=L_v(f)=F(L_v)=0.$$

由此得到在 Ω 上 $f(x)=0$, a.e.. 所以在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中 $f(x)=0$, 从而在 $(W_0^{m,p}(\Omega))''$ 中 $F=0$.

3.8 差商与空间 $W^{1,p}(\Omega)$

本节研究差商与弱导数的关系, 在第 5 章讨论含有时间的索伯列夫空间时要用到.

定义 3.8.1 设 $f\in L_{loc}(\Omega), V\subset\subset\Omega$($V$ 和 Ω 均为 $\mathbb{R}^N$ 中的开子集) 和 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界.

(1) 对于 $x\in V$ 和 $h\in\mathbb{R}, 0<|h|<\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$ 称

$$\begin{aligned}D_i^hf(x)&=\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}\\&=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\cdots,x_N)-f(x)}{h}\quad(i=1,2,\cdots,N)\end{aligned}$$

是函数 $f(x)$ 步长为 $|h|$ 关于第 i 个变量的差商, 式中 $e_i=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)$ 是第 i 个分量为 1, 其余分量为零的坐标向量.

(2) $D^hf(x)=(D_1^hf(x),D_2^hf(x),\cdots,D_N^hf(x))$.

定理 3.8.1 (1) 设 $1\leqslant p<\infty$和 $f\in W^{1,p}(\Omega)$, 则对于每一 $V\subset\subset\Omega$, 某个常数 C 和所有的 $0<|h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$ 成立

$$\|D^hf\|_{L^p(V)}\leqslant C\|Df\|_{L^p(\Omega)},\tag{3.8.1}$$

其中 $Df(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_N}\right)$ 是 $f(x)$ 的梯度向量.

(2) 设 $1<p<\infty, f\in L^p(V)$ 和对于所有的 $0<|h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$ 存在一常数 C_1, 使得

$$\|D^hf\|_{L^p(V)}\leqslant C_1,\tag{3.8.2}$$

则 $f\in W^{1,p}(V)$, 且

$$\|Df\|_{L^p(V)}\leqslant C_2.$$

证明 (1) 首先假定 $1\leqslant p<\infty$ 和暂时假定$f(x)$ 是光滑函数. 于是对于每一

个 $x \in V, i = 1, 2, \cdots, N$ 和 $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial\Omega)$ 有

$$f(x + he_i) - f(x) = h\int_0^1 \frac{\partial f(x + the_i)}{\partial x_i}\text{d}t, \tag{3.8.3}$$

因此利用式 (3.8.3) 和 C_p 不等式得

$$\begin{aligned}
\int_V |D^h f(x)|^p \text{d}x &= \int_V \left\{\sum_{i=1}^N \left|\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}\right|^2\right\}^{\frac{p}{2}} \text{d}x \\
&\leqslant \int_V \left\{\sum_{i=1}^N \left[\int_0^1 |Df(x + the_i)|\text{d}t\right]^2\right\}^{\frac{p}{2}} \text{d}x \\
&\leqslant C_3 \sum_{i=1}^N \int_V \int_0^1 |Df(x + the_i)|^p \text{d}t\text{d}x \\
&= C_3 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \int_V |Df(x + the_i)|^p \text{d}x\text{d}t \\
&\leqslant C_4 \int_\Omega |Df(x)|^p \text{d}x.
\end{aligned}$$

这个估计对光滑函数成立. 所以对于任意的 $f \in W^{1,p}(V)$ 用光滑函数逼近它, 可证式 (3.8.1) 成立.

(2) 设估计 (3.8.2) 对所有的$0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial\Omega)$ 和某个常数 C_1 成立. 取 $i = 1, 2, \cdots, N$, $\phi \in C_c^\infty(V)$ 和充分小的 $|h|$, 有

$$\int_V f(x)\left[\frac{\phi(x + he_i) - \phi(x)}{h}\right]\text{d}x = -\int_V \left[\frac{f(x) - f(x - he_i)}{h}\right]\phi(x)\text{d}x,$$

即

$$\int_V f(x)(D_i^h \phi(x))\text{d}x = -\int_V (D_i^{-h} f(x))\phi(x)\text{d}x. \tag{3.8.4}$$

式 (3.8.4) 是所谓的差商 “分部积分公式”. 由估计 (3.8.2) 推出

$$\sup_h \|D_i^{-h} f\|_{L^p(V)} < \infty.$$

因此, 由于 $1 < p < \infty$, 根据定理 2.3.4 存在一函数 $v_i \in L^p(V)$ 和一子序列 $h_k \to 0$, 使得 $D_i^{-h_k} f(x)$ 在 $L^p(V)$ 中弱收敛于 $v_i(x)$. 但是利用式 (3.8.4) 得

$$\begin{aligned}
\int_V f(x)\phi_{x_i}(x)\text{d}x &= \int_\Omega f(x)\phi_{x_i}(x)\text{d}x = \lim_{h_k \to 0}\int_\Omega f(x)D_i^{h_k}\phi(x)\text{d}x \\
&= -\lim_{h_k \to 0}\int_V (D_i^{-h_k} f(x))\phi(x)\text{d}x
\end{aligned}$$

$$= -\int_\Omega v_i(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

因此在弱导数意义下 $v_i(x) = f_{x_i}(x)(i = 1,2,\cdots,N)$, 从而 $Df \in L^p(V)$, 又由于 $f \in L^p(V)$, 所以知 $f \in W^{1,p}(V)$. □

注 3.8.1 定理 3.8.1 的结论 (2) 对于 $p=1$ 不成立. 例如, 如果对于所有的 $0<|h|<\dfrac{1}{2}\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$ 满足 $\|D^h f\|_{L^1(V)} \leqslant C$, 但不一定推出 $f \in W^{1,1}(V)$.

本章主要参考了文献 [1], [2], [8], [21], [32].

第4章　索伯列夫空间的嵌入定理和插值定理

4.1　嵌入的含义、坐标变换

4.1.1　嵌入的含义

我们已经知道两个线性赋范空间一个嵌入另一个的定义. 因为索伯列夫空间有很多嵌入性质, 所以才使得索伯列夫空间在偏微分方程、计算数学和微分几何等学科中有着广泛的应用.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, 在区域 Ω 的不同几何性质下索伯列夫嵌入定理断言 $W^{m+j,p}(\Omega)$(或 $W_0^{m+j,p}(\Omega)$) 嵌入到以下类型的空间:

(1) $W^{j,q}(\Omega)$, 其中 $j \leqslant m$, 特别是 $L^q(\Omega)$;

(2) $C_B^j(\Omega)$;

(3) $C^j(\overline{\Omega})$;

(4) $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$;

(5) $W^{j,q}(\Omega_k)$, 特别是 $L^q(\Omega_k)$,

其中 m 和 j 均为非负整数, $1 \leqslant k < N$, Ω_k 表示 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中的一个 k 维平面的交集, 视其为 $\mathbb{R}^k$ 中的一个区域.

我们知道索伯列夫空间的嵌入定理是依赖于空间中函数的定义域. 为此, 以 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 为例来说明. 首先回忆一下定理 2.1.10(1).

定理 2.1.10(1)：设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, $\mu(\Omega) < \infty$ 和 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. 若 $f \in L^q(\Omega)$, 则 $f \in L^p(\Omega)$, 且有

$$\|f\|_p \leqslant (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

因此

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

定理 2.1.10(1) 成立除了其他假定外, $\mu(\Omega) < \infty$ 是一个重要条件. 如果 $\mu(\Omega) = \infty$, 则定理不成立. 例如, 设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 是定义在 $(1, \infty)$ 上的函数, 当 $q > 2$ 时, $f \in L^q(1, \infty)$, 但 $f \overline{\in} L^p(1, \infty)$ $(p \leqslant 2)$.

为了进一步理解索伯列夫空间的嵌入性质, 我们将解释 $W^{m,p}(\Omega)$ 嵌入到上面举出的几种类型空间的意思. 下面通过对定理 4.1.1 和定理 4.1.2 的分析开始这一工作.

定理 4.1.1 设 $Q_i=\{x\in\mathbb{R}^i|0<x_j<1,j=1,2,\cdots,i\}$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 是 $\mathbb{R}^i$ 空间中的单位立方体和 $p\geqslant 1$. 如果

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,Q_N),$$

则

$$\|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N);L^p(Q_{N-1})\|\leqslant K\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{1,p}(Q_N)\|; \quad (4.1.1)$$

$$\sup_{x\in Q_N}|f(x_1,x_2,\cdots,x_N)|\leqslant K\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{N,1}(Q_N)\|, \quad (4.1.2)$$

其中 K 是不依赖于 f 的常数.

证明 记 $\mathrm{d}x^{N-1}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{N-1}$. 从 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,Q_N)$ 得出含参变量积分

$$\int_{Q_{N-1}}|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N)|^p\mathrm{d}x^{N-1}$$

是关于 x_N 在区间 $(0,1)$ 上的连续函数. 由积分中值定理知, 在 0 与 1 之间存在一个 η 满足

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}x_N\int_{Q_{N-1}}|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N)|^p\mathrm{d}x^{N-1}\\=&\int_{Q_{N-1}}|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\eta)|^p\mathrm{d}x^{N-1}.\end{aligned} \quad (4.1.3)$$

在等式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N)=f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\eta)+\int_\eta^{x_N}D_Nf(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},t)\mathrm{d}t$$

两边分别取绝对值的 p 次幂, 然后在 Q_{N-1} 上积分, 并利用 C_p 不等式(见附录 I(5)), Hölder 不等式和式 (4.1.3) 有

$$\begin{aligned}&\|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N);L^p(Q_{N-1})\|^p\\=&\int_{Q_{N-1}}\left|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\eta)+\int_\eta^{x_N}D_Nf(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x^{N-1}\\\leqslant&2^{p-1}\left[\int_{Q_{N-1}}|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\eta)|^p\mathrm{d}x^{N-1}\right.\\&\left.+\int_{Q_{N-1}}\left|\int_\eta^{x_N}D_Nf(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x^{N-1}\right]\\\leqslant&2^{p-1}\left[\int_{Q_{N-1}}|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\eta)|^p\mathrm{d}x^{N-1}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{Q_{N-1}}\left|\left(\int_{\eta}^{x_N}1^{p'}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\eta}^{x_N}|D_Nf(x_1,x_2,\cdots,u_{N-1},t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\mathrm{d}x^{N-1}\\
\leqslant&2^{p-1}\left[\int_{Q_{N-1}}|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\eta)|^p\mathrm{d}x^{N-1}\right.\\
&\left.+\int_{Q_{N-1}}|x_N-\eta|^{p-1}\int_{\eta}^{x_N}|D_Nf(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},t)|^p\mathrm{d}t\mathrm{d}x^{N-1}\right]\\
\leqslant&2^{p-1}\left[\int_{Q_N}|f(x_1,x_2,\cdots,x_N)|^p\mathrm{d}x+\int_{Q_N}|D_Nf(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},t)|^p\mathrm{d}t\mathrm{d}x^{N-1}\right]\\
\leqslant&2^{p-1}\|f;W^{1,p}(Q_N)\|^p,
\end{aligned}
$$

其中 p' 是 p 的共轭指数. 于是式 (4.1.1) 得证.

下面证明式 (4.1.2). 设 $\xi_N\in(0,1)$ 是任一固定点, α 是一个第 N 个分量 $\alpha_N=0$ 的 N 重指数且满足

$$
0\leqslant|\alpha|\leqslant N-1. \tag{4.1.4}
$$

显然

$$
D^{\alpha}f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N)\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N,Q_N).
$$

此函数对 $p=1$ 应用不等式 (4.1.1) 有

$$
\|D^{\alpha}f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\xi_N);L^1(Q_{N-1})\|\leqslant K_1\|D^{\alpha}f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{1,1}(Q_N)\|. \tag{4.1.5}
$$

将式 (4.1.5) 两边分别对满足式 (4.1.4) 的 $\alpha(\alpha_N=0)$ 求和, 可知

$$
\|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\xi_N);W^{N-1,1}(Q_{N-1})\|\leqslant K_2\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{N,1}(Q_N)\|. \tag{4.1.6}
$$

式 (4.1.6) 中的 N 是任意正整数. 重复应用式 (4.1.6), 推出

$$
\begin{aligned}
&\|f(x_1,\xi_2,\cdots,\xi_N);W^{1,1}(Q_1)\|\\
\leqslant&K_3\|f(x_1,x_2,\xi_3,\cdots,\xi_N);W^{2,1}(Q_2)\|\\
\leqslant&\cdots\leqslant K_4\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{N,1}(Q_N)\|,
\end{aligned} \tag{4.1.7}
$$

其中 $\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_N$ 都是 (0, 1) 中的任意固定数. 由积分中值定理知, 存在 $\sigma\in(0,1)$, 使得

$$
\int_0^1|f(x_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)|\mathrm{d}x_1=|f(\sigma,\xi_2,\cdots,\xi_N)|. \tag{4.1.8}
$$

设 ξ_1 是 $(0,1)$ 中任意一个固定点, 则

$$
f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)=f(\sigma,\xi_2,\cdots,\xi_N)+\int_{\sigma}^{\xi_1}D_1f(x_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\mathrm{d}x_1.
$$

由此并利用式 (4.1.7) 和式 (4.1.8), 显见

$$\begin{aligned}|f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)| &\leqslant \int_0^1 |f(x_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)|\mathrm{d}x_1 + \int_0^1 |D_1 f(x_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)|\mathrm{d}x_1 \\ &= \|f(x_1,\xi_2,\cdots,\xi_N);W^{1,1}(Q_1)\| \\ &\leqslant K\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{N,1}(Q_N)\|.\end{aligned}$$

于是式 (4.1.2) 成立. □

下面将定理 4.1.1 的结论推广到更广的函数空间, 则有下面的结论.

定理 4.1.2 设 $Q_i=\{x\in\mathbb{R}^i|0<x_j<1,j=1,2,\cdots,i\}(i=1,2,\cdots,N)$ 是 $\mathbb{R}^i$ 空间中的单位立方体和 $p\geqslant 1$, 那么

$$\begin{aligned}&\|F_\xi(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1});L^p(Q_{N-1})\| \\ \leqslant& K\|f(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N);W^{1,p}(Q_N)\|, \quad \forall f\in W^{1,p}(Q_N)\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

和

$$\sup_{x\in Q_N}|F(x_1,x_2,\cdots,x_N)|\leqslant K\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{N,1}(Q_N)\|, \quad \forall f\in W^{N,1}(Q_N), \tag{4.1.10}$$

其中常数 K 与函数 f 无关; 而 $F_\xi(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$ 和 $F(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的确定见证明.

证明 由于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,Q_N)$ 在 $W^{1,p}(Q_N)$ 中稠密. 若 $f\in W^{1,p}(Q_N)$, 则存在序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,Q_N)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f;W^{1,p}(Q_N)\|=0.$$

同时根据范数连续性还成立

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n;W^{1,p}(Q_N)\|=\|f;W^{1,p}(Q_N)\|.$$

当 $\xi\in(0,1)$ 是任意一个固定数时, 显然 $g_{n\xi}=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\xi)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N-1},Q_{N-1})$. 由式 (4.1.1) 推得

$$\|g_{n\xi}-g_{m\xi};L^p(Q_{N-1})\|\leqslant K\|f_n-f_m;W^{1,p}(Q_N)\|. \tag{4.1.11}$$

所以 $\{g_{n\xi}\}_{n=1}^\infty$ 是 $L^p(Q_{N-1})$ 中的基本序列. 由于 $L^p(Q_{N-1})$ 的完备性, 可知存在函数 $F_\xi(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})\in L^p(Q_{N-1})$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|g_{n\xi}-F_\xi;L^p(Q_{N-1})\|=0.$$

而函数 $F_\xi(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$ 是不依赖于序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 的选择的. 如果 $\{f_{n_1}(x)\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{f_{n_2}(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,Q_N)$ 中的两个序列, 且在 $W^{1,p}(Q_N)$ 中都收敛于 $f(x)$, 可以证明 $\{g_{n_1\xi}\}_{n_1=1}^\infty=\{f_{n_1}(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\xi)\}_{n_1=1}^\infty$ 和 $\{g_{n_2\xi}\}_{n_2=1}^\infty=\{f_{n_2}(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\xi)\}_{n_2=1}^\infty$ 在 $L^p(Q_{N-1})$ 中有相同的极限. 事实上, 若 $\{g_{n_1\xi}\}_{n_1=1}^\infty$ 和 $\{g_{n_2\xi}\}_{n_2=1}^\infty$ 在 $L^p(Q_{N-1})$ 中分别收敛于 f_1 和 f_2, 则利用 Minkowski 不等式和 (4.1.1), 有

$$
\begin{aligned}
\|f_2-f_1;L^p(Q_{N-1})\|\leqslant&\|f_2-g_{n_2\xi};L^p(Q_{N-1})\|+\|g_{n_2\xi}-g_{n_1\xi};L^p(Q_{N-1})\|\\
&+\|f_1-g_{n_1\xi};L^p(Q_{N-1})\|\\
\leqslant&\|f_2-g_{n_2\xi};L^p(Q_{N-1})\|+K\|f_{n_2}-f_{n_1};W^{1,p}(Q_N)\|\\
&+\|f_1-g_{n_1\xi};L^p(Q_{N-1})\|\to 0\quad(n_1,n_2\to\infty).
\end{aligned}
$$

所以 $f_2=f_1\in L^p(Q_{N-1})$.

当 $n\to\infty$ 时, 对下式取极限

$$\|f_n(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},\xi);L^p(Q_{N-1})\|\leqslant K\|f_n(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{1,p}(Q_N)\|,$$

推得

$$\|F_\xi(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1});L^p(Q_{N-1})\|\leqslant K\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{1,p}(Q_N)\|.\tag{4.1.12}$$

下证式 (4.1.10) 成立. 设 $f\in W^{N,1}(Q_N)$. 因为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,Q_N)$ 在 $W^{N,1}(Q_N)$ 中稠密, 所以存在序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,Q_N)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f;W^{N,1}(Q_N)\|=0.$$

由式 (4.1.2) 有

$$\sup_{x\in Q_N}|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant K\|f_n-f_m;W^{N,1}(Q_N)\|.$$

上式右端当 $m,n\to\infty$ 时趋近于零. 于是序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 Q_N 上一致收敛于 $C_B(Q_N)$ 中的一个函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_N)$. 当 $n\to\infty$ 时, 从不等式

$$\sup_{x\in Q_N}|f_n(x_1,x_2,\cdots,x_N)|\leqslant K\|f_n(x_1,x_2,\cdots,x_N);W^{N,1}(Q_N)\|$$

导出

$$\sup_{x\in Q_N}|F(x_1,x_2,\cdots,x_N)|\leqslant K\|f;W^{N,1}(Q_N)\|,\qquad\forall f\in W^{N,1}(Q_N).$$

上式说明式 (4.1.10) 对空间 $W^{N,1}(Q_N)$ 中的元素成立, 且有 $F \in C_B(Q_N)$. □

从定理 4.1.1 和定理 4.1.2 看出:

(1) 在应用不等式 (4.1.1) 和式 (4.1.2) 时, 无需加以说明, 这是因为 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, Q_N)$. 但在应用不等式 (4.1.9) 和式 (4.1.10) 时, 特别要注意. 不等式 (4.1.9), 式 (4.1.10) 和定理 2.1.10(1) 中的不等式 $\|f\|_p \leqslant (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$ 相比较, 在外形上它们非常相似, 然而采用定义 2.1.4 的嵌入定义, 就很难说明 $W^{1,p}(Q_N)$ 和 $L^p(Q_{N-1})$ 之间有嵌入关系存在. 为了使不等式 (4.1.9) 和式 (4.1.10) 能用嵌入关系来说明, 就要把嵌入定义中某种含义作些推广: ① 恒等算子减弱为某种类型的线性算子; ② 不一定要求 X_1 是 X_2 的线性子空间. 但 X_1 和 X_2 不可取任意两个线性赋范空间, 而要求所讨论的两个线性赋范空间 X_1 和 X_2 是有关联的. 例如, 不等式 (4.1.9) 左端的函数 $F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ 应按前面叙述过的方法加以确定.

(2) 式 (4.1.10) 由 $W^{N,1}(Q_N)$ 中的函数导出 $C_B(Q_N)$ 中的函数, 即 $W^{N,1}(Q_N)$ 嵌入到 $C_B(Q_N)$. 嵌入的意思是指 "等价类"$f \in W^{N,1}(Q_N)$ 中应该包含有一个函数, 它属于要嵌入的目标, 即属于连续有界函数空间 $C_B(Q_N)$, 而且满足嵌入不等式 (4.1.10). $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$ 有同样的意思.

(3) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$ 的意思是说, 每个 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 当我们把它看成一个函数时, 能够在 Ω 的具有零测度的子集上重新定义它的值, 使得修改后的新函数 $\widetilde{f} \in C^j(\overline{\Omega})$, 而且在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中 $\widetilde{f}(x) = f(x)$(即在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中 $\widetilde{f}(x)$ 和 $f(x)$ 都属于同一 "等价类") 以及满足嵌入不等式

$$\|\widetilde{f}; C^j(\overline{\Omega})\| \leqslant K\|f; W^{m,p}(\Omega)\|,$$

其中常数 K 不依赖于 $f(x)$.

(4) 在解释 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k)$ $(k < N)$ 时, 就更要小心了. 根据定理 3.6.1, 每个元素 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 中一个元素序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的一个极限, 函数 $f_n(x)$ 在 Ω_k 上具有属于 $C^\infty(\Omega_k)$ 的迹. 上述嵌入意味着这些迹在 $W^{j,q}(\Omega_k)$ 中收敛到一个函数 $\widetilde{f}(x)$, 它满足嵌入不等式

$$\|\widetilde{f}; W^{j,q}(\Omega_k)\| \leqslant K\|f; W^{m,p}(\Omega)\|,$$

其中常数 K 与 $f(x)$ 无关.

如果嵌入含义经上述推广, 则由定理 4.1.2 得

$$W^{1,p}(Q_N) \hookrightarrow L^p(Q_{N-1}), \quad W^{N,1}(Q_N) \hookrightarrow C_B(Q_N).$$

4.1.2 坐标变换

由定义 3.4.5 定义的变换 F 确定一个算子 P, 把定义在 Ω 上的函数 $f(x)$ 映射

到定义在 G 上的函数 $Pf(y)$,

$$Pf(y) = f(\psi(y)).$$

定理 4.1.3　设 $1 \leqslant p < \infty$, 变换 F 是一次光滑的. 若 $f \in L^p(\Omega)$, 则成立

$$K_1\|f; L^p(\Omega)\| \leqslant \|Pf(y); L^p(G)\| \leqslant K_2\|f; L^p(\Omega)\|, \tag{4.1.13}$$

其中 K_1 和 K_2 是不依赖 f 的常数.

证明　由于 F 是一次光滑的, 所以存在常数 K_1 和 K_2, 使得 Jacobi 行列式

$$J = \left|\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_N)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_N)}\right|$$

满足

$$K_1^p \leqslant |J| \leqslant K_2^p. \tag{4.1.14}$$

从而

$$\|Pf(y); L^p(G)\| = \left[\int_G |Pf(y)|^p \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p |J| \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.1.15}$$

利用式 (4.1.14) 推得式 (4.1.13). □

引理 4.1.1　设 $1 \leqslant p < \infty$ 和 m 是正整数, 变换 F 是 m 次光滑的, 若 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 则 $Pf(y) \in W^{m,p}(G)$ 且

$$D_y^\alpha Pf(y) = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} M_{\alpha,\beta}(y) P(D_x^\beta f)(y), \tag{4.1.16}$$

其中 $M_{\alpha,\beta}(y)$ 是由 $\psi_i(y)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 的关于 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 不超过 $|\beta|$ 阶偏导数组成次数不超过 $|\alpha|$ 的多项式, α 是 N 重指数.

证明　因为 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 所以 $\forall f \in W^{m,p}(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$. 因为 α 和 β 是 N 重指数, 利用复合函数求导办法, 容易证实

$$D_y^\alpha Pf_n(y) = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} M_{\alpha,\beta}(y)[P(D_x^\beta f_n)](y). \tag{4.1.17}$$

下面证明式 (4.1.16) 成立. 由式 (4.1.17) 对任意的 $h(y) \in C_c^\infty(G)$, 有

$$\begin{aligned}\int_G Pf_n(y) D_y^\alpha h(y) \mathrm{d}y &= (-1)^{|\alpha|} \int_G D_y^\alpha Pf_n(y) h(y) \mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \int_G M_{\alpha,\beta}(y)[P(D_x^\beta f_n)](y) h(y) \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

利用变换 $y=\phi(x)$(式 (3.4.1)), 可把式 (4.1.18) 在 G 上的积分转化成在 Ω 上的积分, 得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f_n(x)D_y^\alpha h(\phi(x))|J|\mathrm{d}x\\=&(-1)^{|\alpha|}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_\Omega D_x^\beta f_n(x)M_{\alpha,\beta}(\phi(x))h(\phi(x))|J|\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.1.19}$$

因为 $D_y^\alpha h(\phi(x))\in C_c^m(\Omega)$ 和 $h(\phi(x))\in C_c^m(\Omega)$, 所以令式 (4.1.19) 中的 n 趋近无穷大, 推出

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f(x)D_y^\alpha h(\phi(x))|J|\mathrm{d}x\\=&(-1)^{|\alpha|}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_\Omega D_x^\beta f(x)M_{\alpha,\beta}(\phi(x))h(\phi(x))|J|\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.1.20}$$

事实上, 利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega[f_n(x)-f(x)]D_y^\alpha h(\phi(x))|J|\mathrm{d}x\right|\\\leqslant&\int_\Omega|f_n(x)-f(x)||D_y^\alpha h(\phi(x))||J|\mathrm{d}x\\\leqslant&\max_{x\in\Omega}|J|\left[\int_\Omega|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac1p}\left[\int_\Omega|D_y^\alpha h(\phi(x))|^{p'}\mathrm{d}x\right]^{\frac1{p'}},\end{aligned}\tag{4.1.21}$$

其中 p' 是 p 的共轭指数. 同理对于 $|\beta|\leqslant|\alpha|\leqslant m$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega[D_x^\beta f(x)-D_x^\beta f_n(x)]M_{\alpha,\beta}(\phi(x))h(\phi(x))|J|\mathrm{d}x\right|\\\leqslant&\max_{x\in\Omega}|J|\left[\int_\Omega|D_x^\beta f(x)-D_x^\beta f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac1p}\\&\times\left[\int_\Omega|M_{\alpha,\beta}(\phi(x))h(\phi(x))|^{p'}\mathrm{d}x\right]^{\frac1{p'}}.\end{aligned}\tag{4.1.22}$$

因为对于 $|\beta|\leqslant m$, 当 $n\to\infty$ 时, $D^\beta f_n(x)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中收敛于 $D^\beta f(x)$, 所以由式 (4.1.21) 和式 (4.1.22) 推出, 当 $n\to\infty$ 时, 知式 (4.1.20) 成立. 再把式 (4.1.20) 的积分区域 Ω 返回到 G, 得到

$$\int_G Pf(y)D_y^\alpha h(y)\mathrm{d}y=(-1)^{|\alpha|}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_G M_{\alpha,\beta}(y)[P(D_x^\beta f)](y)h(y)\mathrm{d}y.\tag{4.1.23}$$

由于 $h(y)\in C_c^\infty(G)$ 是任意的, 从式 (4.1.23) 推知, 在弱导数意义下成立

$$D_y^\alpha Pf(y)=\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}M_{\alpha,\beta}(y)P(D_x^\beta f)(y).$$

根据定理 4.1.3 知 $P(D_x^\beta f)(y) \in L^p(G)$, 于是由上式导出 $Pf(y) \in W^{m,p}(G)$. □

定理 4.1.4　设 $1 \leqslant p < \infty$, m 是正整数和变换 F 是 m 次光滑的. 如果 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 则成立不等式

$$\overline{K}_1\|f;W^{m,p}(\Omega)\| \leqslant \|Pf;W^{m,p}(G)\| \leqslant \overline{K}_2\|f;W^{m,p}(\Omega)\|, \tag{4.1.24}$$

其中 $\overline{K}_1$ 和 $\overline{K}_2$ 是常数.

证明　因为变换 F 是 m 次光滑的, 所以 $K_1 \leqslant |J| \leqslant K_2$ 和

$$\max_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\sup_{y\in G}|M_{\alpha,\beta}(y)| \leqslant K_3,$$

其中 K_1, K_2 和 K_3 是常数. 用 $n_{|\alpha|}$ 记满足 $|\beta| \leqslant |\alpha|$ 的 N 重指数 β 的个数, 显然

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_m < \infty.$$

由式 (4.1.16) 并利用 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned}\int_G |D_y^\alpha Pf(y)|^p\mathrm{d}y &= \int_G \left|\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} M_{\alpha,\beta}(y)P(D_x^\beta f)(y)\right|^p \mathrm{d}y\\ &\leqslant K_3^p n_{|\alpha|}^p \max_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_G |P(D_x^\beta f)(y)|^p\mathrm{d}y\\ &\leqslant K_3^p n_{|\alpha|}^p \max_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_\Omega |D_x^\beta f(x)|^p|J|\mathrm{d}x\\ &\leqslant K_3^p n_{|\alpha|}^p K_2 \max_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_\Omega |D_x^\beta f(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是

$$\|Pf;W^{m,p}(G)\| \leqslant \overline{K}_2\|f;W^{m,p}(\Omega)\|. \tag{4.1.25}$$

变换 F^{-1} 确定 P 的一个逆算子 P^{-1}. 若 $g(y)$ 是定义在 G 上的函数, 则 $P^{-1}g(x) = g(\phi(x))$ 是定义在 Ω 上的函数. 类似于上面的方法可证, 如果 $g \in W^{m,p}(G)$, 则成立

$$\|P^{-1}g;W^{m,p}(\Omega)\| \leqslant K_4\|g;W^{m,p}(G)\|.$$

取 $g(y) = Pf(y)$, 将 $P^{-1}g(x) = f(\phi(x))$ 代入上式得

$$\overline{K}_1\|f;W^{m,p}(\Omega)\| \leqslant \|Pf;W^{m,p}(G)\|. \tag{4.1.26}$$

合并式 (4.1.25) 和式 (4.1.26) 得式 (4.1.24). □

4.2 嵌入定理

引理 4.2.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域. 存在依赖于 m,N 和关于决定 Ω 的锥 C 的 ρ 和 κ 的常数 K, 使得对于每一个 $f\in C^\infty(\Omega)$, 每一个 $x\in\Omega$ 和满足 $0<r\leqslant\rho$ 的 r 有估计

$$|f(x)|\leqslant K\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}r^{|\alpha|-N}\int_{C_{x,r}}|D^\alpha f(y)|\mathrm{d}y+\sum_{|\alpha|=m}\int_{C_{x,r}}|D^\alpha f(y)||x-y|^{m-N}\mathrm{d}y\right),\tag{4.2.1}$$

其中 $C_{x,r}=\{y\in C_x\,||x-y|\leqslant r\}$, 而 $C_x\subset\Omega$ 是全同于 C 且顶点为 x 的锥.

证明 应用有积分余项的 Taylor 公式

$$u(1)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}u^{(i)}(0)+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1(1-t)^{m-1}u^{(m)}(t)\mathrm{d}t$$

于函数 $u(t)=f(tx+(1-t)y)$ 上, 其中 $x\in\Omega$ 和 $y\in C_{x,r}$. 注意到

$$u^{(i)}(t)=\sum_{|\alpha|=i}\frac{i!}{\alpha!}D^\alpha f(tx+(1-t)y)(x-y)^\alpha,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$ 是 N 重指数, $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_N!$ 和 $(x-y)^\alpha=(x_1-y_1)^{\alpha_1}\cdots(x_N-y_N)^{\alpha_N}$, 得

$$\begin{aligned}|f(x)|\leqslant&\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\frac{1}{\alpha!}|D^\alpha f(y)||x-y|^{|\alpha|}\\&+\sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}|x-y|^m\int_0^1(1-t)^{m-1}|D^\alpha f(tx+(1-t)y)|\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

如果锥 C 有测度 $c\rho^N$, 则 $C_{x,r}$ 有测度 c_1r^N. 式 (4.2.2) 在 $C_{x,r}$ 上对 y 积分, 导出

$$\begin{aligned}&c_1r^N|f(x)|\\\leqslant&\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_{C_{x,r}}|D^\alpha f(y)|\mathrm{d}y\\&+\sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}\int_{C_{x,r}}|x-y|^m\mathrm{d}y\int_0^1(1-t)^{m-1}|D^\alpha f(tx+(1-t)y)|\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

现在估计式 (4.2.3) 中的第二项的积分部分. 首先交换积分次序, 其次作代换 $z=tx+(1-t)y$(于是 $z-x=(1-t)(y-x)$ 和 $\mathrm{d}z=(1-t)^N\mathrm{d}y$), 最后再交换积分次序,

得

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_{x,r}}|x-y|^m\mathrm{d}y\int_0^1(1-t)^{m-1}|D^\alpha f(tx+(1-t)y)|\mathrm{d}t\\
=&\int_0^1(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t\int_{C_{x,r}}|x-y|^m|D^\alpha f(tx+(1-t)y)|\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1(1-t)^{-N-1}\mathrm{d}t\int_{C_{x,(1-t)r}}|z-x|^m|D^\alpha f(z)|\mathrm{d}z\\
=&\int_{C_{x,r}}|x-z|^m|D^\alpha f(z)|\mathrm{d}z\int_0^{1-\frac{|x-z|}{r}}(1-t)^{-N-1}\mathrm{d}t\\
\leqslant&\frac{r^N}{N}\int_{C_{x,r}}|x-z|^{m-N}|D^\alpha f(z)|\mathrm{d}z.
\end{aligned}\tag{4.2.4}
$$

将式 (4.2.4) 代入式 (4.2.3) 立得式 (4.2.1). □

引理 4.2.1 是关于 $f(x)\in C^\infty(\Omega)$ 的局部估计.

定理 4.2.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域, $j\geqslant 0$ 和 $m\geqslant 1$ 为整数, $1\leqslant p<\infty$. 如果或者 $mp>N$ 或者 $m=N$ 和 $p=1$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega)\hookrightarrow C_B^j(\Omega).\tag{4.2.5}$$

这里的嵌入常数仅依赖于 N,m,p,j 和决定 Ω 满足锥条件的锥 C.

证明 先假定 $j=0$. 令 $f\in W^{m,p}(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ 和 $x\in\Omega$. 我们要证明

$$|f(x)|\leqslant K_1\|f\|_{m,p}.\tag{4.2.6}$$

对于 $p=1$ 和 $m=N$, 由式 (4.2.1) 可得式 (4.2.5). 对于 $p>1$ 和 $mp>N$, 在式 (4.2.1) 中取 $r=\rho$, 应用 Hölder 不等式可见

$$
\begin{aligned}
|f(x)|\leqslant &K\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}C_1^{\frac{1}{p'}}\rho^{|\alpha|-N}\|D^\alpha f\|_{p,C_{x,\rho}}\right.\\
&\left.+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha f\|_{p,C_{x,\rho}}\left[\int_{C_{x,\rho}}|x-y|^{(m-N)p'}\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p'}}\right),
\end{aligned}\tag{4.2.7}
$$

其中 C_1 是 $C_{x,\rho}$ 的测度和 p' 是 p 的共轭指数. 因为当 $mp>N$ 时, $(m-N)p'>-N$, 于是式 (4.2.7) 的最后一个积分是有限的, 所以

$$|f(x)|\leqslant K_1\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_{p,C_{x,\rho}}.\tag{4.2.8}$$

由于 $C_{x,\rho} \subset \Omega$, 从而式 (4.2.6) 成立.

注意到, 根据定理 3.6.1 由于任意的 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 是连续函数 Cauchy 序列的极限和由式 (4.2.6) 推出此 Cauchy 序列在 Ω 上收敛于一连续函数, 且 $f(x)$ 必须与此连续函数在 Ω 上几乎处处重合. 因此 $f \in C_B^0(\Omega) = C_B(\Omega)$.

现在证明 j 不为零的情况. 设 $f \in W^{m+j,p}(\Omega)$, 则 $D^\alpha f \in W^{m,p}(\Omega)$ $(0 \leqslant |\alpha| \leqslant j)$, 因而 $D^\alpha f \in C_B(\Omega)$ $(0 \leqslant |\alpha| \leqslant j)$, 且

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \leqslant K\|D^\alpha f\|_{m,p} \leqslant K\|f\|_{m+j,p},$$

其中 K 不依赖于 α 和 f, 所以

$$\|f; C_B^j(\Omega)\| = \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f| \leqslant K\|f\|_{m+j,p},$$

即

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega). \qquad \square$$

以后证明其他嵌入定理时, 只证明 $j = 0$ 的情形, 因为对于 $j > 0$ 的一般情形, 可以应用证明定理 4.2.1 的方法.

定理 4.2.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域和设对于 $1 \leqslant k \leqslant N$, Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维平面的交 (如果 $k = N$, 则 $\Omega_k = \Omega$). 令 $j \geqslant 0, m \geqslant 1$ 为整数和 $1 \leqslant p < \infty$. 如果或者 $mp > N$ 或者 $m = N$ 和 $p = 1$, 则对于 $p \leqslant q \leqslant \infty$, 有

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \tag{4.2.9}$$

特别地, 对于 $p \leqslant q \leqslant \infty$, 有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega). \tag{4.2.10}$$

这里的嵌入常数仅依赖于 N, m, p, q, j, k 和决定 Ω 满足锥条件的锥 C.

证明 假定 $j = 0$, 和 $f \in W^{m,p}(\Omega)$. 设 Ω_k 表示 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交. 令

$$\Omega_{k,\rho} = \{x \in \mathbb{R}^N | \mathrm{dist}(x, \Omega_k) < \rho\}$$

和 f 与它的所有导数在 Ω 外延拓为零. 因为 $C_{x,\rho} \subset B_\rho(x)$, 其中 $B_\rho(x)$ 是以 x 为球心 ρ 为半径的球, 所以利用式 (4.2.8), C_p 不等式和用 $\mathrm{d}x'$ 表示 U 中的 k 维体积元, 得到

$$\int_{\Omega_k} |f(x)|^p \mathrm{d}x' \leqslant K_2 \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_{\Omega_k} \mathrm{d}x' \int_{B_\rho(x)} |D^\alpha f(y)|^p \mathrm{d}y$$

$$= K_2 \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_{\Omega_{k,\rho}} |D^\alpha f(y)|^p \mathrm{d}y \int_{U\cap B_\rho(y)} \mathrm{d}x' \leqslant K_2 \|f\|_{m,p,\Omega}^p,$$

即

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega_k). \tag{4.2.11}$$

所以对于 $p=q$ 的情况定理成立. 式 (4.2.6) 说明 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_k)$. 因为 $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $0 < \theta = \dfrac{p}{q} < 1$ 和 $f \in L^p(\Omega_k) \bigcap L^\infty(\Omega_k)$, 根据定理 2.1.5 成立

$$\|f\|_{q,\Omega_k} \leqslant \|f\|_{p,\Omega_k}^\theta \|f\|_{\infty,\Omega_k}^{1-\theta} \leqslant K_3 \|f\|_{p,\Omega_k}.$$

综合式 (4.2.11) 和上式有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k).$$

所以式 (4.2.9) 成立. □

令 $\chi_r(x)$ 表示球 $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, |x| < r\}$ 的特征函数. 在以后的讨论中将考虑 L^p 函数具有核 $\omega_m(x) = |x|^{m-N}$ 的卷积的估计. 定义

$$\chi_r\omega_m(x) = \begin{cases} |x|^{m-N}, & |x| < r, \\ 0, & |x| \geqslant r. \end{cases}$$

注意到, 如果 $m \leqslant N$ 和 $0 < r \leqslant 1$, 则

$$\chi_r(x) \leqslant \chi_r\omega_m(x) \leqslant \omega_m(x). \tag{4.2.12}$$

引理 4.2.2　设 $p \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant N$ 和 $N - mp < k$, 则存在常数 K, 使得对于每一 $r > 0$, 每一 k 维平面 $U \subset \mathbb{R}^N$ 和每一 $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ 成立 $\chi_r\omega_m * |v| \in L^p(U)$ 和

$$\|\chi_r\omega_m * |v|\|_{p,U} \leqslant K r^{m-\frac{N-k}{p}} \|v\|_{p,\mathbb{R}^N}. \tag{4.2.13}$$

特别地, 当 $r = 1$ 时,

$$\|\chi_1 * |v|\|_{p,U} \leqslant \|\chi_1\omega_m * |v|\|_{p,U} \leqslant K \|v\|_{p,\mathbb{R}^N}. \tag{4.2.14}$$

证明　若 $p > 1$, 则利用 Hölder 不等式, 当 $s + m - \frac{N}{p} > 0$ 时, 得

$$\chi_r\omega_m * |v|(x) = \int_{B_r(x)} |v(y)||x-y|^{-s}|x-y|^{s+m-N}\mathrm{d}y$$
$$\leqslant \left(\int_{B_r(x)} |v(y)|^p |x-y|^{-sp}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_r(x)} |x-y|^{(s+m-N)p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant \left(\int_{B_r(x)} |v(y)|^p |x-y|^{-sp} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} r^{s+m-N} \left(\int_{B_r(x)} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= K_1 \left(\int_{B_r(x)} |v(y)|^p |x-y|^{-sp} \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} r^{s+m-\frac{N}{p}}, \tag{4.2.15}$$

其中 p' 是 p 的共轭指数和 K_1 是常数.

如果 $p=1$, $s+m-N \geqslant 0$, 不用 Hölder 不等式, 可得同样的不等式.

当 $k > sp$ 时, 式 (4.2.15) 取 p 次幂, 再在 U 上积分 (具有体积微元 $\mathrm{d}x'$), 推出

$$\begin{aligned}
\|\chi_r \omega_m * |v|\|_{p,U}^p &= \int_U |\chi_r \omega_m * |v|(x)|^p \mathrm{d}x' \\
&\leqslant K_1^p r^{(s+m)p-N} \int_U \mathrm{d}x' \int_{B_r(x)} |v(y)|^p |x-y|^{-sp} \mathrm{d}y \\
&\leqslant K_2 r^{(s+m)p-N} r^{k-sp} \|v\|_{p,\mathbb{R}^N}^p \\
&= K_2 r^{mp-(N-k)} \|v\|_{p,\mathbb{R}^N}^p.
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

因为 $N-mp<k$, 则存在 s 满足 $\dfrac{N}{p}-m<s<\dfrac{k}{p}$, 所以估计 (4.2.15) 和 (4.2.16) 成立. 于是估计 (4.2.13) 和 (4.2.14) 成立. □

因为证明以下嵌入定理时, 需要利用球坐标计算一些积分, 为此, 我们引入 $\mathbb{R}^N$ 空间的直角坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 和球坐标 $(\eta, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{N-1})$ 之间的关系如下:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \eta\cos\varphi_1, \\
x_2 &= \eta\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\
x_3 &= \eta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\
&\cdots\cdots \\
x_{N-1} &= \eta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\cos\varphi_{N-1}, \\
x_N &= \eta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\sin\varphi_{N-1},
\end{aligned}$$

其中 $\eta \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{N-2} \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi_{N-1} \leqslant 2\pi$. 坐标变换的 Jacobi 行列式

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_N)}{D(\eta, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{N-1})} = \eta^{N-1} A_N(\varphi),$$

其中 $A_N(\varphi) = \sin^{N-2}\varphi_1 \sin^{N-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{N-2}$, 它与 φ_{N-1} 无关. 球坐标系中的体积微元为

$$\eta^{N-1} A_N(\varphi) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\varphi,$$

其中 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 \cdots \mathrm{d}\varphi_{N-1}$.

引理 4.2.3　设 $p > 1, mp < N, N - mp < k \leqslant N$ 和 $p^* = \dfrac{kp}{N - mp}$, 则存在常数 K, 使得对于每一个 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维平面 U 和每一个 $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, 有 $\omega_m * |v| \in L^{p^*}(U)$ 和

$$\|\chi_1 * |v|\|_{p^*,U} \leqslant \|\chi_1 \omega_m * |v|\|_{p^*,U} \leqslant \|\omega_m * |v|\|_{p^*,U} \leqslant K\|v\|_{p,\mathbb{R}^N}. \tag{4.2.17}$$

证明　由式 (4.2.12) 知, 式 (4.2.17) 中的前两个不等式显然成立, 所以只需证明式 (4.2.17) 中最后一个不等式成立. 由于 $mp < N$, 对于每一 $x \in \mathbb{R}^N$ 利用球坐标系和 Hölder 不等式给出

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N - B_r(x)} |v(y)||x-y|^{m-N}\mathrm{d}y &\leqslant \|v\|_{p,\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N - B_r(x)} |x-y|^{(m-N)p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= K_1\|v\|_{p,\mathbb{R}^N}\left(\int_r^\infty t^{(m-N)p'+N-1}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= K_1' r^{m-\frac{N}{p}}\|v\|_{p,\mathbb{R}^N},
\end{aligned}$$

其中 p' 是 p 的共轭指数, K_1 和 K_1' 均为常数.

若 $\lambda > 0$, 选 r 使得

$$K_1' r^{m-\frac{N}{p}}\|v\|_{p,\mathbb{R}^N} = \frac{\lambda}{2}. \tag{4.2.18}$$

如果

$$\omega_m * |v|(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)||x-y|^{m-N}\mathrm{d}y > \lambda,$$

则

$$\begin{aligned}
\chi_r\omega_m * |v|(x) &= \int_{B_r(x)} |v(y)||x-y|^{m-N}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)||x-y|^{m-N}\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^N - B_r(x)} |v(y)||x-y|^{m-N}\mathrm{d}y > \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}$$

于是由 Chebyshev 不等式, 式 (4.2.16) 和式 (4.2.18) 导出

$$\begin{aligned}
\mu_k(\{x \in U | \omega_m * |v|(x) > \lambda\}) &\leqslant \mu_k\left(\left\{x \in U \,\middle|\, \chi_r\omega_m * |v|(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leqslant \left(\frac{2}{\lambda}\right)^p \|\chi_r\omega_m * |v|\|_{p,U}^p \\
&\leqslant \left(\frac{r^{\frac{N}{p}-m}}{K_1'\|v\|_{p,\mathbb{R}^N}}\right)^p K_2 r^{mp-N+k}\|v\|_{p,\mathbb{R}^N}^p = K_3 r^k,
\end{aligned}$$

其中 μ_k 表示在 $\mathbb{R}^k$ 中取测度和 K_3 是常数. 但是从式 (4.2.18) 推出 $r^k = \left(\frac{2K_1'}{\lambda}\times \|v\|_{p,\mathbb{R}^N}\right)^{p^*}$, 因此

$$\mu_k(\{x \in U|\omega_m * |v|(x) > \lambda\}) \leqslant K_3 \left(\frac{2K_1'}{\lambda}\|v\|_{p,\mathbb{R}^N}\right)^{p^*}.$$

由于

$$[Lv]_{p^*,U} = [\omega_m * |v|]_{p^*,U} = [\sup_{\lambda>0}\lambda^{p^*}(\omega_m * |v|) * (\lambda)]^{\frac{1}{p^*}} \leqslant 2K_3^{\frac{1}{p^*}} K_1' \|v\|_{p,\mathbb{R}^N},$$

从而算子 $L : v \mapsto (\omega_m * |v|)\big|_U$ 是弱 (p, p^*) 型.

对于固定的 m, N 和 k 满足引理 4.2.3 条件 p 的值构成一个开区间 $1 < p < \frac{N}{m}$, 所以在此区间存在 p_1 和 p_2 以及满足 $0 < \theta < 1$ 的 θ, 使得

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$$

和

$$\frac{1}{p^*} = \frac{\frac{N}{k}}{p} - \frac{m}{k} = \frac{1-\theta}{p_1^*} + \frac{\theta}{p_2^*}.$$

因为 $p^* > p$, 定理 2.4.4 (Marcinkiewicz 插值定理) 保证 L 从 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^{p^*}(U)$ 是有界的, 即式 (4.2.17) 成立. □

定理 4.2.3 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域和设对于 $1 \leqslant k \leqslant N$, Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交. 若 $m \geqslant 1$, $j \geqslant 0$ 为整数, $p > 1$, $mp < N$ 和 $N - mp < k \leqslant N$, 则对于 $p \leqslant q \leqslant p^* = \frac{kp}{N-mp}$ 有

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k). \tag{4.2.19}$$

特别地, 对于 $p \leqslant q \leqslant p^* = \frac{Np}{N-mp}$ 有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega). \tag{4.2.20}$$

这里的嵌入常数仅依赖于 N, m, p, q, j, k 和决定 Ω 满足锥条件的锥 C.

证明 由定理假设条件知, $mp < N$, $N - mp < k \leqslant N$ 和 $p \leqslant q \leqslant p^* = \frac{kp}{N-mp}$. 令 $f \in C^\infty(\Omega)$ 和延拓 $f(x)$ 以及它的所有导数在 $\mathbb{R}^N - \Omega$ 上为零. 在引理 4.2.1 中令 $r = \rho$ 和用较大的球 $B_1(x)$ 代替 $C_{x,r}$, 得到

$$|f(x)| \leqslant K_1 \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \chi_1 * |D^\alpha f|(x) + \sum_{|\alpha|=m} \chi_1\omega_m * |D^\alpha f|(x)\right). \tag{4.2.21}$$

如果 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{\theta}{p}+\dfrac{1-\theta}{p^*}$, 其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$, 则由 $L^p(\Omega)$ 空间范数的内插不等式 (定理 2.1.5) 推出

$$\|f\|_{q,\Omega_k}\leqslant\|f\|_{p,U}^{\theta}\|f\|_{p^*,U}^{1-\theta}. \tag{4.2.22}$$

由式 (4.2.21), 利用 C_p 不等式和式 (4.2.14) 得

$$\|f\|_{p,U}\leqslant K_2\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\chi_1\omega_m*|D^\alpha f|\|_{p,U}\right)\leqslant K_3\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_{p,\mathbb{R}^N}\right). \tag{4.2.23}$$

再从式 (4.2.21), 利用 C_p 不等式和引理 4.2.3 知

$$\|f\|_{p^*,U}\leqslant K_4\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_{p,\mathbb{R}^N}\right). \tag{4.2.24}$$

将式 (4.2.23) 和式 (4.2.24) 代入式 (4.2.22), 利用离散型的 Hölder 不等式, 并注意到 $f(x)$ 以及它的所有导数在 $\mathbb{R}^N-\Omega$ 上为零, 有

$$\|f\|_{q,\Omega_k}\leqslant K_5\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_{p,\mathbb{R}^N}\right)^{\theta}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_{p,\mathbb{R}^N}\right)^{1-\theta}\leqslant K\|f\|_{m,p,\Omega}.$$

由于 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 所以 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega_k)$. □

定理 4.2.4　设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域, $1\leqslant k\leqslant N$ 和 Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维平面 U 的交. 如果 $m\geqslant 1, j\geqslant 0$ 为整数, $mp=N$ 且 $p>1$, 则对于 $p\leqslant q<\infty$, 有

$$W^{m+j,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \tag{4.2.25}$$

特别地, 对于 $p\leqslant q<\infty$, 有

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega). \tag{4.2.26}$$

证明　根据定理假设条件知, $mp=N, 1\leqslant k\leqslant N$ 和 $1<p\leqslant q<\infty$. 所以可以选择 p_1,p_2 和 θ, 使得 $1<p_1<p<p_2, N-mp_1<k, 0<\theta<1$ 和

$$\frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{p_2},\qquad \frac{1}{q}=\frac{\theta}{p_1}.$$

由引理 4.2.2 知, $v\mapsto(\chi_1*|v|)\big|_U$ 和 $v\mapsto(\chi_1\omega_m*|v|)\big|_U$ 是从 $L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^{p_1}(\mathbb{R}^k)$ 的有界映射, 是强 (p_1,p_1) 型, 因此它们也是弱 (p_1,p_1) 型. 例如, 在定理 4.2.1 的证明中可知这些同样的映射是从 $L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^k)$ 的, 它们也是有界的. 所以它们是弱 (p_2,∞) 型. 由 Marcinkiewicz 定理知它们从 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^k)$ 是有界的和

$$\|\chi_1*|v|\|_{q,U}\leqslant\|\chi_1\omega_m*|v|\|_{q,U}\leqslant K\|v\|_{p,\mathbb{R}^N}.$$

将以上估计应用到式 (4.2.21) 的各项, 即得要证的结果. □

下面应用混合范数 Hölder 不等式证明一个平均引理 (引理 4.2.4), 为此先引入一些记号. 设 $K=(K_1,K_2,\cdots,K_k)$ 是 k 重指数, 其分量满足条件 $1\leqslant K_1<K_2<\cdots<K_k\leqslant N$, 这样的 k 重指数 K 的个数等于 $\begin{pmatrix}N\\k\end{pmatrix}$. 记 S 是一切这样的 k 重指数集合. 对于 $K\in S$, 令 $\mathbb{R}_K^k$ 表示由坐标轴 $x_{K_1},x_{K_2},\cdots,x_{K_k}$ 所张成的 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维坐标子空间或 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维平面:

$$\mathbb{R}_K^k=\left\{x\in\mathbb{R}^N\middle|x_i=0,\ 若\ i\overline{\in}K\right\}.$$

对于给定的 $x\in\mathbb{R}^N$ 令 x^K 表示 $\mathbb{R}^k$ 中的点 $(x_{K_1},x_{K_2},\cdots,x_{K_k})$ 和 $\mathrm{d}x^K=\mathrm{d}x_{K_1}\mathrm{d}x_{K_2}\cdots\mathrm{d}x_{K_k}$. Ω_K^k 表示 Ω 在 $\mathbb{R}_K^k$ 上的投影:

$$\Omega_K^k=\left\{x\in\mathbb{R}_K^k\middle|x^K=y^K,\ 对于\ \ y\in\Omega\right\}.$$

引理 4.2.4 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, $N\geqslant 2,k$ 是正整数, $1\leqslant k\leqslant N$, $\lambda=\binom{N-1}{k-1}, F_K(x^K)=F_K(x_{K_1},x_{K_2},\cdots,x_{K_k})\in L^\lambda(\Omega_K^k)$, $F(x)=\prod\limits_{K\in S}F_K(x^K)$, 则 $F\in L^1(\Omega)$ 和 $\|F\|_{1,\Omega}\leqslant\prod\limits_{K\in S}\|F_K\|_{\lambda,\Omega_K^k}$, 即

$$\int_\Omega|F(x)|\mathrm{d}x\leqslant\prod_{K\in S}\left[\int_{\Omega_K^k}|F_K(x^K)|^\lambda\mathrm{d}x^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}.\tag{4.2.27}$$

证明 应用混合范数 Hölder 不等式证明此引理. 对于每一个 $K\in S$, 令 P_K 是 N 维向量, 如果 $i\in K$, 则它的第 i 个分量是 λ; 如果 $i\overline{\in}K$, 则它的第 i 个分量是 ∞. 对于每个 $i,1\leqslant i\leqslant N$, 向量 P_K 中严格地有 $\dfrac{k}{N}\begin{pmatrix}N\\k\end{pmatrix}=\lambda$ 个第 i 个分量等于 λ. 因此应用 2.5 节中的记号有

$$\sum_{K\in S}\frac{1}{P_K}=\frac{1}{W},$$

其中 W 是 N 维向量 $(1,1,\cdots,1)$.

令 $F_K(x^K)$ 对于 $x^K\overline{\in}\Omega_K^k$ 的点认为是零和考虑 $F_K(x^K)$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的函数. 如果 $j\overline{\in}K$, $F_K(x^K)$ 不依赖于 x_j, 则 $F_K(x^K)$ 是它在那些 x_j 上自身的上确界和

$$\|F_K\|_{\lambda,\Omega_K^k}=\|F_K\|_{P_K,\mathbb{R}^N}.$$

由混合范数 Hölder 不等式推出

$$\|F\|_{1,\Omega}\leqslant\|F\|_{W,\mathbb{R}^N}\leqslant\prod_{K\in S}\|F_K\|_{P_K,\mathbb{R}^N}=\prod_{K\in S}\|F_K\|_{\lambda,\Omega_K^k},$$

即为所求. □

引理 4.2.5　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界锥形区域, 则 $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, 其中 $1 \leqslant q \leqslant \dfrac{N}{N-1}$.

证明　根据定理 3.4.1, Ω 可以分解成 n 个 L 型区域的并, 而每一个子区域是一个固定平行多面体平移的并. 所以只需证明这些 L 型区域之一的嵌入关系即可. 因此假定 $\Omega = \bigcup\limits_{x \in A}(x+P)$, 其中 A 是 Ω 中的集合, P 是平行多面体. 存在 $\mathbb{R}^N$ 到自身的一个线性变换, 映 P 到棱平行于对应坐标轴的单位立方体 Q. 所以根据定理 4.1.3 和定理 4.1.4 只需对 $\Omega = \bigcup\limits_{x \in A}(x+Q)$ 来证明引理. 对于 $x \in \Omega$, 令 ℓ 表示通过 x 并且平行于 x_1 轴的直线与 Ω 的交集. 显然 ℓ 包含 x 和长度为 1 的闭区间, 记为 $[\xi_1, \xi_2]$. 若 $f \in C^1([0,1])$, 则

$$|f(t_0)| \leqslant |f(t)| + \left|\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right|,$$

其中 $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$. 上式在 $[0,1]$ 上对 t 积分, 得

$$|f(t_0)| \leqslant \int_0^1 \left(|f(t)| + \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\right|\right) \mathrm{d}t.$$

对于 $u \in C^\infty(\Omega)$ 应用这个不等式于 $u(t, \widehat{x}_1)(\widehat{x}_1 = (x_2, x_3, \cdots, x_N))$ 推出

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leqslant \int_{\xi_1}^{\xi_2} (|u(t,\widehat{x}_1)| + |D_1 u(t,\widehat{x}_1)|)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{\ell} (|u(t,\widehat{x}_1)| + |D_1 u(t,\widehat{x}_1)|)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

令 Ω_1 是 Ω 到坐标为 $\widehat{x}_1$ 的超平面上的正交投影和令

$$u_1(\widehat{x}_1) = \left(\int_{\ell} (|u(t,\widehat{x}_1)| + |D_1 u(t,\widehat{x}_1)| \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{4.2.29}$$

于是由式 (4.2.28) 和式 (4.2.29) 有 $|u(x)| < (u_1(\widehat{x}_1))^{N-1}$. 由式 (4.2.29) 推出

$$\|u_1\|_{N-1,\Omega_1}^{N-1} = \int_{\Omega_1} |u_1(\widehat{x}_1)|^{N-1} \mathrm{d}\widehat{x}_1 \leqslant \|u\|_{1,1,\Omega}.$$

类似地, 对于 $2 \leqslant j \leqslant N$, 定义 u_j 不依赖于 x_j 和满足 $|u(x)| \leqslant (u_j(\widehat{x}_j))^{N-1}(\widehat{x}_j = (x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_N))$ 以及

$$\|u_j\|_{N-1,\Omega_j}^{N-1} \leqslant \|u\|_{1,1,\Omega}.$$

因为 $|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leqslant \prod_{j=1}^{N} u_j(\widehat{x}_j)$, 对于 $k = N-1 = \lambda$, 利用式 (4.2.27), 得

$$\int_\Omega |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\mathrm{d}x \leqslant \prod_{j=1}^{N}\left[\int_{\Omega_j} |u_j(\widehat{x}_j)|^{N-1}\mathrm{d}\widehat{x}_j\right]^{\frac{1}{N-1}} \leqslant \|u\|_{1,1,\Omega}^{\frac{N}{N-1}}.$$

对于原区域 Ω 由上式推出

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1},\Omega} \leqslant K_0\|u\|_{1,1,\Omega},$$

其中常数 K_0 依赖于 N, 决定锥条件的锥 C, 决定这些子区域的个数 n 和变换每一个子区域的平行多面体到 Q 的线性变换. 利用定理 2.1.5 可得对于 $1 \leqslant q \leqslant \dfrac{N}{N-1}$ 的嵌入关系 $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. 又由于 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,1}(\Omega)$ 中稠密, 即得引理 4.2.5 的结论. □

定理 4.2.5 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界锥形区域, 和设对于 $1 \leqslant k \leqslant N, \Omega_k$ 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面的交. 如果 $1 \leqslant k \leqslant N, m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 为整数, $mp < N, p = 1$ 和 $N - m < k \leqslant N$, 则

$$W^{m+j,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{k}{N-m}. \tag{4.2.30}$$

特别地,

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{N}{N-m}. \tag{4.2.31}$$

证明 令 $m \leqslant N$. 根据引理 4.2.5, 有

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,q'}(\Omega), \quad 1 \leqslant q' \leqslant \frac{N}{N-1}.$$

由于 $k > N-m$, 所以对于任意的 $q' > 1, N \geqslant k \geqslant N-m+1 > N-(m-1)q'$. 因此利用定理 4.2.3 对于

$$1 \leqslant q \leqslant p^* = \frac{kq'}{N-(m-1)q'} = \frac{\dfrac{kN}{N-1}}{N - \dfrac{(m-1)N}{N-1}} = \frac{k}{N-m},$$

$W^{m-1,q'}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k)$ 成立. 综合以上嵌入关系得

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k), \quad 1 \leqslant q \leqslant \frac{k}{N-m}.$$

对于 $p = 1, m = N$ 的情形在定理 4.2.2 中已证明对于 $1 \leqslant q \leqslant \infty, 1 \leqslant k \leqslant N$ 成立嵌入 $W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k)$. □

定理 4.2.6 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界锥形区域并设对于 $1 \leqslant k \leqslant N$, Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面的交. 若 $m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 为整数, $m < N, p = 1$ 和 $k = N - m$, 则

$$W^{m+j,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,1}(\Omega_k), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{k}{N - mp} = 1.$$

特别地,

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{N}{N - m}.$$

证明 在这种情况下我们要证明 $W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega_k)$. 正如, 证明引理 4.2.5 只需对 Ω 是棱平行于坐标轴的单位立方体平移的并即可.

我们可以假定 $0 \in \Omega$ 和

$$\Omega_k = \{x = (x', x'') \in \Omega | x' = 0\},$$

其中 $x' = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 和 $x'' = (x_{m+1}, \cdots, x_N)$. 对于 $x \in \Omega$, 令 Ω_x 表示过 x 点为变量 x' 的 m 维平面与 Ω 的交. Ω_x 包含一个含 x 的边长为 1 的 m 维立方体 Q_x, 将定理 4.2.1 用于这个立方体. 对于 $f \in C^\infty(\Omega)$ 有

$$|f(x)| \leqslant K \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\Omega_x} |D^\alpha f(x', x'')| \mathrm{d}x',$$

则上式在 Ω_k 上对 x'' 积分给出

$$\int_{\Omega_k} |f(x)| \mathrm{d}x'' \leqslant K \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)| \mathrm{d}x.$$

由于 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,1}(\Omega)$ 中稠密所以定理得证. □

如果定理 4.2.1 中的区域 Ω 是 L 型区域, 则结论可以加强, 这就是要证明的下一个定理. 为此先证明一个引理.

引理 4.2.6 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是 L 型区域. 如果 $f \in W^{1,p}(\Omega)$, 其中 $N < p \leqslant \infty$, $0 < \lambda \leqslant 1 - \dfrac{N}{p}$, 则

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\lambda} \leqslant K \|f\|_{1,p,\Omega}, \tag{4.2.32}$$

其中常数 K 依赖于 p, N 和 L 型区域定义中的 M 和 δ.

证明 暂时假定 Ω 是边长为 1 的立方体, 不包括边界. 对于 $0 < t < 1$, 令 Q_t 表示 Ω 的一子集, 即表面分别平行于 Ω 的表面且边长为 t 的立方体. 如果 $x, y \in \Omega$, 则 $\sigma = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i - y_i| < 1$, 于是存在如此一个固定立方体 Q_σ, 使得 $x, y \in \overline{Q}_\sigma$.

令 $f \in C^\infty(\Omega)$. 如果 $z \in Q_\sigma$, 则

$$f(x) - f(z) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + t(z - x))\mathrm{d}t. \tag{4.2.33}$$

利用离散型的 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + t(z - x))\right| &= \left|\sum_{i=1}^N (z_i - x_i) D_i f(x + t(z - x))\right| \\ &\leqslant |\mathrm{grad} f(x + t(z - x))||z - x| \\ &\leqslant \sqrt{N}\sigma|\mathrm{grad} f(x + t(z - x))|.\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

由式 (4.2.33) 利用式 (4.2.34) 有

$$|f(x) - f(z)| \leqslant \sqrt{N}\sigma \int_0^1 |\mathrm{grad} f(x + t(z - x))|\mathrm{d}t. \tag{4.2.35}$$

从而

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{1}{\sigma^N}\int_{Q_\sigma} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\frac{1}{\sigma^N}\int_{Q_\sigma} (f(x) - f(z))\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\sigma^N}\int_{Q_\sigma} |f(x) - f(z)|\mathrm{d}z \\ &\leqslant \frac{\sqrt{N}}{\sigma^{N-1}}\int_{Q_\sigma} \mathrm{d}z \int_0^1 |\mathrm{grad} f(x + t(z - x))|\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

下面对 p 分两种情况讨论:

(1) $N < p < \infty$ 的情况. 作变换

$$x + t(z - x) = y, \quad 0 < t < 1, \tag{4.2.37}$$

则 $t(z - x) = y - x$, 于是将 Q_σ 变为 $Q_{t\sigma}$. 注意到 $t^N \mathrm{d}z = \mathrm{d}y$, 对式 (4.2.36) 右端的积分项利用变换 (4.2.37) 和 Hölder 不等式, 就有

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{N}}{\sigma^{N-1}}\int_{Q_\sigma} \mathrm{d}z \int_0^1 |\mathrm{grad} f(x + t(z - x))|\mathrm{d}t \\ =&\frac{\sqrt{N}}{\sigma^{N-1}}\int_0^1 t^{-N}\mathrm{d}t \int_{Q_{t\sigma}} |\mathrm{grad} f(y)|\mathrm{d}y \\ \leqslant&\frac{\sqrt{N}}{\sigma^{N-1}}\|\mathrm{grad} f; L^p(\Omega)\| \int_0^1 \mu(Q_{t\sigma})^{\frac{1}{p'}} t^{-N}\mathrm{d}t \\ =&\frac{\sqrt{N}}{\sigma^{N-1}}\|\mathrm{grad} f; L^p(\Omega)\| \int_0^1 (t\sigma)^{\frac{N}{p'}} t^{-N}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{N}\sigma^{1-\frac{N}{p}}\|\mathrm{grad}f;L^p(\Omega)\|\int_0^1 t^{N\left(\frac{1}{p'}-1\right)}\mathrm{d}t\\
&=K_1\sigma^{1-\frac{N}{p}}\|\mathrm{grad}f;L^p(\Omega)\|,
\end{aligned}\tag{4.2.38}
$$

其中 $K_1=\dfrac{\sqrt{N}p}{p-N}$ 和 p' 是 p 的共轭指数.

将式 (4.2.38) 代入式 (4.2.36) 可知

$$
\left|f(x)-\frac{1}{\sigma^N}\int_{Q_\sigma}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant K_1\sigma^{1-\frac{N}{p}}\|\mathrm{grad}f;L^p(\Omega)\|.\tag{4.2.39}
$$

同理可证

$$
\left|f(y)-\frac{1}{\sigma^N}\int_{Q_\sigma}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant K_1\sigma^{1-\frac{N}{p}}\|\mathrm{grad}f;L^p(\Omega)\|.\tag{4.2.40}
$$

由式 (4.2.39) 和式 (4.2.40) 导出

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)|&\leqslant 2K_1\sigma^{1-\frac{N}{p}}\|\mathrm{grad}f;L^p(\Omega)\|\\
&\leqslant K_2|x-y|^{1-\frac{N}{p}}\|\mathrm{grad}f;L^p(\Omega)\|.
\end{aligned}
$$

(2) $N<p=\infty$ 的情况, 由式 (4.3.35) 得

$$
|f(x)-f(z)|\leqslant\sqrt{N}\sigma\int_0^1|\mathrm{grad}f(x+t(z-x))|\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{N}\sigma\|\mathrm{grad}f;L^\infty(\Omega)\|.\tag{4.2.41}
$$

同理可知

$$
|f(y)-f(z)|\leqslant\sqrt{N}\sigma\|\mathrm{grad}f;L^\infty(\Omega)\|.\tag{4.2.42}
$$

综合式 (4.2.41) 和式 (4.2.42) 导出

$$
|f(x)-f(y)|\leqslant K_3|x-y|\|\mathrm{grad}f;L^\infty(\Omega)\|.
$$

由以上论述可知式 (4.2.32) 对于 $0<\lambda\leqslant 1-\dfrac{N}{p}$ 和 Ω 为单位立方体时成立, 所以通过一可逆线性变换式 (4.2.32) 对于 Ω 为平行多面体也成立.

现在假定 Ω 是任一 L 型区域. 令 $\delta,M,\Omega_\delta,O_j$ 和 V_j 是定义 3.4.4 中所规定的量. 根据 L 型区域性质 (4) 存在一个直径为 δ 的平行多面体 P,P 的大小只依赖于 δ 和 M, 使得对于每个 j 对应于一个与 P 全等的且有一个顶点在原点的平行多面体 P_j, 使得对于一切 $x\in V_j\bigcap\Omega$, 有 $x+P_j\subset\Omega$. 而且根据 L 型区域的性质 (5) 存在只依赖于 δ 和 P 的常数 K_1 和 $\delta_1,\delta_1\leqslant\delta$, 使得如果

$$
x,y\in V_j\bigcap\Omega\quad\text{和}\quad|x-y|<\delta_1,\tag{4.2.43}
$$

则存在 $z \in (x+P_j)\bigcap(y+P_j)$ 并满足

$$|x-z|+|y-z| \leqslant K_1|x-y|. \tag{4.2.44}$$

把式 (4.2.32) 分别用到多面体 $x+P_j$ 和 $y+P_j$ 上, 由式 (4.2.44) 推出, 如果 $f \in C^\infty(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leqslant |f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)| \\ &\leqslant K|x-z|^\lambda \|f\|_{1,p,\Omega}+K|y-z|^\lambda\|f\|_{1,p,\Omega} \\ &= K\|f\|_{1,p,\Omega}(|x-z|^\lambda+|y-z|^\lambda) \\ &\leqslant 2KK_1^\lambda|x-y|^\lambda\|f\|_{1,p,\Omega},\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

于是在式 (4.2.43) 的条件下证明了式 (4.2.45) 成立.

如果能在没有式 (4.2.43) 的条件下, 证明了式 (4.2.45), 那么也就证明了式 (4.2.32). 为此, 分两种情形来证明这一事实.

(1) 设 $x,y \in \Omega$ 是任意两点. 如果 $|x-y| < \delta_0 \leqslant \delta$, 下面确定 δ_0, 再分三种情形:

(a) 设 $x,y \in \Omega_{\delta_0}$, 则根据 L 型区域的性质 (3) 存在 j, 使得 $x,y \in V_j$, 此时 x,y 满足条件式 (4.2.43), 因而式 (4.2.45) 成立.

(b) 设 $x \in \Omega_{\delta_0}, y \in \Omega-\Omega_{\delta_0}$, 则只要 δ_0 选得充分小, 此时仍可找到 j, 使得 $x,y \in V_j$, 因而式 (4.2.45) 成立.

(c) 设 $x,y \in \Omega-\Omega_{\delta_0}$, 则根据 L 型区域的性质 (6), $x+P_0, y+P_0$ 必相交, 仿照由式 (4.2.43) 导出式 (4.2.45) 的过程, 仍可得式 (4.2.45).

(2) $|x-y| \geqslant \delta_0$ 的情形, 则

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)|+|f(y)| \leqslant K_3\|f\|_{1,p,\Omega} \leqslant K_3\delta_0^{-\lambda}|x-y|^\lambda\|f\|_{1,p,\Omega}.$$

从而式 (4.2.32) 对所有的 $f \in C^\infty(\Omega)$ 成立. 由于 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中稠密, 所以引理 4.2.6 成立. □

定理 4.2.7 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是 L 型区域, $m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 是整数和 $mp > N \geqslant (m-1)p$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \tag{4.2.46}$$

其中 λ 由下列条件确定:

(1) 若 $N > (m-1)p$, 则 $0 < \lambda \leqslant m - \dfrac{N}{p}$;

(2) 若 $N = (m-1)p$ 和 $p > 1$, 则 $0 < \lambda < 1$;

(3) 若 $N = m-1$ 和 $p = 1$, 则 $0 < \lambda \leqslant 1$. 特别地, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. 嵌入常数依赖于 m,p,N 和 L 型区域定义中的参数 δ 和 M.

证明　先简化证明. 我们只需要证明 $j=0$ 时的式 (4.2.46), 即对于适当的 λ 证明

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)|+\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant K\|f;W\|_{m,p,\Omega}.$$

因为 L 型区域是有界锥形区域, 由定理 4.2.1 得

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\leqslant K_1\|f\|_{m,p,\Omega}. \tag{4.2.47}$$

根据 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 的元素范数的定义, 如果能再证明成立

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant K_2\|f\|_{m,p,\Omega},\quad \forall f\in W^{m,p}(\Omega), \tag{4.2.48}$$

则由式 (4.2.47) 和式 (4.2.48) 推得 $j=0$ 时, 式 (4.2.46) 成立. 所以只需证明式 (4.2.48) 成立即可.

当 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 时, $f,D_if\in W^{m-1,p}(\Omega)$ $(i=1,2,\cdots,N)$. 因为 $N\geqslant(m-1)p$, 利用定理 4.2.3 有

$$W^{m-1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega).$$

由此得到

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,r}(\Omega).$$

根据定理 4.2.2~ 定理 4.2.4, r 值的确定分下面三种情形:

(1) 若 $N>(m-1)p$, 就取 $r=\dfrac{Np}{N-(m-1)p}$, 此时 $r>N$ 且 $1-\dfrac{N}{r}=m-\dfrac{N}{p}$;

(2) 若 $N=(m-1)p, p>1$, 则 $r(p\leqslant r<\infty)$ 只取满足 $N<r<\infty$ 和 $0<1-\dfrac{N}{r}<1$ 即可;

(3) 若 $p=1$ 且 $N=m-1$, 就取 $r=\infty$, 此时

$$1-\frac{N}{r}=m-\frac{N}{p}=1.$$

综合上述情况, 无论属于哪种情形, 总成立 $N<r\leqslant\infty$. 根据引理 4.2.6 有

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant K_3\|f\|_{1,r,\Omega},$$

其中$0<\lambda\leqslant 1-\dfrac{N}{r}$. 上式与 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,r}(\Omega)$ 结合推出式 (4.2.48) 成立, 于是定理 4.2.7 结论成立. □

上面讨论了索伯列夫空间的嵌入定理, 下面讨论连续函数空间的嵌入定理.

定理 4.2.8 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, $m \geqslant 0$ 是整数和 $0<\lambda<\mu \leqslant 1$, 则成立下列嵌入关系

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \tag{4.2.49}$$

$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \tag{4.2.50}$$

$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}). \tag{4.2.51}$$

如果 Ω 是凸区域, 有进一步的嵌入关系

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega}), \tag{4.2.52}$$

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}). \tag{4.2.53}$$

证明 从以下明显的不等式

$$\|f; C^m(\overline{\Omega})\| \leqslant \|f; C^{m+1}(\overline{\Omega})\|,$$
$$\|f; C^m(\overline{\Omega})\| \leqslant \|f; C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\|$$

知嵌入关系 (4.2.49) 和关系 (4.2.50) 成立. 为了证明嵌入关系 (4.2.51), 注意到对于满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的 N 重指数有

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ 0<|x-y|<1}} \frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\mu}$$

和

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ |x-y| \geqslant 1}} \frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant 2 \sup_{x \in \Omega}|D^\alpha f(x)|.$$

由此得到

$$\|f; C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| \leqslant 3\|f; C^{m,\mu}(\overline{\Omega})\|,$$

即式 (4.2.51) 成立.

如果 Ω 是凸的且 $x, y \in \Omega$, 则由中值定理, 在连接 x 和 y 的线段上存在一点 $z \in \Omega$, 使得 $D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)=(x-y) \cdot \nabla D^\alpha f(z)$, 其中 $\nabla f=(D_1 f, D_2 f, \cdots, D_N f)$. 于是

$$|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)| \leqslant N|x-y|\|f; C^{m+1}(\bar{\Omega})\|.$$

这样就证明了式 (4.2.52), 并且式 (4.2.53) 由式 (4.2.52) 和 (4.2.51) 得到. □

设映射 $f \rightarrow \widetilde{f}$ 表示 $f(x)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 外的零延拓.

引理 4.2.7 设 $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$. 若 N 重指数 $|\alpha| \leqslant m$, 则在 $\mathbb{R}^N$ 中在广义函数意义下, $D^\alpha \widetilde{f}(x) = \widetilde{D^\alpha f}$. 因此 $\widetilde{f} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

证明 设 $C_c^\infty(\Omega)$ 中的函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中收敛于 $f(x)$. 若 $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, 则对于 $|\alpha| \leqslant m$, 有

$$
\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x) D^\alpha \psi(x) \mathrm{d}x &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \psi(x) \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n(x) D^\alpha \psi(x) \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega D^\alpha f_n(x) \psi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{D^\alpha f}(x) \psi(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因此在 $\mathbb{R}^N$ 中在广义函数意义下 $D^\alpha \widetilde{f}(x) = \widetilde{D^\alpha f}(x)$. 从而这些局部可积函数在 $\mathbb{R}^N$ 内几乎处处相等. 于是得到 $\|\widetilde{f}; W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\| = \|f; W^{m,p}(\Omega)\|$. □

引理 4.2.7 证明了映射 $f \to \widetilde{f}$ 将 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 等距地映射到 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

注 4.2.1 (1) 如果把接受嵌入的 $W^{m+j,p}(\Omega)$ 空间或 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间都换成相应的 $W_0^{m+j,p}(\Omega)$ 空间或 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 空间, 则定理 4.2.1~ 定理 4.2.6 的一切结论对任意的区域都成立.

(2) 实际上 (1) 的结论是定理 4.2.1~ 定理 4.2.6 应用到 $\mathbb{R}^N$ 上的直接结果, 因为根据引理 4.2.7 把函数在 Ω 外延拓为零的算子将 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 等距地映射到 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 中.

(3) 索伯列夫空间 $W^{m+j,p}(\Omega)$ 中的 m 和 j 均为非负整数, p 都大于或等于 1. 当 $N = 1$ 时, 本章的嵌入结论仍旧成立.

4.3 作为 Banach 代数的 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间

下面讨论作为 Banach 代数的 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间. 为此先回顾一下有关代数的基本知识.

定义 4.3.1 (1) $\mathscr{A}$ 称为域 $\mathscr{K}$ 上的一个代数, 如果

(a) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{K}$ 上的一个线性空间;

(b) $\mathscr{A}$ 上定义了乘法: 对于每一有序对元素 $x, y \in \mathscr{A}$ 定义了唯一的积 $xy \in \mathscr{A}$, 对所有 $x, y, z, w \in \mathscr{A}$ 和 $\lambda, \mu \in \mathscr{K}$ 满足

$(xy)z = x(yz)$ (结合律);

$(x+y)(z+w) = xz + yz + xw + yw$ (分配律);

$(\lambda\mu)(xy) = (\lambda x)(\mu y)$.

(2) 如果 $\mathscr{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 则 $\mathscr{A}$ 分别称为实数域上或复数域上的一个代数.

(3) $\mathscr{A}$ 称为可交换的 (或称为阿贝尔的) 代数, 如果乘法是可交换的, 即如果对所有的 $x, y \in \mathscr{A}$, 有

$$xy = yx.$$

(4) $\mathscr{A}$ 称为具有幺元的代数, 如果 $\mathscr{A}$ 中包含一个元素 e, 使得对所有 $x \in \mathscr{A}$, 有

$$ex = xe = x,$$

这个元素 e 称为 $\mathscr{A}$ 的幺元.

如果 $\mathscr{A}$ 存在幺元, 则它是唯一的. 事实上, 如果 e' 是 $\mathscr{A}$ 的另一幺元, 因为

$$\begin{aligned} ee' &= e \quad (\text{由于 } e' \text{ 是幺元}), \\ ee' &= e' \quad (\text{由于 } e \text{ 是幺元}), \end{aligned}$$

则 $e' = e$.

(5) 记 $\mathscr{A}$ 是有幺元的代数, $x \in \mathscr{A}$ 称为可逆的, 如果存在 $y \in \mathscr{A}$, 使得 $xy = yx = e$. 满足上述等式的 y 是唯一确定的, 于是 y 称为 x 的逆, 记作 x^{-1}. 如果 $\mathscr{A}$ 中每个非零元都可逆, $\mathscr{A}$ 称为可除代数.

定义 4.3.2 (赋范代数, Banach 代数) $\mathscr{A}$ 称为一个 Banach 代数或简称为 B 代数, 如果

(1) $\mathscr{A}$ 是复数域上的代数;

(2) $\mathscr{A}$ 中有范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{A}$ 在此范数下是一 Banach 空间;

(3) 对于所有的 $x, y \in \mathscr{A}$, 有

$$\|xy\|_{\mathscr{A}} \leqslant \|x\|_{\mathscr{A}} \|y\|_{\mathscr{A}}. \tag{4.3.1}$$

注 4.3.1 (1) Banach 代数 $\mathscr{A}$ 中的乘法关于范数是连续的, 即当 $n \to \infty$ 时, $\|x_n - x\|_{\mathscr{A}} \to 0$, $\|y_n - y\|_{\mathscr{A}} \to 0$, 利用定义 4.3.2 中的条件 (3) 知, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\|_{\mathscr{A}} &\leqslant \|x_n y_n - x y_n\|_{\mathscr{A}} + \|x y_n - xy\|_{\mathscr{A}} \\ &\leqslant \|y_n\|_{\mathscr{A}} \|x_n - x\|_{\mathscr{A}} + \|x\|_{\mathscr{A}} \|y_n - y\|_{\mathscr{A}} \to 0. \end{aligned}$$

(2) 若 $\mathscr{A}$ 有幺元 e, 则 $\|e\|_{\mathscr{A}} \geqslant 1$. 事实上, 因为 $e = e \cdot e$, 由定义 4.3.2 中的条件 (3) 知, $\|e\|_{\mathscr{A}} \leqslant \|e\|_{\mathscr{A}}^2$, 立得 $\|e\|_{\mathscr{A}} \geqslant 1$.

但对于 $\mathscr{A}$ 可以赋予另一范数

$$|x|_{\mathscr{A}} = \sup_{y \in \mathscr{A}} \frac{\|xy\|_{\mathscr{A}}}{\|y\|_{\mathscr{A}}}.$$

在此范数下, $|e|_{\mathscr{A}} = 1$. 因为

$$\frac{\|x\|_{\mathscr{A}}}{\|e\|_{\mathscr{A}}} \leqslant |x|_{\mathscr{A}} \leqslant \|x\|_{\mathscr{A}}, \quad \forall x \in \mathscr{A},$$

所以范数 $|x|_{\mathscr{A}}$ 和 $\|x\|_{\mathscr{A}}$ 等价.

Banach 代数的例子.

例 4.3.1 空间 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$. 实数 $\mathbb{R}$ 和复平面 $\mathbb{C}$ 是具有幺元 $e = 1$ 的可交换 Banach 代数.

例 4.3.2 空间 $C[a,b]$. 空间 $C[a,b]$ 是具有幺元 $(e = 1)$ 的可交换 Banach 代数, 乘积 xy 是按通常方法定义

$$(xy)(t) = x(t)y(t).$$

容易验证关系 (4.3.1) 成立.

例 4.3.3 空间 $L(X,X)$. 由 Banach 空间 $X \neq \{0\}$ 到自身的一切线性算子全体形成的一个 Banach 空间, 记为 $L(X,X)$. 定义乘法为

$$(T_1 \cdot T_2)(x) = T_1(T_2(x)), \quad x \in X.$$

不难验证这个乘法在 $L(X,X)$ 中满足

$T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$ (结合律);

$(T_1 + T_2)(T_3 + T_4) = T_1T_3 + T_1T_4 + T_2T_3 + T_2T_4$ (分配律);

$(\lambda\mu)(T_1T_2) = (\lambda T_1)(\mu T_2)$ $(\lambda, \mu \in \mathscr{K})$;

$1 \cdot T = T$;

$IT = TI = T$,

其中 $T_1, T_2, T_3, T_4 \in L(X,X), I$ 为 X 上的单位算子. 于是 $L(X,X)$ 形成一个数域 $\mathscr{K}$ 上的代数. 记 $\|\cdot\|$ 为空间 $L(X,X)$ 中的范数.

因为

$$\|T_1T_2x\| \leqslant \|T_1\|\|T_2x\| \leqslant \|T_1\|\|T_2\|\|x\|,$$

所以由线性算子构成的关系 (4.3.1) 是

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\|\|T_2\|,$$

并且 $\|I\| = 1$. 于是对于 $T, T_1, T_0, T_* \in L(X,X)$

$$\begin{aligned}
&\|(T_1 - T_0)T\| \leqslant \|T_1 - T_0\|\|T\|, \\
&\|T(T_1 - T_0)\| \leqslant \|T\|\|T_1 - T_0\|, \\
&\|TT_1 - T_0T_*\| \leqslant \|TT_1 - TT_*\| + \|TT_* - T_0T_*\|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \|T\|\|T_1 - T_*\| + \|T - T_0\|\|T_*\|,$$

所以当 $T_n \to T_0, T_n' \to T_*$ 时, 必然 $T_nT_n' \to T_0T_*$, 即 Banach 代数 $L(X, X)$ 中的乘法关于范数是连续的.

如果我们证明了以下定理, 依 Banach 代数的定义便知 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间是一 Banach 代数.

定理 4.3.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足锥条件的区域. 如果 $mp > N$ 或 $p = 1$ 和 $m \geqslant N$, 则存在一个依赖于 m, p, N 和决定 Ω 满足锥条件的有限锥 C 的常数 K^*, 使得对所有的 $f, v \in W^{m,p}(\Omega)$, 在 Ω 中几乎处处逐点定义的乘积 fv 属于 $W^{m,p}(\Omega)$, 而且满足

$$\|fv; W^{m,p}(\Omega)\| \leqslant K^*\|f; W^{m,p}(\Omega)\|\|v; W^{m,p}(\Omega)\|. \tag{4.3.2}$$

特别地, 赋予由

$$\|f; W^{m,p}(\Omega)\|^* = K^*\|f; W^{m,p}(\Omega)\| \tag{4.3.3}$$

定义的等价范数, 因为

$$\|fv; W^{m,p}(\Omega)\|^* \leqslant \|f; W^{m,p}(\Omega)\|^*\|v; W^{m,p}(\Omega)\|^*,$$

$W^{m,p}(\Omega)$ 是一个关于逐点相乘的可交换的 Banach 代数.

证明 假定 $mp > N; p = 1, m = N$ 是简单的情况. 为了证明式 (4.3.2), 只需证明, 如果 $|\alpha| \leqslant m$, 则

$$\int_\Omega |D^\alpha[f(x)v(x)]|^p \mathrm{d}x \leqslant K_\alpha\|f, W^{m,p}(\Omega)\|^p\|v; W^{m,p}(\Omega)\|^p,$$

其中 $K_\alpha = K_\alpha(m, p, N, C)$. 我们暂时假定 $f \in C^\infty(\Omega)$ 和 $v \in W^{m,p}(\Omega)$. 根据定理 3.2.2 的广义导数的 Leibniz 公式, 即

$$D^\alpha(fv) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta f D^{\alpha-\beta} v,$$

只要证明, 对任意的 $\beta \leqslant \alpha$, $|\alpha| \leqslant m$, 有

$$\int_\Omega |D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} v(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant K_{\alpha,\beta}\|f; W^{m,p}(\Omega)\|^p\|v; W^{m,p}(\Omega)\|^p$$

成立即可, 其中 $K_{\alpha,\beta} = K_{\alpha,\beta}(m, p, N, C)$.

按照嵌入定理, 对于每个 $\beta, |\beta| \leqslant m$ 存在一个常数 $K(\beta) = K(\beta, m, p, N, C)$,

使得对任意的 $w \in W^{m,p}(\Omega)$, 当 $(m-|\beta|)p \leqslant N$ 和 $p \leqslant r \leqslant \dfrac{Np}{N-(m-|\beta|)p}$(或当 $(m-|\beta|)p = N$ 时, 则 $p \leqslant r < \infty$) 时, 就有

$$\int_\Omega |D^\beta w(x)|^r \mathrm{d}x \leqslant K(\beta)\|w; W^{m,p}(\Omega)\|^r, \tag{4.3.4}$$

或者当 $(m-|\beta|)p > N$ 时, 由嵌入定理 4.2.1 知, 在 Ω 上几乎处处成立

$$|D^\beta w(x)| \leqslant K(\beta)\|w; W^{m,p}(\Omega)\|.$$

设 k 是使 $(m-k)p > N$ 的最大整数. 因为 $mp > N$, 所以 $k \geqslant 0$. 如果 $|\beta| \leqslant k$, 则 $(m-|\beta|)p > N$, 因此

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} v(x)|^p \mathrm{d}x &\leqslant K(\beta)^p \|f; W^{m,p}(\Omega)\|^p \|D^{\alpha-\beta}v; L^p(\Omega)\|^p \\ &\leqslant K(\beta)^p \|f; W^{m,p}(\Omega)\|^p \|v; W^{m,p}(\Omega)\|^p.\end{aligned}$$

类似地, 如果 $|\alpha-\beta| \leqslant k$, 则

$$\int_\Omega |D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} v(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant K(\alpha-\beta)^p \|f; W^{m,p}(\Omega)\|^p \|v; W^{m,p}(\Omega)\|^p.$$

如果 $|\beta| > k$ 和 $|\alpha-\beta| > k$, 则实际上 $|\beta| \geqslant k+1$ 且 $|\alpha-\beta| \geqslant k+1$, 所以 $N \geqslant (m-|\beta|)p$ 且 $N \geqslant (m-|\alpha-\beta|)p$. 显然

$$\frac{N-(m-|\beta|)p}{N} + \frac{N-(m-|\alpha-\beta|)p}{N} = 2 - \frac{(2m-|\alpha|)p}{N} < 2 - \frac{mp}{N} < 1.$$

因此存在正数 r, r' 满足 $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$, 使得

$$p \leqslant rp < \frac{Np}{N-(m-|\beta|)p}, \quad p \leqslant r'p < \frac{Np}{N-(m-|\alpha-\beta|)p}.$$

所以根据 Hölder 不等式和式 (4.3.4) 推出

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} v(x)|^p \mathrm{d}x &\leqslant \left[\int_\Omega |D^\beta f(x)|^{rp} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_\Omega |D^{\alpha-\beta} v(x)|^{r'p} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r'}} \\ &\leqslant [K(\beta)]^{\frac{1}{r}} [K(\alpha-\beta)]^{\frac{1}{r'}} \|f; W^{m,p}(\Omega)\|^p \|v; W^{m,p}(\Omega)\|^p.\end{aligned}$$

这就对 $f \in C^\infty(\Omega)$ 和 $v \in W^{m,p}(\Omega)$ 证明了式 (4.3.2).

如果 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 则根据推论 3.6.1 在 $C^\infty(\Omega)$ 中存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中收敛到 $f(x)$. 因为 $f_n \in C^\infty(\Omega), v \in W^{m,p}(\Omega)$, 由式 (4.3.2) 推出

$$\|(f_n - f_m)v; W^{m,p}(\Omega)\| \leqslant K^* \|f_n - f_m; W^{m,p}(\Omega)\| \|v; W^{m,p}(\Omega)\|,$$

所以 $\{f_n(x)v(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列, 于是此序列收敛到 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的一个元素 w. 因为 $mp > N$, 可以假定 $f(x), v(x)$ 在 Ω 上连续且有界, 因此, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|w - fv; L^p(\Omega)\| &\leqslant \|w - f_n v; L^p(\Omega)\| + \|(f_n - f)v; L^p(\Omega)\| \\ &\leqslant \|w - f_n v; L^p(\Omega)\| + \|v; L^\infty(\Omega)\| \|f_n - f; L^p(\Omega)\| \to 0.\end{aligned}$$

于是在 $L^p(\Omega)$ 中 $w(x) = f(x)v(x)$. 所以在广义函数意义下 $w(x) = f(x)v(x)$. 因此在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中 $w(x) = f(x)v(x)$, 而且

$$\begin{aligned}\|fv; W^{m,p}(\Omega)\| = \|w; W^{m,p}(\Omega)\| &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_n v; W^{m,p}(\Omega)\| \\ &\leqslant K^* \|f; W^{m,p}(\Omega)\| \|v; W^{m,p}(\Omega)\|.\end{aligned}$$

根据等价范数 (4.3.3) 易知

$$\|fv; W^{m,p}(\Omega)\|^* \leqslant \|f; W^{m,p}(\Omega)\|^* \|v; W^{m,p}(\Omega)\|^*.$$

所以 $W^{m,p}(\Omega)$ 是一个可交换的 Banach 代数. 这就完成了定理的证明. □

4.4 插值定理

在本节中我们考虑根据函数 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 及其 $|\alpha| = m$ 阶导数 $D^\alpha f$ 的 $L^p(\Omega)$ 的范数来确定导数 $D^\beta f(|\beta| \leqslant m)$ 的 $L^p(\Omega)$ 范数的上界问题, 即考虑中间导数的插值不等式.

先从一个简单的一维插值不等式开始, 对下面更一般的定理, 它仍然是典型的并且提供了证明这些定理的基础.

引理 4.4.1 设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty, 1 \leqslant p < \infty$, 并且设 $0 < \varepsilon_0 < \infty$, 则存在有限常数 $K = K(\varepsilon_0, p, b-a)$, 它对 $0 < b - a \leqslant \infty$ 连续地依赖于 $b - a$, 使对所有满足 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 的 ε, 以及所有在开区间 (a, b) 上二次连续可导的函数 $f(x)$ 有

$$\int_a^b |f'(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant K\varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p \mathrm{d}t + K\varepsilon^{-1} \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t, \tag{4.4.1}$$

并且, 如果 $b - a = \infty$, 则可找到 $K = K(p)$ 使得式 (4.4.1) 对所有的正数 ε 成立, 其中 $f'(t)$ 表示对变量 t 求一阶导数等.

证明 不失一般性, 假定 $\varepsilon_0 = 1$. 因为如果已证明了引理 4.4.1 的这种情况, 由于 $0 < \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \leqslant 1$, 则由式 (4.4.1) 得

$$\int_a^b |f'(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \int_a^b |f''(t)|^p \mathrm{d}t + K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t,$$

于是

$$\int_a^b |f'(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant K\varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p \mathrm{d}t + K\varepsilon^{-1} \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t,$$

随之导出式 (4.4.1), 其中 $K = K(\varepsilon_0, p, b-a) = K(1, p, b-a)\max(\varepsilon_0, \varepsilon_0^{-1})$.

为了证明式 (4.4.1) 首先假定 $a = 0, b = 1$. 如果 $0 < \xi < \dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{2}{3} < \eta < 1$, 则利用中值定理, 存在 $\lambda \in (\xi, \eta)$, 使得

$$|f'(\lambda)| = \left|\frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}\right| \leqslant 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)|.$$

因为对任意的 $x \in (0,1)$ 成立

$$|f'(x)| = \left|f'(\lambda) + \int_\lambda^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)| + \int_0^1 |f''(t)|\mathrm{d}t.$$

上面的不等式对 ξ 在 $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ 上和对 η 在 $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$ 上积分有

$$\frac{1}{9}|f'(x)| \leqslant \int_0^{\frac{1}{3}} |f(\xi)|\mathrm{d}\xi + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(\eta)|\mathrm{d}\eta + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|\mathrm{d}t.$$

上式取 p 次方, 并利用 Hölder 不等式和 C_p 不等式导出

$$\begin{aligned}
|f'(t)|^p &\leqslant 9^p \left\{\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|\mathrm{d}t\right\}^p \\
&\leqslant 9^p \left\{\int_0^1 \left(|f(t)| + \frac{1}{9}|f''(t)|\right)^p \mathrm{d}t\right\} \\
&\leqslant 2^{p-1}9^p \int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t + 2^{p-1}\int_0^1 |f''(t)|^p \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

上式对 t 从 0 到 1 积分

$$\int_0^1 |f'(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant K_p \int_0^1 |f''(t)|^p \mathrm{d}t + K_p \int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t, \tag{4.4.2}$$

其中 $K_p = 2^{p-1}9^p$.

其次考虑有限区间 (a,b). 令 $g(t) = f((b-a)t + a)$, 作变量替换 $x = (b-a)t + a$, $t = \dfrac{x-a}{b-a}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{b-a}$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g'(t)|^p \mathrm{d}t &= \int_a^b |f'(x)|^p (b-a)^p \frac{\mathrm{d}x}{b-a}, \\
\int_0^1 |g''(t)|^p \mathrm{d}t &= \int_a^b |f''(x)|^p (b-a)^{2p} \frac{\mathrm{d}x}{b-a},
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 |g(t)|^p \mathrm{d}t = \int_a^b |f(x)|^p \frac{\mathrm{d}x}{b-a}.$$

把式 (4.4.2) 中的 $f(t)$ 改为 $g(t)$, 并将上面三个式子代入式 (4.4.2) 推出

$$\int_a^b |f'(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant K_p(b-a)^p \int_a^b |f''(t)|^p \mathrm{d}t + K_p(b-a)^{-p} \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t. \tag{4.4.3}$$

因为 $0<\varepsilon\leqslant 1$, 存在正整数 n, 使得

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{p}}. \tag{4.4.4}$$

对 $j=0,1,\cdots,n$, 令 $a_j = a+(b-a)\dfrac{j}{n}$, 注意到 $a_j - a_{j-1} = \dfrac{b-a}{n}$ 和式 (4.4.4), 由式 (4.4.3) 知

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(t)|^p \mathrm{d}t &= \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f'(t)|^p \mathrm{d}t \\
&\leqslant K_p \sum_{j=1}^n \left\{ \left(\frac{b-a}{n}\right)^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f''(t)|^p \mathrm{d}t + \left(\frac{n}{b-a}\right)^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f(t)|^p \mathrm{d}t \right\} \\
&\leqslant \widetilde{K}(p,b-a) \left\{ \varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p \mathrm{d}t + \varepsilon^{-1} \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t \right\},
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

其中 $\widetilde{K}(p,b-a) = K_p \max[(b-a)^p, 2^p(b-a)^{-p}]$.

现设

$$K(1,p,b-a) = \begin{cases} \max\limits_{1\leqslant s\leqslant 2} \widetilde{K}(p,s), & b-a \geqslant 1, \\ \max\limits_{b-a\leqslant s\leqslant 2} \widetilde{K}(p,s), & 0<b-a<1. \end{cases}$$

于是, 对于 $0<b-a\leqslant\infty$, $K(1,p,b-a)$ 有限, 并且连续依赖于 $b-a$. 下面分三种情形讨论:

(1) 对于 $b-a<1$, 式 (4.4.1) 直接由式 (4.4.5) 得到;

(2) 对于 $1\leqslant b-a<\infty$, 区间 (a,b) 可以分成 (可能是无穷多个) 子区间, 每个子区间的长度在 1 与 2 之间, 从而把式 (4.4.5) 用于每一个子区间, 求和得式 (4.4.1);

(3) 对于 $b-a=\infty$ 作为典型, 假定 a 为有限数和 $b=\infty$, 其余的情况可以类似地讨论. 设对于给定的 $\varepsilon>0$, 设 $a_j = a + j\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, $j=0,1,\cdots$, 则 $a_j - a_{j-1} = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$, 由式 (4.4.3) 推出

$$\int_a^\infty |f'(t)|^p \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^\infty \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f'(t)|^p \mathrm{d}t$$

$$\leqslant K_p\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f''(t)|^p\mathrm{d}t+K_p\varepsilon^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f(t)|^p\mathrm{d}t,$$

上式就是式 (4.4.1), $K=K_p$ 只依赖于 p. □

为了研究插值定理, 下面对于 $1\leqslant p<\infty$ 和对于正整数 $0\leqslant j\leqslant m$, 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上引入泛函 $|\cdot|_{j,p}$ 如下:

$$|f|_{j,p}=|f|_{j,p,\Omega}=\left\{\sum_{|\alpha|=j}\int_{\Omega}|D^{\alpha}f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

显然, $|f|_{0,p}=\|f\|_{0,p}=\|f\|_p=\|f;L^p(\Omega)\|$, 并且

$$\|f;W^{m,p}(\Omega)\|=\|f\|_{m,p}=\left\{\sum_{j=0}^{m}|f|_{j,p}^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

如果 $j\geqslant 1$, $|\cdot|_{j,p}$ 是一个半范数. 因为它满足范数的三角不等式公理和齐次性公理, 而不满足范数的正定性公理. 事实上 $|f|_{j,p}=0$ 推不出 $f(x)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中等于零. 例如, $f(x)$ 可以是一个有限测度区域 Ω 上的非零常数.

现在建立形如

$$|f|_{j,p}\leqslant K\varepsilon|f|_{m,p}+K\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}|f|_{0,p} \tag{4.4.6}$$

的内插不等式, 其中 $0\leqslant j\leqslant m-1$. 一般来说, 下面的引理表示只要在特殊情形 $j=1,m=2$ 建立式 (4.4.6) 就够了, 这一简化在下面的三个内插定理中将用到.

引理 4.4.2　设 $0<\delta_0<\infty$, $m\geqslant 2$ 和

$$\varepsilon_0=\min(\delta_0,\delta_0^2,\cdots,\delta_0^{m-1}).$$

又设对于给定的 p, $1\leqslant p<\infty$, 以及对给定的 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, 存在常数 $K=K(\delta_0,\ p,\Omega)$, 使得对所有有限的 $\delta, 0<\delta\leqslant\delta_0$ 和对所有的 $f\in W^{2,p}(\Omega)$, 成立

$$|f|_{1,p}\leqslant K\delta|f|_{2,p}+K\delta^{-1}|f|_{0,p}, \tag{4.4.7}$$

则存在常数 $K=K(\varepsilon_0,m,p,\Omega)$, 使得对所有的有限 ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 所有的整数 j, $0\leqslant j\leqslant m-1$ 以及所有的 $f\in W^{m,p}(\Omega)$, 有

$$|f|_{j,p}\leqslant K\varepsilon|f|_{m,p}+K\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}|f|_{0,p}. \tag{4.4.8}$$

证明　因为 $j=0$ 时, 式 (4.4.8) 是显然的, 所以只需证明 $1\leqslant j\leqslant m-1$ 的情形. 通过对 m 和 j 进行双重归纳来证明引理 4.4.2. 出现在证明过程中的常数 $K_1,K_2,\cdots$, 可以依赖于 δ_0(或 ε_0), m,p 和 Ω.

(1) 首先对 $j = m-1$ 的情形证明式 (4.4.8). 对 m 用归纳法证明式 (4.4.8). 这样式 (4.4.7) 就是式 (4.4.8) 在 $m = 2$, $j = 1$ 的特殊情形, 因此假定对于某个 $k, 2 \leqslant k \leqslant m-1$, 有

$$|f|_{k-1,p} \leqslant K_1\eta|f|_{k,p} + K_1\eta^{-(k-1)}|f|_{0,p}, \tag{4.4.9}$$

对所有的 η, $0 < \eta \leqslant \delta_0$ 和对所有的 $f \in W^{k,p}(\Omega)$ 成立. 我们将证明式 (4.4.9) 用 $k+1$ 代替 k 时仍成立 (常数 K_1 不同). 如果 $|\alpha| = k-1$, 从式 (4.4.7) 有

$$|D^\alpha f|_{1,p} \leqslant K_2\delta|D^\alpha f|_{2,p} + K_2\delta^{-1}|D^\alpha f|_{0,p}. \tag{4.4.10}$$

应用 Minkowski 不等式, 由式 (4.4.10) 和式 (4.4.9), 对 $0 < \eta \leqslant \delta_0$ 推出

$$\begin{aligned}|f|_{k,p} &\leqslant K_3 \sum_{|\alpha|=k-1} |D^\alpha f|_{1,p} \leqslant K_4\delta|f|_{k+1,p} + K_4\delta^{-1}|f|_{k-1,p} \\ &\leqslant K_4\delta|f|_{k+1,p} + K_4K_1\delta^{-1}\eta|f|_{k,p} + K_4K_1\delta^{-1}\eta^{1-k}|f|_{0,p}.\end{aligned}$$

不妨假定 $2K_1K_4 > 1$, 否则乘以某个常数 $M > 2$, 使得 $MK_1K_4 \geqslant 1$. 因此可以取 $\eta = \dfrac{\delta}{2K_1K_4}$, 由上式得

$$\begin{aligned}|f|_{k,p} &\leqslant K_4\delta|f|_{k+1,p} + K_4K_1\delta^{-1}\frac{\delta}{2K_1K_4}|f|_{k,p} + K_4K_1\delta^{-1}\Big(\frac{\delta}{2K_1K_4}\Big)^{1-k}|f|_{0,p} \\ &= K_4\delta|f|_{k+1,p} + \frac{1}{2}|f|_{k,p} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\delta}{2K_1K_4}\Big)^{-k}|f|_{0,p}.\end{aligned}$$

上式经移项, 并乘以 2 导出

$$\begin{aligned}|f|_{k,p} &\leqslant 2K_4\delta|f|_{k+1,p} + \Big(\frac{\delta}{2K_1K_4}\Big)^{-k}|f|_{0,p} \\ &\leqslant K_5\delta|f|_{k+1,p} + K_5\delta^{-k}|f|_{0,p}.\end{aligned}$$

这就完成了归纳, 对于 $0 < \delta < \delta_0$ 建立了式 (4.4.8).

(2) 其次对 j 作反向归纳证明

$$|f|_{j,p} \leqslant K_6\delta^{m-j}|f|_{m,p} + K_6\delta^{-j}|f|_{0,p} \tag{4.4.11}$$

对 $1 \leqslant j \leqslant m-1$ 和 $0 < \delta < \delta_0$ 成立. 注意到当 $k = m$ 时式 (4.4.9) 是式 (4.4.11) 当 $j = m-1$ 时的特殊情况. 所以, 假定式 (4.4.11) 对某个 j, $2 \leqslant j \leqslant m-1$ 成立, 现在证明它用 $j-1$ 代替 j 时仍成立 (常数 K_6 不同). 从式 (4.4.9) 和式 (4.4.11) 推得

$$|f|_{j-1,p} \leqslant K_7\delta|f|_{j,p} + K_7\delta^{1-j}|f|_{0,p}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant K_7\delta\{K_6\delta^{m-j}|f|_{m,p}+K_6\delta^{-j}|f|_{0,p}\}+K_7\delta^{1-j}|f|_{0,p}\\
&\leqslant K_8\delta^{m-(j-1)}|f|_{m,p}+K_8\delta^{-(j-1)}|f|_{0,p}.
\end{aligned}
$$

所以式 (4.4.11) 对于 $j-1$ 成立. 在式 (4.4.11) 中令 $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{m-j}}$, 并注意到如果 $\delta\leqslant\delta_0$, 则 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 而得到式 (4.4.8). □

定理 4.4.1 存在常数 $K=K(m,p,N)$ 使对任意的 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, 任意的 $\varepsilon>0$, 任意的整数 $j, 0\leqslant j\leqslant m-1$ 和任意的 $f\in W_0^{m,p}(\Omega)(1\leqslant p<\infty)$ 成立

$$
|f|_{j,p}\leqslant K_1\varepsilon|f|_{m,p}+K_1\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}|f|_{0,p}. \tag{4.4.12}
$$

证明 由引理 4.2.7 知, 在 Ω 外延拓为零的算子是 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 到 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 的等距同态, 所以只要对 $\Omega=\mathbb{R}^N$ 建立式 (4.4.12) 就够了.

同样由引理 4.4.2 知, 只需考虑 $j=1, m=2$ 的情形. $j=0, m=1$ 的情形是平凡的. 对于任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 将引理 4.4.1 中证明不等式 (4.4.1) 的过程中所用的不等式 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ 改为 $\frac{1}{2}\varepsilon\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon$, 即得

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\right|^p\mathrm{d}x_j\leqslant K\varepsilon^p\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\phi(x)\right|^p\mathrm{d}x_j+K\varepsilon^{-p}\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x)|^p\mathrm{d}x_j. \tag{4.4.13}
$$

式 (4.4.13) 对 x 的其余分量积分, 有

$$
\|D_j\phi;L^p(\mathbb{R}^N)\|^p\leqslant K\varepsilon^p\|D_j^2\phi;L^p(\mathbb{R}^N)\|^p+K\varepsilon^{-p}\|\phi;L^p(\mathbb{R}^N)\|^p,
$$

其中 $\|\phi;L^p(\mathbb{R}^N)\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\phi(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

上式对 j 从 1 到 N 求和可知

$$
\begin{aligned}
|\phi|_{1,p}^p&\leqslant K\varepsilon^p\sum_{j=1}^N\|D_j^2\phi\|_p^p+NK\varepsilon^{-p}\|\phi\|_p^p\\
&\leqslant K\varepsilon^p|\phi|_{2,p}^p+NK\varepsilon^{-p}|\phi|_{0,p}^p.
\end{aligned}
$$

只要上式取 p 次方根, 并注意到 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 即得式 (4.4.12) 的 $j=1, m=2$ 的情形. □

定理 4.4.2 (Ehrling[35], Nirenberg[36], Gagliardo[33]) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是具有一致锥条件的区域, 并且设 ε_0 是有限正数, 则存在依赖于 N,m,p,ε_0 和决定 Ω 满足锥条件的锥 C 的常数 K, 使得对任意的 ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 任意的整数 j, $0\leqslant j\leqslant m-1$ 以及任意的 $f\in W^{m,p}(\Omega)(1\leqslant p<\infty)$

$$
|f|_{j,p}\leqslant K\varepsilon|f|_{m,p}+K\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}|f|_{0,p}. \tag{4.4.14}
$$

证明 显然 $m=1$ 的情形是平凡的. 再由引理 4.4.2 只要对 $j=1, m=2$ 情形下建立式 (4.4.14) 即可. 根据引理 4.4.1 还可以假定 $\varepsilon_0=1$.

我们在证明中始终用到 Ω 具有一致锥条件定义 3.4.3 中的符号. 如果 δ 是定义 3.4.3 中条件 (2) 中的常数和 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$ 是 N 重整数, 考虑立方体

$$H_\lambda=\left\{x\in\mathbb{R}^N\left|\lambda_k\frac{\delta}{2\sqrt{N}}\leqslant x_k\leqslant(\lambda_k+1)\frac{\delta}{2\sqrt{N}},\quad k=1,2,\cdots,N\right.\right\},$$

则 $\mathbb{R}^N=\bigcup_\lambda H_\lambda$ 且 $\mathrm{diam}\ H_\lambda=\dfrac{\delta}{2}$.

设$\Omega_0=\bigcup\limits_{H_\lambda\subset\Omega}H_\lambda$, 于是 $\Omega-\Omega_\delta\subset\Omega_0\subset\Omega$. 如果集合 $O_1,O_2,\cdots$ 和 $Q_1,Q_2,\cdots$ 是 Ω 具有一致锥条件定义中那些集合, 则

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}(O_j\bigcap\Omega)\bigcup\Omega_0=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j\bigcup\Omega_0.$$

如果我们能证明对于任意的 $f\in W^{2,p}(\Omega)$

$$|f|^p_{1,p,\Omega_0}\leqslant K_1\varepsilon^p|f|^p_{2,p,\Omega_0}+K_1\varepsilon^{-p}|f|^p_{0,p,\Omega_0}\tag{4.4.15}$$

以及对 $j=1,2,\cdots$, 有

$$|f|^p_{1,p,O_j\cap\Omega}\leqslant K_2\varepsilon^p|f|^p_{2,p,Q_j}+K_2\varepsilon^{-p}|f|^p_{0,p,Q_j}\tag{4.4.16}$$

成立, 其中 K_2 与 j 无关, 那么就可以证明式 (4.4.14).

事实上, 因为任意 $R+2$ 个集合 $\Omega_0,Q_1,Q_2,\cdots$ 交于空集, 式 (4.4.15) 和式 (4.4.16) 蕴涵

$$\begin{aligned}|f|^p_{1,p,\Omega}\leqslant&|f|^p_{1,p,\Omega_0}+\sum_{j=1}^{\infty}|f|^p_{1,p,O_j\cap\Omega}\\&\leqslant\max(K_1,K_2)\left\{\varepsilon^p|f|^p_{2,p,\Omega_0}+\varepsilon^p\sum_{j=1}^{\infty}|f|^p_{2,p,Q_j}+\varepsilon^{-p}|f|^p_{0,p,\Omega_0}+\varepsilon^{-p}\sum_{j=1}^{\infty}|f|^p_{0,p,Q_j}\right\}\\&\leqslant(R+1)\max(K_1,K_2)\left\{\varepsilon^p|f|^p_{2,p,\Omega}+\varepsilon^{-p}|f|^p_{0,p,\Omega}\right\}.\end{aligned}$$

上式取 p 次方根, 即得式 (4.4.14)($j=1,m=2$ 的情形). 所以剩下要验证式 (4.4.15) 和式 (4.4.16) 成立.

下证式 (4.4.15) 成立. 如果 $f\in C^\infty(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$, 应用引理 4.4.1 于 $f(x)$, 考虑它是从 $\lambda_k\dfrac{\delta}{2\sqrt{N}}$ 到 $(\lambda_k+1)\dfrac{\delta}{2\sqrt{N}}$ 区间上的 x_k 的函数. 然后在类似的区间上对其余变量积分, 得到对任意的 $H_\lambda\subset\Omega$, 有

$$\int_{H_\lambda}|D_kf(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant K_3\varepsilon^p\int_{H_\lambda}|D_k^2f(x)|^p\mathrm{d}x+K_3\varepsilon^{-p}\int_{H_\lambda}|f(x)|^p\mathrm{d}x,\tag{4.4.17}$$

其中 K_3 只依赖于 p 和 H_λ 的边长 (也就是通过 δ 和 N 依赖于 Ω). 式 (4.4.17) 对 $1 \leqslant k \leqslant N$ 求和有

$$|f|_{1,p,H_\lambda}^p \leqslant K_3\varepsilon^p|f|_{2,p,H_\lambda}^p + NK_3\varepsilon^{-p}|f|_{0,p,H_\lambda}^p. \tag{4.4.18}$$

因为立方体 H_λ 不重叠, 对所有的立方体 $H_\lambda \subset \Omega$ 求和, 由式 (4.4.18) 得到式 (4.4.15), 其中 $K_1 = NK_3$. 由于 $C^\infty(\Omega)\bigcap W^{2,p}(\Omega)$ 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中稠密, 式 (4.4.15) 对所有的 $f \in W^{2,p}(\Omega)$ 成立.

为了证明式 (4.4.16) 首先预料到 K_2 只依赖于 p, M 和 C_j 的大小 (见 Ω 具有一致锥条件的定义 3.4.3), 并注意到所有锥 C_j 与锥 C 全等, 大小完全由 C 确定. 为了简单起见, 考虑式 (4.4.16) 时, 去掉所有的下标 j. 设 ξ 是 C 内一个方向的单位向量, 并且设 $\Omega_\xi = \{y + t\xi : y \in \Omega\bigcap O,\ 0 \leqslant t \leqslant h\}$, 其中 h 是锥 C 的高 (图 4.4.1), 因此由一致锥条件 (3), $\Omega\bigcap O \subset \Omega_\xi \subset Q$. 任一平行于 ξ 的直线 L 或者与 Ω_ξ 不相交或者与 Ω_ξ 交于长为 ρ 的区间, 其中由一致锥条件 (1),

$$h \leqslant \rho \leqslant h + \mathrm{diam}O \leqslant h + M.$$

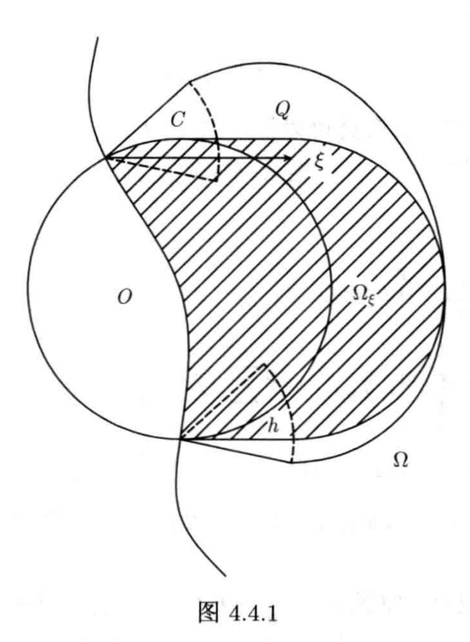


图 4.4.1

由引理 4.4.1 知, 如果 $f \in C^\infty(\Omega)\bigcap W^{2,p}(\Omega)$

$$\int_{L\cap\Omega_\xi}|D_\xi f|^p\mathrm{d}s \leqslant K_4\varepsilon^p\int_{L\cap\Omega_\xi}|D_\xi^2 f|^p\mathrm{d}s + K_4\varepsilon^{-p}\int_{L\cap\Omega_\xi}|f|^p\mathrm{d}s, \tag{4.4.19}$$

其中 D_ξ 表示方向 ξ 的导数及 K_4 可以选只依赖于 p,h 和 M, 即只依赖于 p 和 Ω. 现在把 Ω_ξ 投影到垂直于 ξ 的超平面上, 在此投影上积分式 (4.4.19) 有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap O}|D_\xi f(x)|^p\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\Omega_\xi}|D_\xi f(x)|^p\mathrm{d}x\\ &\leqslant K_4\varepsilon^p\int_{\Omega_\xi}|D_\xi^2 f(x)|^p\mathrm{d}x+K_4\varepsilon^{-p}\int_{\Omega_\xi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\\ &\leqslant K_4\varepsilon^p\int_Q|D_\xi^2 f(x)|^p\mathrm{d}x+K\varepsilon^{-p}\int_Q|f(x)|^p\mathrm{d}x. \end{aligned}\tag{4.4.20}$$

现在设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 是 $\mathbb{R}^N$ 内的单位向量基, 它们的每一个方向都包含在锥 C 内. 对于 $1\leqslant k\leqslant N$, $D_kf(x)=\sum\limits_{j=1}^N a_{kj}D_{\xi_j}f(x)$, 易证其中常数 a_{kj} 满足 $|a_{kj}|\leqslant\dfrac{1}{V}$, $1\leqslant j\leqslant N, V$ 为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 张成的平行多面体的体积. V 的下界可以由锥 C 的口径角所确定, 也就是说 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 随着覆盖的小块 O 的变化, 总可以选得使 V 与 O 无关. 由式 (4.4.20) 推出

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap O}|D_k f(x)|^p\mathrm{d}x &\leqslant K_5\sum_{j=1}^N\int_{\Omega\cap O}|D_{\xi_j}f(x)|^p\mathrm{d}x\\ &\leqslant K_5\sum_{j=1}^N\left\{K_4\varepsilon^p\int_Q|D_{\xi_j}^2 f(x)|^p\mathrm{d}x+K_4\varepsilon^{-p}\int_Q|f(x)^p\mathrm{d}x\right\}\\ &\leqslant K_6\varepsilon^p|f|_{2,p,Q}^p+K_6\varepsilon^{-p}|f|_{0,p,Q}^p. \end{aligned}$$

对 k 求和并利用 $C^\infty(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中的稠密性, 即得所要的不等式 (4.4.16). □

定理 4.4.3 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域, 则定理 4.4.2 的结论对 Ω 仍成立.

证明 根据定理 3.4.1(Gagliardo 定理) 知, 存在 Ω 的有限个 L 型开子集 $\{\Omega_1, \Omega_2,\cdots,\Omega_k\}$, 使得 $\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^k\Omega_j$, 并使每一个 Ω_j 是某一个开平行多面体的平移的并. 显然只要对每个 Ω_j 证明类似于式 (4.4.15) 的不等式就够了. 所以不失一般性, 我们假定 $\Omega=\bigcup\limits_{x\in A}(x+P)$, 其中 A 是 $\mathbb{R}^N$ 内的有界集, P 是一个有一顶点在原点的开平行多面体.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 是从原点出发的 P 的 N 条边方向上的单位向量, 并且还设 l 是这些边的最小长度, 则平行于一个向量 ξ_j 的直线 L 与 Ω 的交集或者是空集或

者是线段的有限集族, 每一个线段介于 l 和 Ω 的直径之间. 如同式 (4.4.20) 对光滑函数 $f \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ 一样, 由此得

$$\int_{\Omega} |D_{\xi_j} f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant K_1 \varepsilon^p \int_{\Omega} |D_{\xi_j}^2 f(x)|^p \mathrm{d}x + K\varepsilon^{-p} \int_{\Omega} |f(x)|^p \mathrm{d}x.$$

因为 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N\}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 内的一组基. 类似于式 (4.4.20) 以后的讨论导出, 对所有的 $f \in W^{2,p}(\Omega)$

$$|f|_{1,p,\Omega}^p \leqslant K_2 \varepsilon^p |f|_{2,p,\Omega}^p + K_2 \varepsilon^{-p} |f|_{0,p,\Omega}^p$$

成立. □

推论 4.4.1 在下列空间:

(1) $W_0^{m,p}(\Omega)$ 对任意区域 Ω;

(2) $W^{m,p}(\Omega)$ 对任意具有一致锥条件的区域 Ω;

(3) $W^{m,p}(\Omega)$ 对任意有界锥形区域 Ω, 由

$$((f))_{m,p,\Omega} = \{|f|_{m,p,\Omega}^p + |f|_{0,p,\Omega}^p\}^{\frac{1}{p}}$$

定义的泛函 $((\cdot))_{m,p,\Omega}$ 是等价于通常范数 $\|\cdot; W^{m,p}(\Omega)\|$ 的一个范数.

定理 4.4.4 (Ehrling[35], Browder[37]) 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 具有一致锥条件或者如果它是有界锥形区域, 并且如果 $1 \leqslant p < \infty$, 则存在常数 $K = K(m, p, \Omega)$, 使得对 $0 \leqslant j \leqslant m$ 和任意的 $f \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\|f\|_{j,p} \leqslant K \|f\|_{m,p}^{\frac{j}{m}} \|f\|_{p}^{\frac{m-j}{m}}. \tag{4.4.21}$$

此外, 式 (4.4.21) 对所有的 $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ 也成立, 常数 $K = K(m, p, N)$ 与 Ω 无关.

证明 不等式 (4.4.21) 对 $j = 0$ 和 $j = m$ 是显然的. 对 $0 < j < m$, 应用式 (4.4.14), C_p 不等式和等价范数推出

$$\begin{aligned}
\|f\|_{j,p} &\leqslant \{|f|_{0,p}^p + (K_1 \varepsilon |f|_{m,p} + K_1 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} |f|_{0,p})^p\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \{|f|_{0,p}^p + 2^{p-1}[(K_1 \varepsilon)^p |f|_{m,p}^p + (K_1 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}})^p |f|_{0,p}^p]\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \{|f|_{0,p}^p + 2^{p-1}[(K_1 \varepsilon)^p (|f|_{m,p}^p + |f|_{0,p}^p) + (K_1 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}})^p |f|_{0,p}^p]\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \{|f|_{0,p}^p + 2^{p-1}[(K_1 \varepsilon)^p \|f\|_{m,p}^p + (K_1 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}})^p |f|_{0,p}^p]\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \{|f|_{0,p} + 2^{\frac{p-1}{p}} K_1 \varepsilon \|f\|_{m,p} + 2^{\frac{p-1}{p}} K_1 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} |f|_{0,p}\} \\
&= \{2^{\frac{p-1}{p}} K_1 \varepsilon \|f\|_{m,p} + (2^{\frac{p-1}{p}} K_1 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} + 1) |f|_{0,p}\} \\
&\leqslant \{2^{\frac{p-1}{p}} K_1 \varepsilon \|f\|_{m,p} + 2^{\frac{2p-1}{p}} K_1 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} |f|_{0,p}\} \\
&\leqslant K_2 \varepsilon \|f\|_{m,p} + K_2 \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} |f|_{0,p}.
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

式 (4.4.22) 对于所有 ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, 以及所有 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 成立, 其中 $K_2=2^{2-\frac{1}{p}}K_1$ 只依赖于 m,p 和 Ω(由定理 4.4.1, 同样的不等式对所有 $f\in W_0^{m,p}(\Omega)$ 成立, K_2 只依赖于 m,p 和 N). 如果在式 (4.4.22) 中令 $\varepsilon=\left(\frac{\|f\|_{0,p}}{\|f\|_{m,p}}\right)^{\frac{m-j}{m}}$, 就对 $f(x)\neq 0$ 得到不等式 (4.4.21). 事实上,

$$\begin{aligned}\|f\|_{j,p}&\leqslant K_2\left(\frac{\|f\|_{0,p}}{\|f\|_{m,p}}\right)^{\frac{m-j}{m}}\|f\|_{m,p}+K_2\left(\frac{\|f\|_{0,p}}{\|f\|_{m,p}}\right)^{-\frac{j}{m}}\|f\|_{0,p}\\&=2K_2\|f\|_{m,p}^{\frac{j}{m}}\|f\|_{0,p}^{\frac{m-j}{m}}.\end{aligned}$$

□

注意到式 (4.4.21) 同样代数地蕴涵式 (4.4.22). 特别地, 在 Young 不等式

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'},\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

中令 $p=\dfrac{m}{j}$, $p'=\dfrac{m}{m-j}$, $a=(\varepsilon\|f\|_{m,p})^{\frac{j}{m}}$ 和 $b=\varepsilon^{-\frac{j}{m}}\|f\|_{0,p}^{\frac{m-j}{m}}$ 就可以看出式 (4.4.21) 中的右端不超过式 (4.4.22) 的右端. 事实上

$$\begin{aligned}(\varepsilon\|f\|_{m,p})^{\frac{j}{m}}\varepsilon^{-\frac{j}{m}}\|f\|_{0,p}^{\frac{m-j}{m}}&\leqslant\frac{\varepsilon\|f\|_{m,p}}{\frac{m}{j}}+\frac{\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}\|f\|_{0,p}}{\frac{m}{m-j}}\\&=\frac{j\varepsilon}{m}\|f\|_{m,p}+\frac{m-j}{m}\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}\|f\|_{0,p}.\end{aligned}$$

上式乘以 K 后, 注意到左端为式 (4.4.21) 的右端, 得

$$\|f\|_{j,p}\leqslant K_2\varepsilon\|f\|_{m,p}+K_2\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}|f|_{0,p},$$

其中 $K_2=K\max\left(\dfrac{j}{m},1-\dfrac{j}{m}\right)$.

定理 4.4.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域.

(1) 如果 $mp<N$, 令 $p\leqslant q\leqslant p^*=\dfrac{Np}{N-mp}$;

(2) 如果 $mp=N$, 令 $p\leqslant q<\infty$;

(3) 如果 $mp>N$, 令 $p\leqslant q\leqslant\infty$,

则存在依赖于 m,p,q 和 Ω 满足锥条件区域锥 C 维数的常数 K, 使得对于所有 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 成立

$$\|f\|_q\leqslant K\|f\|_{m,p}^{\theta}\|f\|_p^{1-\theta},\tag{4.4.23}$$

其中 $\theta=\dfrac{N}{mp}-\dfrac{N}{mq}$.

证明 (1) 关于 $mp<N$ 和 $p\leqslant q\leqslant p^*$ 的情况. 由定理 2.1.5 推出

$$\|f\|_q\leqslant\|f\|_{p^*}^{\theta}\|f\|_p^{1-\theta},\tag{4.4.24}$$

其中

$$\frac{1}{q}=\frac{\theta}{p^*}+\frac{1-\theta}{p},\quad 0<\theta<1.\tag{4.4.25}$$

再由定理 4.2.3 知

$$\|f\|_{p^*}\leqslant C_1\|f\|_{m,p},\tag{4.4.26}$$

其中 C_1 为嵌入常数. 将式 (4.4.26) 代入式 (4.4.24) 得式 (4.4.23)

$$\|f\|_q\leqslant K\|f\|_{m,p}^{\theta}\|f\|_p^{1-\theta},$$

且由式 (4.4.25) 有 $\theta=\dfrac{N}{mp}-\dfrac{N}{mq}$ 和 $K=C_1^{\theta}$.

(2) 关于 $mp=N$, $p\leqslant q<\infty$ 和关于 $mp>N$, $p\leqslant q\leqslant\infty$ 的情况. 不妨假定原点 $O\in\Omega$. 因为 $C^\infty(\Omega)\cap W^{m,p}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 所以下面只需在 $C^\infty(\Omega)\cap W^{m,p}(\Omega)$ 中讨论.

利用引理 4.2.1, 如果 $0<r\leqslant\rho$ (ρ 是锥 C 的高), 则

$$|f(x)|\leqslant K_1\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}r^{|\alpha|-N}\chi_r*|D^\alpha f|(x)+\sum_{|\alpha|=m}(\chi_r\omega_m)*|D^\alpha f|(x)\right),\tag{4.4.27}$$

其中 $\chi_r(x)$ 是以原点为球心 r 为半径的 $\mathbb{R}^N$ 中球的特征函数和

$$\chi_r\omega_m(x)=\begin{cases}|x|^{m-N}, & |x|<r,\\ 0, & |x|\geqslant r.\end{cases}$$

应用定理 2.1.18(一般卷积 Young 不等式) 估计式 (4.4.27) 右端两项的 L^q 范数. 如果 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{q}+1$, 则

$$\|\chi_r*|D^\alpha f|\|_q\leqslant\|\chi_r\|_s\|D^\alpha f\|_p=K_2r^{N-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}}\|D^\alpha f\|_p,\tag{4.4.28}$$

$$\|(\chi_r\omega_m)*|D^\alpha f|\|_q\leqslant\|\chi_r\omega_m\|_s\|D^\alpha f\|_p.\tag{4.4.29}$$

如果采用球坐标变换, 于是

$$\begin{aligned}\|\chi_r\omega_m\|_s&=\left(\int_{|x|<r}|x|^{(m-N)s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\\&=\left(\int_0^r t^{(m-N)s}t^{N-1}\mathrm{d}t\times\int_0^\pi\sin^{N-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\times\int_0^\pi\sin^{N-3}\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\times\cdots\right.\end{aligned}$$

$$\times \int_0^{\pi} \sin \varphi_{N-2} \mathrm{d}\varphi_{N-2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_{N-1} \Bigg)^{\frac{1}{s}}.$$

利用计算正弦幂积分公式

$$\int_0^{\pi} \sin^{p-1} \psi \mathrm{d}\psi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} \psi \mathrm{d}\psi = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\dfrac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)},$$

则

$$\|\chi_r \omega_m\|_s = \left(\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{N}{2}\right)} \frac{1}{(m-N)s+N} r^{(m-N)s+N} \right)^{\frac{1}{s}} \leqslant K_3 r^{m-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}}. \tag{4.4.30}$$

将式 (4.4.30) 代入式 (4.4.29) 得

$$\|(\chi_r \omega_m) * |D^\alpha f|\|_q \leqslant K_3 r^{m-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}} \|D^\alpha f\|_p. \tag{4.4.31}$$

注意, 如果 q 满足上面的限制, 则 $m - \dfrac{N}{p} + \dfrac{N}{q} > 0$. 暂时假定 $r > 1$, 利用 C_p 不等式由式 (4.4.27), 式 (4.4.28) 和式 (4.4.31) 可知

$$\begin{aligned}
\|f\|_q &= \left(\int_\Omega |f(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left\{ \int_\Omega \left[K_1 \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m-1} r^{|\alpha|-N} \chi_r * |D^\alpha f|(x) + \sum_{|\alpha|=m} (\chi_r \omega_m) * |D^\alpha f|(x) \right) \right]^q \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant K_1 K^* \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{|\alpha| \leqslant m-1} r^{(|\alpha|-N)q} (\chi_r * |D^\alpha f|(x))^q \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \sum_{|\alpha|=m} \Big((\chi_r \omega_m) * |D^\alpha f|(x) \Big)^q \right] \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant K_1 K^* \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} r^{(|\alpha|-N)q} \|\chi_r * |D^\alpha f|\|_q^q + \sum_{|\alpha|=m} \|(\chi_r \omega_m) * |D^\alpha f|\|_q^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant K_1 K^* \left\{ K_2^q \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} r^{(|\alpha|-N)q + (N-\frac{N}{p}+\frac{N}{q})q} \|D^\alpha f\|_p^q \right. \\
&\qquad \left. + K_3^q \sum_{|\alpha|=m} r^{(m-\frac{N}{p}+\frac{N}{q})q} \|D^\alpha f\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant K_1K^*\max(K_2,K_3)\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m-1} r^{(|\alpha|-\frac{N}{p}+\frac{N}{q})q}\|D^\alpha f\|_p^q\right.\\
&\quad\left.+\sum_{|\alpha|=m} r^{(m-\frac{N}{p}+\frac{N}{q})q}\|D^\alpha f\|_p^q\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&=K_1K^*\max(K_1,K_3)\left\{\sum_{j=0}^{m-1} r^{(j-\frac{N}{p}+\frac{N}{q})q}|f|_{j,p}^q+r^{(m-\frac{N}{p}+\frac{N}{q})q}|f|_{m,p}^q\right\}^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}\tag{4.4.32}
$$

其中 K^* 是利用 C_p 不等式出现的常数. 在定理 4.4.3 的插值不等式中令 $\varepsilon=r^{m-j}$, 则成立

$$|f|_{j,p}\leqslant K_4(r^{m-j}|f|_{m,p}+r^{-j}\|f\|_p).$$

将上式代入式 (4.4.32), 并利用 $W^{m,p}(\Omega)$ 的等价范数, 有

$$\|f\|_q\leqslant K_5(r^{m-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}}\|f\|_{m,p}+r^{-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}}\|f\|_p).\tag{4.4.33}$$

如有必要, 调整 K_5 使得对于所有的 $r\leqslant 1$, 式 (4.4.33) 成立. 选择 r 使得式 (4.4.33) 右端两项相等, 导出式 (4.4.23) 成立. □

由定理 4.4.5 的结论 (3) 断定, 如果 $mp>N$, 则

$$\|f\|_\infty\leqslant K\|f\|_{m,p}^{\frac{N}{mp}}\|f\|_q^{1-\frac{N}{mp}}.$$

定理 4.4.6　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域, $p>1$ 和 $mp>N$. 又设或者 $1\leqslant q\leqslant p$ 或者 $q>p$ 和 $mp-p<N$, 则存在依赖于 m,N,p,q 和决定 Ω 为有界锥形区域的锥 C 的常数 K, 使得对所有的 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 成立

$$\|f\|_\infty\leqslant K\|f\|_{m,p}^\theta\|f\|_q^{1-\theta},\tag{4.4.34}$$

其中 $\theta=Np/[Np+(mp-N)q]$.

证明　证明式 (4.4.34), 只需证明对于所有的 $x\in\Omega$ 和所有的 $f\in W^{m,p}(\Omega)\bigcap L^\infty(\Omega)$ 有

$$|f(x)|\leqslant K\|f\|_{m,p}^\theta\|f\|_q^{1-\theta},\quad \theta=\frac{Np}{Np+(mp-N)q}\tag{4.4.35}$$

即可.

当 $mp>N$ 和 $1\leqslant q\leqslant p$ 时, 由定理 4.4.5(3) 知

$$\|f\|_\infty\leqslant K_1\|f\|_{m,p}^{\frac{N}{mp}}\|f\|_p^{1-\frac{N}{mp}}.\tag{4.4.36}$$

利用定理 2.1.5 可得

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q^{\frac{q}{p}} \|f\|_\infty^{1-\frac{q}{p}}, \tag{4.4.37}$$

其中 $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{q} + \dfrac{1-\theta}{\infty}$. 将式 (4.4.37) 代入式 (4.4.36) 推出

$$\|f\|_\infty \leqslant K_1 \|f\|_{m,p}^{\frac{N}{mp}} \|f\|_q^{\frac{q}{p}-\frac{qN}{mp^2}} \|f\|_\infty^{1-\frac{N}{mp}-\frac{q}{p}+\frac{qN}{mp^2}}.$$

消去上式右端项中的 $\|f\|_\infty$, 便得式 (4.4.34)

$$\|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_{m,p}^{\theta} \|f\|_q^{1-\theta},$$

其中 $\theta = \dfrac{Np}{Np+(mp-N)q}$ 和 $K = K_1^{\frac{mp^2}{Np+(mp-N)q}}$.

现在假定 $q > p$ 和暂时考虑 $m = 1$ 和 $p > N$. 再利用局部估计 (4.2.1), 对于 $0 < r \leqslant \rho$(锥 C 的高)

$$|f(x)| \leqslant K_2 \left(r^{-N} \chi_r * |f|(x) + \sum_{|\alpha|=1} (\chi_r \omega_1) * |D^\alpha f|(x) \right). \tag{4.4.38}$$

利用 Hölder 不等式可见

$$\begin{aligned}\chi_r * |f|(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_r(y) |f(x-y)| \mathrm{d}y \leqslant \Big(\int_\Omega |f(x-y)|^q \mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{B_r(0)} \chi_r^{\frac{q}{q-1}}(y) \mathrm{d}y \Big)^{\frac{q-1}{q}} \\ &= K_3 r^{N-\frac{N}{q}} \|f\|_q\end{aligned}$$

和对于 $|\alpha| = 1$

$$\begin{aligned}(\chi_r \omega_1) * |D^\alpha f|(x) &\leqslant \int_\Omega \chi_r \omega_1(y) |D^\alpha f(x-y)| \mathrm{d}y \\ &\leqslant \|\chi_r \omega_1\|_{p'} \|D^\alpha f\|_p,\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$. 而利用球坐标变换有

$$\begin{aligned}\|\chi_r \omega_1\|_{p'} &= \Big(\int_{B_r(0)} (|y|^{1-N})^{p'} \mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{p'}} = \left(\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_0^r (t^{1-N})^{p'} t^{N-1} \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant K_4 r^{1-\frac{N}{p}},\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{|\alpha|=1} (\chi_r \omega_1) * |D^\alpha f|(x) \leqslant K_4 r^{1-\frac{N}{p}} \|D^\alpha f\|_p. \tag{4.4.39}$$

根据定理 4.2.2, $\|f\|_q \leqslant K_5\|f\|_{1,p}$. 因为只要适当地调整 K_4 可以假定式 (4.4.39) 对所有的 r 成立, 使得 $0 < r^{1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}} \leqslant K_5$, 于是可以选择 r 让式 (4.4.38) 右端两个上界相等, 即得 $m=1$ 和 $p>N$ 时的不等式 (4.4.34). 事实上取

$$r = \left(\frac{K_3}{K_4}\frac{\|f\|_q}{\|f\|_{1,p}}\right)^{\frac{pq}{pN+(p-N)q}}$$

代入式 (4.4.38), 得

$$\|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_{1,p}^\theta \|f\|_q^{1-\theta},$$

其中 $K = 2K_2K_3^{1-\theta}K_4^\theta$ 和 $\theta = \dfrac{Np}{Np+(p-N)q}$.

对于一般的 m, 根据嵌入定理 4.2.3 有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,r}(\Omega), \tag{4.4.40}$$

其中 $r = \dfrac{Np}{N-mp+p}$. 因为 $(m-1)p < N < mp$, 所以 $N < r < \infty$.

因此, 如果 $f \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, 由于定理对于 $m=1$ 和 $p>N$ 成立以及利用式 (4.4.40) 推出

$$|f(x)| \leqslant K_6\|f\|_{1,r}^\theta \|f\|_q^{1-\theta} \leqslant K_7\|f\|_{m,p}^\theta \|f\|_q^{1-\theta},$$

其中 $\theta = \dfrac{Nr}{Nr+(r-N)q} = \dfrac{Np}{Np+(mp-N)q}$. □

定理 4.4.7 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域, m, k 是正整数和 $p>1$. 又设 $mp<N$ 和 $N-mp<k\leqslant N$. 令 ν 是小于 mp 的最大整数, 使得 $N-\nu\leqslant k$ 和 Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面的交, 则存在常数 K 使得对于所有的 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 成立不等式

$$\|f; L^{\frac{kq}{N}}(\Omega_k)\| \leqslant K\|f; L^q(\Omega)\|^{1-\theta}\|f; W^{m,p}(\Omega)\|^\theta, \tag{4.4.41}$$

其中

$$q = p^* = \frac{Np}{N-mp}, \quad \theta = \frac{\nu p}{\nu p+(mp-\nu)q} \text{且 } 0<\theta<1.$$

证明 我们只需在 $W^{m,p}(\Omega)\bigcap C^\infty(\Omega)$ 中建立函数不等式 (4.4.41) 即可. 不失一般性, 假定 H 为 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 $\mathbb{R}^k$, 且正如在证明引理 4.2.5 时采用的方法, 令 Ω 是一固定棱长为 2 的坐标立方体的并.

令

$$\mu = \binom{k}{N-\nu}$$

和 $E^i(1\leqslant i\leqslant \mu)$ 表示 $\mathbb{R}^k$ 中的 $N-\nu$ 维的不同坐标平面. 设 Ω^i 是 Ω_k 在 E^i 上的投影和对于每一个 $x\in\Omega^i$, 令 Ω_x^i 表示 Ω 与通过 x 垂直于 E^i 的 ν 维平面的交. 于

是 Ω_x^i 包含一顶点为 x 的 ν 维单位立方体, 所以它满足不依赖于 i 和 x 的锥条件. 根据定理 4.4.6 得

$$\|f\|_{0,\infty,\Omega_x^i} \leqslant K_1 \|f\|_{0,q,\Omega_x^i}^{1-\theta} \|f\|_{m,p,\Omega_x^i}^{\theta}. \tag{4.4.42}$$

令 $s = \dfrac{(N-\nu)p}{N-mp}$, $\mathrm{d}x^i$ 和 $\mathrm{d}x_*^i$ 分别表示 E^i 中的体积元和它在 $\mathbb{R}^N$ 中的正交补的体积元. 为了应用 Hölder 不等式算得 q 的共轭指数 $q' = \dfrac{Np}{Np+mp-N} > 1$. 由于

$$s(1-\theta) = \frac{(mp-\nu)q}{mp} \quad 和 \quad s\theta = \frac{\nu}{m},$$

利用式 (4.4.42) 和 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^i} \sup_{y\in\Omega_x^i} |f(y)|^s \mathrm{d}x^i \\
\leqslant &K_2 \int_{\Omega^i} \left[\int_{\Omega_x^i} |f(x)|^q \mathrm{d}x_*^i\right]^{(mp-\nu)/mp} \left[\int_{\Omega_x^i} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha f(x)|^p \mathrm{d}x_*^i\right]^{\nu/mp} \mathrm{d}x^i \\
\leqslant &K_2 \|f\|_{0,q,\Omega}^{s(1-\theta)} \|f\|_{m,p,\Omega} \|f\|_{m,p,\Omega}^{s\theta}.
\end{aligned}$$

令 $\mathrm{d}x^k$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维坐标平面 H 的体积元. 利用引理 4.2.4 到 $\mathbb{R}^k$ 的 μ 子空间 E^i 族上. 对于引理 4.2.4 中的 λ 现在取为

$$\lambda = \binom{k-1}{N-\nu-1} = (N-\nu)\mu/k.$$

由于 $(kq/N)(\lambda/\mu) = s$, 推出

$$\begin{aligned}
\|f\|_{0,kq/N,\Omega_k}^{kq/N} &\leqslant K_3 \int_{\Omega_k} \prod_{i=1}^{\mu} \sup_{y\in\Omega_x^i} |f(y)|^{kq/\mu N} \mathrm{d}x^k \\
&\leqslant K_3 \prod_{i=1}^{\mu} \left\{\int_{\Omega^i} \sup_{y\in\Omega_x^i} |f(y)|^s \mathrm{d}x^i\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \\
&\leqslant K_4 \prod_{i=1}^{\mu} \|f\|_{0,q,\Omega}^{kq(1-\theta)/\mu N} \|f\|_{m,p,\Omega}^{kq\theta/\mu N}.
\end{aligned} \tag{4.4.43}$$

式 (4.4.43) 开 kq/N 次方得

$$\|f\|_{0,kq/N,\Omega_k} \leqslant K \|f\|_{0,q,\Omega}^{1-\theta} \|f\|_{m,p,\Omega}^{\theta},$$

即为所求. □

定理 4.4.8 (Gagliardo-Nirenberg 插值定理 [38,39]) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足锥条件的区域. 设 $f \in W^{k,p_2}(\Omega) \bigcap L^{p_1}(\Omega)$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$. 对于任意的整数 ℓ, $0 \leqslant \ell < k$ 和满足 $\dfrac{\ell}{k} \leqslant \lambda \leqslant 1$ 的任意 λ, 置

$$\frac{1}{p} - \frac{\ell}{N} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \lambda\Big(\frac{1}{p_2} - \frac{k}{N}\Big). \tag{4.4.44}$$

如果 $k - \ell - \dfrac{N}{p_2}$ 不是非负整数时, 则成立

$$\|D^\ell f\|_p \leqslant K \|f\|_{p_1}^{1-\lambda} \|f\|_{k,p_2}^{\lambda}. \tag{4.4.45}$$

如果 $k - \ell - \dfrac{N}{p_2}$ 是非负整数时, 则式 (4.4.45) 对于 $\dfrac{\ell}{k} = \lambda$ 也成立, 其中常数 K 依赖于 $p_1, p_2, k, \ell, \lambda$ 和决定 Ω 满足锥条件锥 C 的维数;

实际上, 如果 $k - \ell - \dfrac{N}{p_2}$ 是非负整数时, 则式 (4.4.45) 对任意的 $\dfrac{\ell}{k} \leqslant \lambda < 1$ 都成立.

4.5 紧嵌入定理

在 4.2 节中讨论的 $W^{m,p}(\Omega)$ 的嵌入算子是一种线性算子, 本节介绍 $W^{m,p}(\Omega)$ 的嵌入算子是一种全连续算子 (或称紧算子), 即介绍 $W^{m,p}(\Omega)$ 的紧嵌入定理和连续函数空间的紧嵌入定理.

嵌入是一种线性算子, 称为嵌入算子. 如果嵌入算子是紧算子, 称此嵌入为紧嵌入. 用记号 $\hookrightarrow\hookrightarrow$ 表示紧嵌入.

定理 4.5.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, $0 < \mu \leqslant 1$, 则

$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}). \tag{4.5.1}$$

证明 根据定理 4.2.8 已知 $C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, 所以只需证明这个算子是紧的, 即证明此算子把 $C^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ 中的任一有界集 G 映为 $C^m(\overline{\Omega})$ 中的列紧集. 设 G 是 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 中的任一有界集合, 则存在常数 M, 使得对一切 $f \in G$, $\|f; C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\| \leqslant M$, 并成立

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\mu, \quad \forall f \in G, \quad x, y \in \Omega,$$

其中常数 M 只依赖于集合 G, 与 $f(x)$ 无关. 上式说明 G 中的函数是等度连续的. 根据定理 1.3.3(Ascoli-Arzelá 定理) 知, 从 G 中可选出子序列在 $C(\overline{\Omega})$ 中收敛. 这就证明了 $m = 0$ 时式 (4.5.1) 成立. 如果 $m \geqslant 1$ 且 G 在 $C^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ 中是有界的, 于是 G 在 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 中有界而且存在序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset G$, 使得在 $C(\overline{\Omega})$ 中 $f_n(x) \to f(x)$.

但 $\{D_1 f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 中也是有界的, 所以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个子序列, 仍记为 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 使得在 $C(\overline{\Omega})$ 中 $D_1 f_n(x) \to g_1(x)$. $C(\overline{\Omega})$ 中的收敛就是在 Ω 上的一致收敛, 有 $g_1(x) = D_1 f(x)$. 我们可以继续以这样的方式选取子序列, 直到得到一个子序列, 它在 $C(\overline{\Omega})$ 中对每个 α, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, 都有 $D^\alpha f_n(x) \to D^\alpha f(x)$. 这就证明了嵌入关系 (4.5.1) 成立. □

定理 4.5.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域和 $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$, 则

$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}). \tag{4.5.2}$$

证明 根据定理 4.2.8 已知 $C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. 下面证明此嵌入是紧的. 设 G 是 $C^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ 中任一有界集, 则 G 也是 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中的有界集. 由定理 4.5.1 知道 G 也是 $C^m(\overline{\Omega})$ 中的列紧集, 所以存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ 在 $C^m(\overline{\Omega})$ 中收敛. 若能证明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ 在 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中也收敛, 就证明了式 (4.5.2) 成立. 现在证明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中收敛.

记 $g_{mn}(x) = f_m(x) - f_n(x)$, 利用 $0 < \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ 和 G 是 $C^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ 中的有界集, 对于 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ 有

$$\begin{aligned}
&\frac{|D^\alpha g_{mn}(x) - D^\alpha g_{mn}(y)|}{|x-y|^\lambda} \\
=&\left|\frac{D^\alpha(f_m(x) - f_n(x)) - D^\alpha(f_m(y) - f_n(y))}{|x-y|^\mu}\right|^{\frac{\lambda}{\mu}} |D^\alpha g_{mn}(x) - D^\alpha g_{mn}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}} \\
=&\left|\frac{[D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_m(y)] - [D^\alpha f_n(x) - D^\alpha (f_n(y))]}{|x-y|^\mu}\right|^{\frac{\lambda}{\mu}} |D^\alpha g_{mn}(x) - D^\alpha g_{mn}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}} \\
\leqslant& K|D^\alpha g_{mn}(x) - D^\alpha g_{mn}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}}.
\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

由式 (4.5.3) 推出

$$\begin{aligned}
\|g_{mn}; C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| &= \|g_{mn}; C^m(\overline{\Omega})\| + \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha g_{mn}(x) - D^\alpha g_{mn}(y)|}{|x-y|^\lambda} \\
&\leqslant \|g_{mn}; C^m(\overline{\Omega})\| + \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x,y\in\Omega} (K|D^\alpha g_{mn}(x) - D^\alpha g_{mn}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}}) \\
&\leqslant \|g_{mn}; C^m(\overline{\Omega})\| + 2K\|g_{mn}; C^m(\overline{\Omega})\|^{1-\frac{\lambda}{\mu}}.
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

不等式 (4.5.4) 说明, 由 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C^m(\overline{\Omega})$ 中的基本序列导出它是 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中的基本序列, 因为 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是 Banach 空间, 所以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 收敛. □

由引理 2.1.7 易知下列命题成立.

命题 4.5.1 设 X_1, X_2, X_3 是三个线性赋范空间. 嵌入算子 A 和 B 分别把 X_1 和 X_2 映射到 X_2 和 X_3, 则嵌入算子 BA 把 X_1 映射到 X_3.

命题 4.5.2　设 X_1, X_2, X_3 是三个线性赋范空间. 若 $X_1 \hookrightarrow X_2$ 和 $X_2 \hookrightarrow X_3$, 并且其中至少有一个是紧嵌入, 则 $X_1 \hookrightarrow\hookrightarrow X_3$.

证明　由引理 2.1.7 知, $X_1 \hookrightarrow X_3$. 记 $X_1 \hookrightarrow X_2$ 的嵌入算子为 A. 又例如认为 $X_2 \hookrightarrow\hookrightarrow X_3$, 且记嵌入算子为 B. 因为 $X_1 \hookrightarrow X_2$, 对于 X_1 中的任一有界序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 那么 $\{Af_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X_2 中也是有界序列. 由于 $X_2 \hookrightarrow\hookrightarrow X_3$, 于是 $\{BAf_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X_3 中有子序列在 X_3 中收敛, 因此 $X_1 \hookrightarrow\hookrightarrow X_3$. □

定理 4.5.3　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界凸区域和 $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$, 则

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \tag{4.5.5}$$

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}). \tag{4.5.6}$$

证明　由定理 4.2.8 知, $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega})$, 又由定理 4.5.1 对于 $\mu = 1$ 有 $C^{m,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$. 由命题 4.5.2 推出式 (4.5.5) 成立. 嵌入关系 (4.5.6) 是由 $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega})$ 和 $C^{m,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 得到. □

引理 4.5.1　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个区域, Ω_0 是 Ω 的子区域, Ω_0^k 是 Ω_0 与 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维平面的交 $(1 \leqslant k \leqslant N)$ 和 $m \geqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$. 令 $1 \leqslant q_1 < q_0$, 设

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_0}(\Omega_0^k) \tag{4.5.7}$$

和

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_0^k). \tag{4.5.8}$$

如果 $q_1 \leqslant q < q_0$, 则

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q}(\Omega_0^k). \tag{4.5.9}$$

证明　当 $q = q_1$ 时, 由假设式 (4.5.8) 知式 (4.5.9) 成立. 因而只需对 $q \in (q_1, q_0)$ 来证明定理即可. 令

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{q - q_0}{q_1 - q_0}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{q_1 - q}{q_1 - q_0},$$
$$s = q_1\frac{q - q_0}{q_1 - q_0}, \quad t = q_0\frac{q_1 - q}{q_1 - q_0},$$

则有 $s + t = q$, $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = 1$, $s\lambda = q_1$ 和 $t\mu = q_0$.

设 $f \in W^{m,p}(\Omega)$. 设 $\mathrm{d}x^k$ 表示 Ω_0^k 所在 k 维平面的体积微元. 利用 Hölder 不

等式和式 (4.5.7), 则存在常数 K 使得

$$\begin{aligned}\|f;L^q(\Omega_0^k)\| &= \Big[\int_{\Omega_0^k}|f(x)|^q\mathrm{d}x^k\Big]^{\frac{1}{q}} = \Big[\int_{\Omega_0^k}|f(x)|^s|f(x)|^t\mathrm{d}x^k\Big]^{\frac{1}{q}}\\ &\leqslant \Big[\int_{\Omega_0^k}|f(x)|^{s\lambda}\mathrm{d}x^k\Big]^{\frac{1}{\lambda q}}\Big[\int_{\Omega_0^k}|f(x)|^{t\mu}\mathrm{d}x^k\Big]^{\frac{1}{\mu q}}\\ &= \|f;L^{q_1}(\Omega_0^k)\|^{\frac{s}{q}}\|f;L^{q_0}(\Omega_0^k)\|^{\frac{t}{q}}\\ &\leqslant K\|f;L^{q_1}(\Omega_0^k)\|^{\frac{s}{q}}\|f;W^{m,p}(\Omega)\|^{\frac{t}{q}}. \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

由式 (4.5.8) 和式 (4.5.10) 推出

$$\|f;L^q(\Omega_0^k)\| \leqslant K_1\|f;W^{m,p}(\Omega)\|,$$

即 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega_0^k)$. 以上 K 和 K_1 均为嵌入常数.

设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset W^{m,p}(\Omega)$ 是任一有界序列. 由 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_0^k)$ 知, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 中存在子序列, 仍记为 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, 在 $L^{q_1}(\Omega_0^k)$ 中收敛. 对于函数 $f_{\bar n}(x)-f_n(x)$ 利用式 (4.5.10) 推出

$$\begin{aligned}\|f_{\bar n}-f_n;L^q(\Omega_0^k)\| &\leqslant K\|f_{\bar n}-f_n;L^{q_1}(\Omega_0^k)\|^{\frac{s}{q}}\|f_{\bar n}-f_n;W^{m,p}(\Omega)\|^{\frac{t}{q}}\\ &\leqslant K_2\|f_{\bar n}-f_n;L^{q_1}(\Omega_0^k)\|^{\frac{s}{q}}.\end{aligned}$$

因此, 由 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $L^{q_1}(\Omega_0^k)$ 中收敛, 可知它也是 $L^{q_1}(\Omega_0^k)$ 中的一个 Cauchy 序列, 由上式导出 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 也是 $L^q(\Omega_0^k)$ 中的 Cauchy 序列. 于是 (4.5.9) 成立. □

下面的紧嵌入定理最重要的工作属于 Rellich-Kondrachov[40,41].

定理 4.5.4 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足锥条件的区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域, 而 Ω_0^k 是 Ω_0 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面的交. 又设 $j\geqslant 0$, $m\geqslant 1$ 是整数, $1\leqslant p<\infty$ 和 $mp<N$. 如果 $0<N-mp<k\leqslant N$ 和 $1\leqslant q<\dfrac{kp}{N-mp}$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k). \tag{4.5.11}$$

证明 首先证明 $j=0$ 的情形.

(1) 暂时假定 $k=N$ 和 $q_0=\dfrac{Np}{N-mp}$. 为了证明

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_0),\qquad 1\leqslant q<q_0, \tag{4.5.12}$$

根据引理 4.5.1, 只需证明

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega_0). \tag{4.5.13}$$

对于 $i=1,2,\cdots$, 令

$$\Omega_i=\Big\{x\in\Omega_0\Big|\mathrm{dist}(x,\partial\Omega_0)>\frac{2}{i}\Big\}.$$

设 S 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的有界函数集合. 我们通过验证 S 满足定理 2.6.2 的条件来证明 S(当定义域限制在 Ω_0 时) 在 $L^1(\Omega_0)$ 内是准紧的. 因此给定 $\varepsilon>0$ 和对每一个 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 作零延拓

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\Omega_0,\\ 0, & x\overline{\in}\Omega_0.\end{cases}$$

利用 Hölder 不等式和由于 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q_0}(\Omega_0)$ 有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0-\Omega_i}|f(x)|\mathrm{d}x&\leqslant\left(\int_{\Omega_0-\Omega_i}|f(x)|^{q_0}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_0}}\left(\int_{\Omega_0-\Omega_i}1\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{q_0}}\\&\leqslant K\|f;W^{m,p}(\Omega)\|[\mu(\Omega_0-\Omega_i)]^{1-\frac{1}{q_0}},\end{aligned}$$

其中 K 不依赖于 $f(x)$. 因为 $q_0>1$ 和 Ω_0 有有限测度, 对任意的 $\varepsilon>0$, i 可以选得足够大保证对每一 $f\in S$ 成立

$$\int_{\Omega_0-\Omega_i}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}\tag{4.5.14}$$

和对于每一 $h\in\mathbb{R}^N$ 也有

$$\int_{\Omega_0-\Omega_i}|\widetilde{f}(x+h)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.\tag{4.5.15}$$

由式 (4.5.14) 和式 (4.5.15) 知, 对每一 $h\in\mathbb{R}^N$ 得

$$\int_{\Omega_0-\Omega_i}|\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega_0-\Omega_i}|\widetilde{f}(x+h)|\mathrm{d}x+\int_{\Omega_0-\Omega_i}|\widetilde{f}(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $|h|\leqslant\dfrac{1}{i}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 则当 $x\in\Omega_i$ 时, $x+th\in\Omega_{2i}$. 如果 $f\in C^\infty(\Omega)$, 那么

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x&=\int_{\Omega_i}\left|\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(x+th)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\Omega_i}\mathrm{d}x\int_0^1\left|\frac{\mathrm{d}f(x+th)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\mathrm{d}t\int_{\Omega_i}\left|\frac{\mathrm{d}f(x+th)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.5.16}$$

利用离散型的 Hölder 不等式有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x+th)\right|=\left|\sum_{i=1}^N h_iD_if(x+th)\right|\leqslant|\mathrm{grad}f(x+th)||h|.\tag{4.5.17}$$

将式 (4.5.17) 代入式 (4.5.16) 并注意到 $m \geqslant 1$ 和 $1 \leqslant p$, 可见

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x &\leqslant |h| \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{\Omega_i} |\mathrm{grad} f(x+th)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant |h| \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{\Omega_{2i}} |\mathrm{grad} f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant |h| \|f; W^{1,1}(\Omega_0)\| \leqslant K_1 |h| \|f; W^{m,p}(\Omega)\|,\end{aligned}$$

其中 K_1 不依赖于 $f(x)$. 因为 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 所以上面的估计对任意的 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 成立. 于是只要 $|h|$ 充分小

$$\int_{\Omega_0} |\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega_0-\Omega_i} |\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)|\mathrm{d}x + \int_{\Omega_i} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

根据定理 2.6.2, S 在 $L^1(\Omega_0)$ 内是准紧的, 所以嵌入 (4.5.11) 是紧的. (1) 的情况得证.

(2) 下面假定 $k < N$ 和 $p > 1$. 由索伯列夫嵌入定理 4.2.3 知, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{kp}{N-mp}}(\Omega_0^k)$. 对于任意的 $q < \dfrac{kp}{N-mp}$, 我们能够选择 r 使得 $1 \leqslant r < p$, $N - mp < N - mr < k$ 和 $q \leqslant \dfrac{kr}{N-mr} < \dfrac{kp}{N-mp}$. 因为 Ω_0 是有界的, 存在嵌入关系

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega_0) \hookrightarrow W^{m,r}(\Omega_0).$$

利用定理 4.4.7 推出

$$\begin{aligned}\|f; L^q(\Omega_0^k)\| &\leqslant K_2 \|f; L^{\frac{kr}{N-mr}}(\Omega_0^k)\| \leqslant K_3 \|f; L^{\frac{Nr}{N-mr}}(\Omega_0)\|^{1-\theta} \|f; W^{m,r}(\Omega_0)\|^\theta \\ &\leqslant K_4 \|f; L^{\frac{Nr}{N-mr}}(\Omega_0)\|^{1-\theta} \|f; W^{m,p}(\Omega)\|^\theta,\end{aligned} \tag{4.5.18}$$

其中常数 K_i $(i = 2, 3, 4)$ 和 $0 < \theta < 1$ 不依赖于 $f \in W^{m,p}(\Omega)$. 因为 $\dfrac{Nr}{N-mp} < \dfrac{Np}{N-mp}$, 根据前面的证明, $W^{m,p}(\Omega)$ 的任一有界序列必在 $L^{\frac{Nr}{N-mp}}(\Omega_0)$ 中有收敛的子序列. 所以此子序列是 $L^{\frac{Nr}{N-mp}}(\Omega_0)$ 中的基本序列. 由不等式 (4.5.18) 知, 此子序列也是 $L^q(\Omega_0^k)$ 中的基本序列, 从而 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_0^k)$. 最终 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega_0^k)$.

(3) 如果 $p = 1$, $0 \leqslant N - m < k < N$ 和 $m \geqslant 2$. 于是由引理 4.2.5 得

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,r}(\Omega), \tag{4.5.19}$$

其中 $r = \dfrac{N}{N-1} > 1$. 因为 $k \geqslant N - (m-1) > N - (m-1)r$, 所以由 (2) 知

$$W^{m-1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega_0^k). \tag{4.5.20}$$

由式 (4.5.19) 和式 (4.5.20) 导出 $W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega_0^k)$. 所以 $j=0$ 的嵌入关系 (4.5.11) 成立.

现在证明 j 不为零的情况. 对于 $j \geqslant 1$ 由定理 4.2.3 知 $W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k)$. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W^{m+j,p}(\Omega)$ 中的有界序列, 那么对于 $|\alpha| \leqslant j$, $\{D^\alpha f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$中的有界序列. 根据 $j=0$ 的情况 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_0^k)$ $\left(1 \leqslant q < \dfrac{kp}{N-mp}\right)$, 因此 $\{D^\alpha f_n(x)|_{\Omega_0^k}\}$ 在 $L^q(\Omega_0^k)$ 中是准紧的. 对 k进行有限的归纳可选出$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列, 仍记为 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 则 $\{D^\alpha f_n(x)|_{\Omega_0^k}\}$ 在 $L^q(\Omega_0^k)$ 中对于 $|\alpha| \leqslant j$ 收敛, 最终 $\{f_n(x)|_{\Omega_0^k}\}$ 在 $W^{j,q}(\Omega_0^k)$ 中收敛和嵌入关系 (4.5.11) 成立. □

对于以后的紧嵌入定理只证明 $j=0$ 的情况, 当 $j \geqslant 1$ 时, 可采用定理 4.5.4 的证明方法.

定理 4.5.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的有界锥形区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域, 而 Ω_0^k 是 Ω_0 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面的交, 又设 $j \geqslant 0, m \geqslant 1$ 是整数, $1 \leqslant p < \infty$ 和 $N = mp$. 如果 $1 \leqslant k \leqslant N$ 和 $1 \leqslant q < \infty$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k). \tag{4.5.21}$$

证明 (1) 如果 $N = mp, p > 1$ 和 $1 \leqslant q < \infty$, 可以选择 r 满足 $1 \leqslant r < p$, $k > N - mr > 0$ 和 $\dfrac{kr}{N-mr} > q$. 下面证明假设 Ω_0 满足锥条件. 事实上, 如果 C 是确定 Ω 满足锥条件的有限锥, 令 $\widetilde{\Omega}$ 是所有包含在 Ω 内与 Ω_0 有非空交的与 C 全等的有限锥的并, 则 $\Omega_0 \subset \widetilde{\Omega} \subset \Omega$, 并且 $\widetilde{\Omega}$ 是有界的和满足锥条件. 如果 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow X(\widetilde{\Omega})$, 其中 $X(\widetilde{\Omega})$ 是所有定义在 $\widetilde{\Omega}$ 上的函数的线性赋范空间, 因此限制在 Ω_0 上也有 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega_0)$, 所以可以假定 Ω_0 满足锥条件. 根据定理 4.5.4 有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,r}(\Omega_0) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_0^k).$$

(2) 如果 $p=1$ 和 $N = m \geqslant 2$, 取 $r = \dfrac{N}{N-1} > 1$ 以便 $N = (N-1)r$, 于是由引理 4.2.5 和 (1) 知, 对于 $1 \leqslant q < \infty$ 成立

$$W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{N-1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_0^k).$$

(3) 如果 $N = m = p = 1$, 则 $k = 1$. 令任意 $q_0 > 1$ 利用定理 4.5.4(1) 的情况得 $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega_0)$. 引理 4.2.5 指出对于 $1 \leqslant q_0 < \infty$ 成立 $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_0)$. 再由引理 4.5.1 知, 对于 $1 \leqslant q < \infty$, $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_0)$. □

定理 4.5.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的 L 型区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域. 又设 $j \geqslant 0$ 和 $m \geqslant 1$ 是整数以及 $1 \leqslant p < \infty$.

(1) 如果 $mp > N$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}_0); \tag{4.5.22}$$

(2) 如果 $mp > N \geqslant (m-1)p$ 和 $0 < \lambda < m - \dfrac{N}{p}$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0). \tag{4.5.23}$$

证明　先证 (2). 如果 $mp > N \geqslant (m-1)p$ 和 $0 < \lambda < m - \dfrac{N}{p}$, 则存在 μ 使得 $\lambda < \mu < m - \dfrac{N}{p}$. 因为 Ω_0 是有界区域, 由定理 4.5.2 推出

$$C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}_0). \tag{4.5.24}$$

应用定理 4.2.7 和限制算子有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0). \tag{4.5.25}$$

由式 (4.5.24), 式 (4.5.25) 和命题 4.5.2 知嵌入关系 (4.5.23) 当 $j=0$ 时成立.

再证 (1). 如果 $mp > N$. 令 j^* 是满足不等式 $(m-j^*)p > N \geqslant (m-j^*-1)p$ 的非负整数, 于是由 (2) 和定理 4.2.8 得到如下嵌入关系串

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-j^*,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}_0), \tag{4.5.26}$$

其中 $0 < \mu < m - j^* - \dfrac{N}{p}$. 所以式 (4.5.26) 说明对于 $j=0$ 嵌入关系 (4.5.22) 成立.
□

定理 4.5.7　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足锥条件的区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域和 Ω_0^k 是 Ω_0 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面的交. 令 $j \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ 是整数, $1 \leqslant p < \infty$ 和 $mp > N$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_B^j(\Omega_0), \tag{4.5.27}$$

且如果 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k). \tag{4.5.28}$$

证明　因为 Ω 满足锥条件且 Ω_0 是 Ω 的有界子区域. 所以可以假定 Ω_0 满足锥条件. 又由于 Ω_0 是有界的, 根据定理 3.4.1, Ω_0 可以表示为如下的有限和: $\Omega_0 = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{J} \Omega_i$, 其中 J 为有限正整数和每个 Ω_i 是 L 型区域. 如果 $mp > N$, 那么由定理 4.5.6(1) 得

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega_i) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}_i).$$

若 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的有界序列, 可以对 i 进行有限归纳, 从中选出一个子序列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, 对于每一个 i $(1 \leqslant i \leqslant J)$, $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 限制在 Ω_i 上在 $C(\overline{\Omega}_i)$ 中收敛, 则这个子序列在 $C_B(\Omega_0)$ 中收敛. 因此对于 $j=0$ 嵌入关系 (4.5.27) 成立.

因为 Ω_0 是有界区域, 对于每一个 $f \in C_B(\Omega_0)$ 有

$$\|f; L^q(\Omega_0^k)\| = \left[\int_{\Omega_0^k} |f(x)|^q \mathrm{d}x^k\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f; C_B(\Omega_0^k)\|[\mu(\Omega_0^k)]^{\frac{1}{q}},$$

所以对于 $1 \leqslant q < \infty$

$$C_B(\Omega_0^k) \hookrightarrow L^q(\Omega_0^k). \tag{4.5.29}$$

显然

$$C_B(\Omega_0^k) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_0^k). \tag{4.5.30}$$

综合式 (4.5.27), 式 (4.5.29) 和式 (4.5.30) 推得当 $j = 0$ 时式 (4.5.28) 成立. □

注 4.5.1　如果 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中任一区域, 当用 $W_0^{m+j,p}(\Omega)$ 替代 $W^{m+j,p}(\Omega)$ 时定理 4.5.4~ 定理 4.5.7 中嵌入关系仍成立. 以上结论的来历同注 4.2.1(2).

4.6 延拓定理

本节先给出延拓算子的定义, 然后证明两个引理, 最后证明延拓定理.

定义 4.6.1　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个区域, $1 \leqslant p < \infty$ 和 m 是自然数, 称把 $W^{m,p}(\Omega)$ 映入 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 的线性算子 L 为 Ω 的延拓算子, 如果 L 具有以下两个性质:

(1) 在 Ω 上几乎处处成立

$$Lf = f, \quad \forall f \in W^{m,p}(\Omega);$$

(2) $\|Lf; W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\| \leqslant K_1\|f; W^{m,p}(\Omega)\|, \quad \forall f \in W^{m,p}(\Omega)$, 其中 $K = K_1(m,p)$ 是依赖于 m 和 p, 但不依赖 $f(x)$ 的常数.

引理 4.6.1　如果 $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{x \in \mathbb{R}^N | x_N > 0\}$, $1 \leqslant p < \infty$, 则 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+^N)$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$ 中稠密.

证明　当 Ω 是 L 型区域时, 此引理就是定理 3.5.2. 放宽 Ω 的限制, 仍可能有 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密的结论. 然而我们只准备对引理所限定的区域 $\mathbb{R}_+^N$ 来证明这一结论.

在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中取一函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leqslant 1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } |x| \geqslant 2 \text{ 时}, \end{cases}$$

且存在常数 M, 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha \varphi(x)| \leqslant M \quad (|\alpha| \leqslant m).$$

设 $0<\delta<1$, 则函数 $\varphi^\delta(x)=\varphi(\delta x)$ 具有性质: ①当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{\delta}$ 时, $\varphi^\delta(x)=1$; ②$\varphi^\delta(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$; ③$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|D^\alpha\varphi^\delta(x)|\leqslant\delta^{|\alpha|}M\leqslant M$.

设 $f\in W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$, 记 $f^\delta(x)=\varphi^\delta(x)f(x)$. 利用 Leibniz 公式, 得到

$$\left|D^\alpha f^\delta(x)\right|=\left|\sum_{\beta\leqslant\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}D^\beta\varphi^\delta(x)D^{\alpha-\beta}f(x)\right|\leqslant M\sum_{\beta\leqslant\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\left|D^{\alpha-\beta}f(x)\right|. \quad (4.6.1)$$

所以 $f^\delta(x)\in W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$, 且 $\mathrm{supp}f^\delta(x)$ 是一有界集合.

令 $\mathbb{R}_+^N(\delta)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^N\middle||x|\leqslant\dfrac{1}{\delta}\right\}$. 由式 (4.6.1), 则

$$\begin{aligned}\|f-f^\delta(x);W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\|&=\|f-f^\delta;W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N-\mathbb{R}_+^N(\delta))\|\\&\leqslant\|f;W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N-\mathbb{R}_+^N(\delta))\|+\|f^\delta;W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N-\mathbb{R}_+^N(\delta))\|\\&\leqslant K_1\|f;W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N-\mathbb{R}_+^N(\delta))\|.\end{aligned}$$

当 $\delta\to0$ 时, 上式右端趋近于零. 因而对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 δ_0, 满足

$$\|f-f^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.6.2)$$

设 $t>0$. 令 $\mathbb{R}_t^N=\{x\in\mathbb{R}^N\big|x_N+t\geqslant0\}$. 作函数

$$f_t^{\delta_0}=f^{\delta_0}(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N+t).$$

记

$$\begin{aligned}&x_t=(0,0,\cdots,0,-t)\in\mathbb{R}^N,\\&B\left(x_t,\frac{1}{\delta}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^N\middle||x-x_t|\leqslant\frac{1}{\delta}\right\}\end{aligned}$$

和

$$\mathbb{R}_t^N(\delta)=\mathbb{R}_t^N\bigcap B\left(x_t,\frac{1}{\delta}\right).$$

由 $\mathrm{supp}f^{\delta_0}\subset\mathbb{R}_+^N\left(\dfrac{\delta_0}{2}\right)$ 得到

$$\mathrm{supp}f_t^{\delta_0}\subset\mathbb{R}_t^N\left(\frac{\delta_0}{2}\right),\quad f_t^{\delta_0}\in W^{m,p}(\mathbb{R}_t^N).$$

由定理 2.1.20 推出

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\left\|f_t^{\delta_0}-f^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|&=\lim_{t\to0}\left\|f_t^{\delta_0}-f^{\delta_0};W^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^N\left(\frac{\delta_0}{2}\right)\right)\right\|\\&=\lim_{t\to0}\left\|f^{\delta_0}(x-x_t)-f^{\delta_0}(x);W^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^N\left(\frac{\delta_0}{2}\right)\right)\right\|\\&=0.\end{aligned}\tag{4.6.3}$$

取一个充分小的 t_0 使其满足

(1) $\left\|f_{t_0}^{\delta_0}-f^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$;　　(4.6.4)

(2) $\mathbb{R}_{t_0}^N\left(\dfrac{\delta_0}{4}\right)=\left(\mathbb{R}_{t_0}^N\bigcap B\left(x_{t_0},\dfrac{4}{\delta_0}\right)\right)\supset\mathbb{R}_+^N\left(\dfrac{\delta_0}{3}\right)$;

(3) $\mathbb{R}_{t_0}^N\left(\dfrac{\delta_0}{4}\right)=\left(\mathbb{R}_{t_0}^N\bigcap B\left(x_{t_0},\dfrac{4}{\delta_0}\right)\right)\supset\mathbb{R}_+^N\left(\dfrac{\delta_0}{2}\right)$.

把 $f_{t_0}^{\delta_0}$ 看成 $W^{m,p}\left(\mathbb{R}_{t_0}^N\left(\dfrac{\delta_0}{4}\right)\right)$ 中的函数, 由定理 3.5.1 和定理 2.1.20(1) 知, 存在一个充分小的 η_0, 满足

(4) $\left\|J_{\eta_0}f_{t_0}^{\delta_0}-f_{t_0}^{\delta_0};W^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^N\left(\dfrac{\delta_0}{3}\right)\right)\right\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$;

(5) $\left(\mathbb{R}_{t_0}^N\bigcap\operatorname{supp}J_{\eta_0}f_{t_0}^{\delta_0}\right)\subset\mathbb{R}_{t_0}^N\left(\dfrac{\delta_0}{3}\right)$.

由式 (4) 和式 (5) 得

$$\begin{aligned}\left\|J_{\eta_0}f_{t_0}^{\delta_0}-f_{t_0}^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|&\leqslant\left\|J_{\eta_0}f_{t_0}^{\delta_0}-f_{t_0}^{\delta_0};W^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^N\left(\frac{\delta_0}{3}\right)\right)\right\|\\&<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}\tag{4.6.5}$$

综合式 (4.6.2), 式 (4.6.4) 和式 (4.6.5) 推出

$$\begin{aligned}\left\|J_{\eta_0}f_{t_0}^{\delta_0}-f;W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|\leqslant&\left\|J_{\eta_0}f_{t_0}^{\delta_0}-f_{t_0}^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|\\&+\left\|f_{t_0}^{\delta_0}-f^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|\\&+\left\|f^{\delta_0}-f;W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|<\varepsilon.\end{aligned}$$ □

引理 4.6.2　设 $1\leqslant p<\infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 中稠密.

证明　设 $f\in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 类似于证明式 (4.6.2) 的方法, 知道存在 δ_0 满足

$$\left\|f-f^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\right\|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{4.6.6}$$

其中 $f^{\delta_0}(x)$ 的意义与证明引理 4.6.1 时所用的记号类似. 然后应用定理 3.5.1, 只要 η_0 充分小, 就有

$$\left\|J_{\eta_0}f^{\delta_0}-f^{\delta_0};W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{4.6.7}$$

因为 $J_{\eta_0} f^{\delta_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 所以由式 (4.6.6) 和式 (4.6.7) 就能得到引理的结论. □

定理 4.6.1 设区域 Ω 或者是半空间 $\mathbb{R}_+^N$, 或者是具有一致 C^m- 正则性条件且有有界边界的区域, 则存在把 $W^{m,p}(\Omega)$ 映入 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)(1 \leqslant p < \infty)$ 的延拓算子.

证明 (1) 关于 $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ 的情形. 设 $f(x)$ 是几乎处处定义在 $\mathbb{R}_+^N$ 上的函数, 延拓算子由式 (4.6.8) 定义

$$Lf(x) = \begin{cases} f(x), & x_N > 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, -jx_N), & x_N \leqslant 0, \end{cases} \tag{4.6.8}$$

其中系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m+1}$ 满足下列 $(m+1)\times(m+1)$ 线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-j)^k \lambda_j = 1, \quad k = 0, 1, \cdots, m, \tag{4.6.9}$$

且其系数组成不为零的 Vandemonde 行列式, 所以 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, m+1)$ 由线性代数方程组 (4.6.9) 唯一确定.

如果 $f \in C^m\left(\overline{\mathbb{R}}_+^N\right)$, 则易证由式 (4.6.8) 确定的函数 $Lf \in C^m(\mathbb{R}^N)$, 且

$$D^\alpha Lf(x) = L_\alpha D^\alpha f(x), \quad |\alpha| \leqslant m,$$

其中算子 L_α 由下式确定.

$$L_\alpha f(x) = \begin{cases} f(x), & x_N > 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} (-j)^{\alpha_N} \lambda_j f(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, -jx_N), & x_N \leqslant 0, \end{cases}$$

而 α_N 是 N 重指数 α 的第 N 个分量, 则成立

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha Lf(x)|^p \mathrm{d}x \\ =&\int_{\mathbb{R}_+^N} |D^\alpha f(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N - \mathbb{R}_+^N} \left| \sum_{j=1}^{m+1} (-j)^{\alpha_N} \lambda_j D^\alpha f(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, -jx_N) \right|^p \mathrm{d}x \\ \leqslant& K_1(m, p, \alpha) \int_{\mathbb{R}_+^N} |D^\alpha f(x)|^p \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

从而

$$\left\| Lf; W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \right\| \leqslant K_1(m, p, \alpha) \left\| f; W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N) \right\|, \quad \forall f \in C^m\left(\overline{\mathbb{R}}_+^N\right). \tag{4.6.10}$$

所以当 $f \in C^m\left(\overline{\mathbb{R}}_+^N\right)$ 时, 定理 4.6.7 的结论成立.

设 $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$. 由引理 4.6.1 知, $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+^N\right)$ 中存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$ 中收敛于 $f(x)$. 由不等式 (4.6.10) 推出

$$\left\|L(f_n - f_k); W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\right\| \leqslant K_1(m,p,\alpha)\left\|f_n - f_k; W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\|,$$

所以 $\{Lf_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 中的基本序列. 因为 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 是 Banach 空间, 所以 $\{Lf_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $\widetilde{f}(x)$. 易知

$$\widetilde{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^N,$$

且易证 $\widetilde{f}(x)$ 不依赖于 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 的选取. 于是, 当 $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ 时, 由式 (4.6.8) 定义的 L 确实是一延拓算子.

(2) 关于 Ω 具有一致 C^m- 正则性条件且有有界边界的情形. 根据定理对 Ω 的假定, 在局部有限开覆盖 $\{O_i\}$ 中存在有限个开集 $O_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 和在 Ω 中还存在一个开集 $O_0 \subset \Omega$, 使得 $\Omega + \partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^n O_i$. 利用单位分解定理, 存在 $n+1$ 个函数 $h_i \in C_c^\infty(O_i)(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 满足① $\sum\limits_{i=0}^n h_i(x) = 1(x \in \Omega + \partial\Omega)$; ② $h_i(x) \geqslant 0$; ③ $\sum\limits_{i=0}^n h_i(x) \leqslant 1(x \in \mathbb{R}^N)$.

设 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 记 $f_i(x) = h_i(x)f(x)(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 则成立① $\mathrm{supp} f_i(x) \subset O_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$; ② $f_i \in W^{m,p}(O_i)$; ③ $\sum\limits_{i=0}^n f_i(x) = f(x)$. 如果定义在 $\mathbb{R}^N - \Omega$ 上的 $f_0(x)$ 的值为零, 则 $f_0 \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

记 $g_i(y) = f_i(\psi_i(y))(i = 1, 2, \cdots, n)$. 由定理 4.1.4 知, $g_i(y) \in W^{m,p}(B_+)$ 且 $\mathrm{supp} g_i \subset \overline{B}_+$. 定义 $g_i(y)$ 在 $\mathbb{R}_+^N - B_+$ 上的值为零, 于是 $g_i(y) \in W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$. 由 (1) 知道, 存在 $Lg_i(y)$, 根据式 (4.6.8) 成立 $\mathrm{supp} Lg_i \subset B$, 再利用式 (4.6.10) 推得

$$\begin{aligned}
\left\|Lg_i(y); W^{m,p}(B)\right\| &= \left\|Lg_i(y); W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\right\| \\
&\leqslant K_1(m,p,\alpha)\left\|g_i(y); W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)\right\| \\
&= K_1(m,p,\alpha)\left\|g_i(y); W^{m,p}(B_+)\right\|.
\end{aligned}$$

令 $F_i(x) = Lg_i(\varphi_i(x))$, 有 $\mathrm{supp} F_i \subset O_i$. 定义函数 $F_i(x)$ 在 $\mathbb{R}^N - O_i$ 上的值为

零, 根据定理 4.1.4, $F_i \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, 且

$$\begin{aligned}\|F_i(x);W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\| &= \|F_i(x);W^{m,p}(O_i)\| \\ &\leqslant K_1(m,p,\alpha)\|Lg_i(y);W^{m,p}(B)\| \\ &\leqslant K_2(m,p,\alpha)\|g_i(y);W^{m,p}(B_+)\| \\ &= K_2(m,p,\alpha)\|f_i(\psi_i(y));W^{m,p}(B_+)\| \\ &\leqslant K_3(m,p,\alpha)\|f_i;W^{m,p}(O_i\cap\Omega)\| \\ &\leqslant K_3(m,p,\alpha)\|f_i;W^{m,p}(\Omega)\|.\end{aligned}$$

把定义在 Ω 上的函数 $f(x)$ 延拓到全空间的算子 $\widetilde{L}$ 定义如下:

$$\widetilde{L}f = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} F_i(x).$$

显然

$$\widetilde{L}f = f, \quad x \in \Omega,$$

且成立

$$\begin{aligned}\|\widetilde{L}f;W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\| &\leqslant \|f_0;W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\| + \sum_{i=1}^{n}\|F_i;W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\| \\ &\leqslant \|f_0;W^{m,p}(O_0)\| + K_3(m,p,\alpha)\sum_{i=1}^{n}\|f_i;W^{m,p}(\Omega)\| \\ &\leqslant K_4(m,p,\alpha)\|f;W^{m,p}(\Omega)\|,\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{L}$ 是一个延拓算子. □

注 4.6.1 在此注中我们引入一个当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时的一个延拓定理如下: 设 Ω 是有界区域和 $\partial\Omega \in C^1$, 选择一有界开集 V, 使得 $\Omega \subset\subset V$, 则存在一线性算子 L

$$L : W^{1,p}(\Omega) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

使得对于每一 $f \in W^{1,p}(\Omega)$ 具有性质:

(1) 在 Ω 上几乎处处成立

$$Lf = f;$$

(2) $\|Lf;W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\| \leqslant C(p,\Omega,V)\|f;W^{1,p}(\Omega)\|$, 其中常数 $C(p,\Omega,V)$ 仅依赖于 p, Ω, V;

(3)Lf 在 V 中有支集.

定理 4.6.1 的证明类似于定理 4.6.1, 详见文献 [21].

4.7 边 界 迹

本节讨论对研究偏微分方程的边值问题非常重要的迹的概念, 这是 $\overline{\Omega}$ 上连续函数在 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上取值的通常概念的推广. 如果 $u \in C(\overline{\Omega})$, 则在通常意义下, 显然 u 在 $\partial\Omega$ 上有值. 研究定义在 Ω 上的偏微分方程的边值问题时, 重要的问题是决定定义在 Ω 的边界上的函数空间, 包括决定 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数 $f(x)$ 的迹 $f\mid_{\partial\Omega}$. 例如, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, 则 $u\mid_{\partial\Omega}$ 显然属于 $C(\partial\Omega)$.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中具有一致 C^m- 正则性的区域 (见定义 3.4.6). 因此存在 $\partial\Omega$ 的一个局部有限开覆盖 $\{O_i\}$ 和相应的 m 光滑变换 ψ_i 把 $B = \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y| < 1\}$ 映射到 O_i 上, 使得 $O_i \bigcap \partial\Omega = \psi_i(B_0)$, 其中 $B_0 = \{y \in B \mid y_N = 0\}$. 如果 f 是有支集在 O_i 内的函数, 可以通过

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\mathrm{d}\sigma = \int_{O_i\cap\partial\Omega} f(x)\mathrm{d}\sigma = \int_{B_0} f(\psi_i(y';0))J_i(y')\mathrm{d}y'$$

来定义 f 在 $\partial\Omega$ 上的积分, 其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是在 $\partial\Omega$ 上的 $(N-1)$ 维体积元, $y'=(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1})$, 而且如果 $x = \psi_i(y)$, 则

$$J_i(y') = \left.\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial(x_1, \cdots, \hat{x_k}, \cdots, x_N)}{\partial(y_1, \cdots, y_{N-1})}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right|_{y_N=0}.$$

如果 $f(x)$ 是定义在 Ω 上的任意函数, 令

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\mathrm{d}\sigma = \sum_i \int_{\partial\Omega} f(x)v_i(x)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\{v_i\}$ 是对于 $\partial\Omega$ 从属于 $\{O_i\}$ 的一个单位分解.

定理 4.7.1 (边界迹的嵌入定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中具有一致 C^m- 正则性条件的区域, 且假定存在一个 Ω 的延拓算子 L. 如果 $mp < N$ 和

$$p \leqslant q \leqslant p^* = \frac{(N-1)p}{N-mp},$$

则

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega). \tag{4.7.1}$$

如果 $mp = N$, 则对 $p \leqslant q < \infty$ 式 (4.7.1) 成立.

证明 嵌入关系 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ 应该在下列意义解释: 若 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 则 Lf 在 4.1.1 小节 (4) 中解释 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k)(k < N)$ 时, 在所说的意义下有一个在 $\partial\Omega$ 上的迹, 而且

$$\|Lf\|_{0,q,\partial\Omega} \leqslant K\|f\|_{m,p,\Omega},$$

其中 K 不依赖于 $f(x)$. 因为 $C_c(\mathbb{R}^N)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, $\|Lf\|_{0,q,\partial\Omega}$ 与所用的延拓算子无关.

我们只证明这个定理的特殊情形 $mp < N$ 和 $q = p^* = \dfrac{(N-1)p}{N-mp}$, 类似地可讨论其他情形. 存在常数 K_1, 使得对于每一 $f \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\|Lf\|_{m,p,\mathbb{R}^N} \leqslant K_1\|f\|_{m,p,\Omega}.$$

根据 Ω 是具有一致 C^m- 正则性条件的区域, 存在常数 K_2, 使得对于每一个 j 和每一个 $y \in B$, 有 $x = \psi_i(y) \in O_j$,

$$|J_i(y')| \leqslant K_2 \quad 和 \quad \left|\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_N)}{\partial(x_1, x_2 \cdots, x_N)}\right| \leqslant K_2.$$

注意到在 $\mathbb{R}^N$ 上 $0 \leqslant v_j(x) \leqslant 1$ 和利用定理 4.2.3 中的式 (4.2.19) 在 B 上, 对于 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |Lf(x)|^q \mathrm{d}\sigma &\leqslant \sum_j \int_{O_j\cap\partial\Omega} |Lf(x)|^q \mathrm{d}\sigma \\ &\leqslant K_2 \sum_j \|Lf(\psi_j)\|_{0,q,B_0}^q \\ &\leqslant K_3 \sum_j (\|Lf(\psi_j)\|_{m,p,B}^p)^{\frac{q}{p}} \\ &\leqslant K_4 \left(\sum_j \|Lf\|_{m,p,O_j}^p\right)^{\frac{q}{p}}, \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

其中由于 $\psi_j = (\psi_{j_1}, \psi_{j_2}, \cdots, \psi_{j_N})$ 对于所有的 $i, j, |D^\alpha\psi_{j_i}(y)| \leqslant$ 常数, 因此常数 K_4 与 j 无关. 利用覆盖 $\{O_j\}$ 具有有限交集的性质由式 (4.7.2) 得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |Lf(x)|^q d\sigma &\leqslant K_4 R\|Lf\|_{m,p,\mathbb{R}^N}^q \\ &\leqslant K_5\|f\|_{m,p,\Omega}^q. \end{aligned}$$

□

定理 4.7.2 设 Ω 具有线段条件, 则定义在 Ω 上的函数 f 属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 当且仅当 f 的零延拓 $\widetilde{f}$ 属于 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

证明 对于 Ω 不作假定的引理 4.2.7 指出, 若 $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$, 则 f 的零延拓 $\widetilde{f} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

反之, 设 Ω 具有线段条件和 $\widetilde{f} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. 如同证明定理 3.5.2, 先用适当光滑截断函数 g_ε 乘以 f 近似 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数 $f, g_\varepsilon f$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中具有有界支集. 用近似代替 f, 则 $\widetilde{f}$ 以 $g_\varepsilon\widetilde{f}$ 替代, 所以此函数仍属于 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. 现在分割 f

为有限块 $f_j, (0 \leqslant j \leqslant k), f_j$ 在一集合 V_j 中有支集且集合 V_j 的并覆盖 f 的支集. 关于定理这一点, f_0 已经属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$.

对于 j 的其他值, 如在定理 3.5.2 中所为, 作映 x 到 $\widetilde{f}_j(x-ty)$ 的 $\widetilde{f}_j$ 的变换 $f_{j,t}$ 而不用 $\widetilde{f}_j(x+ty)$. 对于 t 的足够小的正值利用 $x-ty$ 严格地移动 $\widetilde{f}_j$ 的支集到 Ω 的内部. 因为 $\widetilde{f}_j \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, 所以 $f_{j,t} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. 由于 $f_{j,t}$ 在 Ω 的一个紧支集外为零, $f_{j,t}$ 对 Ω 的限制属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$. 当 $t \to 0^+$ 时, 这些限制在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中收敛于 f_j. 因此每一块 f_j 属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$. 这样一来, f 也属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$. □

下面我们指出 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$, 当且仅当它们有适当的平凡边界迹.

定理 4.7.3 (平凡迹) 在定理 4.7.1 的条件下, $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数 f 属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$, 当且仅当它的所有低于 m 阶导数的边界迹与零函数重合.

证明 $C_c^\infty(\Omega)$ 中的每一个函数有平凡边界迹, 且这些函数的所有导数也是这样的. 因为迹映射是从 $W^{m,p}(\Omega)$ 到 $W^{m-1,p}(\partial\Omega)$ 的线性算子, $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中的所有函数有平凡边界迹, 且它们的低于 m 阶导数也如此.

为了证明相反的情况, 我们假定 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 和 f 以及它的导数或低于 m 阶导数有平凡边界迹. 局部化和适当的变量替换把 Ω 变为半空间 $\{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}$ 的情形. 下面指出零延拓 $\widetilde{f}$ 必须属于 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, 然后利用定理 4.7.2 推出 f 属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$. 事实上, 我们要求若 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 对于 f 和它的低于 m 阶导数有平凡边界迹, 则最高 m 阶广义导数 $D^\alpha \widetilde{f}$ 与零延拓 $\widetilde{D^\alpha f}$ 一致. 为了验证此事, 用 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 中的函数 v_j 近似 f 来近似积分

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x) D^\alpha \phi(x) \mathrm{d}x \quad 和 \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{D^\alpha f}(x) \phi(x) \mathrm{d}x, \tag{4.7.3}$$

而不要求这些近似有平凡迹.

令 e_N 是单位向量 $(0,0,\cdots,0,1)$. 因为 $v_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, 先对其余的变量分部积分, 然后对 x_N 显示两个积分

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{v_j}(x) D^\alpha \phi(x) \mathrm{d}x \quad 和 \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{D^\alpha v_j}(x) \phi(x) \mathrm{d}x$$

之差是形如

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^{\alpha-ke_N} v_j(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},0) D_N^{k-1} \phi(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},0) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{N-1} \tag{4.7.4}$$

的积分的有限交错和, 其中 $k>0$. 选择序列 $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中收敛于 f. 对于每一个 $\beta<\alpha$ 的 N 重指数 β, $D^\beta v_j$ 的迹将在 $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ 中收敛于的迹 $D^\beta f$, 即在其空间中收敛于零. 由于 $D_N^{k-1}\phi$ 对 $\mathbb{R}^{N-1}$ 的限制属于 $L^{p'}(\mathbb{R}^{N-1})$, 当 $j \to \infty$

时, 式 (4.7.4) 中积分的每一项都趋于零. 由此推出式 (4.7.3) 中的两个积分相等和 $\widetilde{f} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. □

4.8 Poincaré 不等式和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的一个等价范数

定理 4.8.1 (Poincaré 不等式) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开集, $1 \leqslant p < \infty$, 则存在常数 $K = K(\Omega, p)$, 使得对于每一个 $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 成立

$$\|f; L^p(\Omega)\| \leqslant K \left(\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha f; L^p(\Omega)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.8.1}$$

证明 令 Ω 是一 N 维立方体, 即 $\Omega = (-a, a)^N, a > 0$ 和 $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, 注意到 $f(x', -a) = 0$, 则

$$f(x) = \int_{-a}^{x_N} \frac{\partial f}{\partial x_N}(x', \xi) \mathrm{d}\xi,$$

其中 $x = (x', x_N)$. 因此

$$|f(x)| = \left| \int_{-a}^{x_N} \frac{\partial f}{\partial x_N}(x', \xi) \mathrm{d}\xi \right| \leqslant \left(\int_{-a}^{x_N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_N}(x', \xi) \right|^p \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{p}} |x_N + a|^{\frac{1}{q}},$$

其中 q 是 p 的共轭指数. 由上式推得

$$|f(x)|^p \leqslant |x_N + a|^{\frac{p}{q}} \int_{-a}^{a} \left| \frac{\partial f}{\partial x_N}(x', \xi) \right|^p \mathrm{d}\xi. \tag{4.8.2}$$

式 (4.8.2) 先对 x' 积分, 然后再对 x_N 积分, 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x &\leqslant \int_{-a}^{a} |x_N + a|^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x_N \int_\Omega \left| \frac{\partial f}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{q}{p+q} (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega \left| \frac{\partial f}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^p \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因此, 对于 $f \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\|f; L^p(\Omega)\| \leqslant K \left(\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha f; L^p(\Omega)\| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中稠密, 所以 Poincaré 不等式对于 Ω 为 N 维立方体的 $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 成立.

如果 Ω 不是立方体, 则令 $\widetilde{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中形如 $(-a,a)^N, a>0$ 的立方体, 使得 $\Omega\subset\widetilde{\Omega}$ 且将 $f\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 零延拓 Ω 之外, 得到 $\widetilde{f}\in W^{1,p}(\widetilde{\Omega})$. 利用对 $\widetilde{\Omega}$ 得到的结果, 可知式 (4.8.1) 成立. □

例 4.8.1 Poincaré 不等式对于 $\mathbb{R}^N$ 空间是不正确的. 事实上, 如果取 $\Omega=\mathbb{R}^N$ 和 $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, 其中

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|\geqslant 2\end{cases}$$

且 $0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$. 令

$$\psi_k(x)=\psi\left(\frac{x}{k}\right),$$

其中 k 为自然数, 则当 $k\to\infty$ 时,

$$\left(\sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha\psi_k;L^p(\mathbb{R}^N)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0.$$

可是当 $k\to\infty$ 时,

$$\|\psi_k;L^p(\mathbb{R}^N)\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_k(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\mu(B(0,k))^{\frac{1}{p}}\to\infty.$$

所以对于 $\mathbb{R}^N$ 空间 Poincaré 不等式是不成立的.

注 4.8.1 Poincaré 不等式对 $\mathbb{R}^N$ 空间和一般的无界集不成立, 但如果至少在一个方向, 集合 Ω 是有界的, 则 Poincaré 不等式是成立的.

推论 4.8.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开集, $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 和 $\|\cdot;W^{m,p}(\Omega)\|$ 是空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的两个等价范数.

证明 如果 $f\in W_0^{m,p}(\Omega)$, 则由式 (4.8.1) 推出

$$|f|_{1,p,\Omega}^p\leqslant\|f\|_{1,p,\Omega}^p=\|f\|_{0,p,\Omega}^p+|f|_{1,p,\Omega}^p\leqslant(1+K^p)|f|_{1,p,\Omega}^p. \tag{4.8.3}$$

对导数 $D^\alpha f(x)$, $|\alpha|\leqslant m-1$ 相继应用式 (4.8.3), 得到

$$|f|_{m,p,\Omega}^p\leqslant\|f;W^{m,p}(\Omega)\|^p\leqslant K|f|_{m,p,\Omega}^p.$$

这就给出 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 和 $\|\cdot;W^{m,p}(\Omega)\|$ 是 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的两个范数的等价性. □

本章主要参考了文献 [1] 和 [2].

第 5 章　含有时间的空间

本章考虑含有时间的空间, 这类空间中的函数是映时间到 Banach 空间. 这些空间对研究线性和非线性发展方程时, 将起着重要的作用.

5.1　抽 象 函 数

抽象函数是数学分析中"函数"概念在抽象空间中的推广. 在实分析中数值函数的 Lebesgue 积分占有非常重要的地位, 它使积分的很多运算得以简化. 相应于数值函数的 Lebesgue 积分在抽象函数的积分上应当有适当的推广, 但是, 由于抽象空间一般会有几种不同的拓扑结构, 从而 Lebesgue 积分到抽象函数的推广也会有几种形式, 其中应用最广泛的一种积分是抽象函数的 Bochner 积分.

设 E 表示 $\mathbb{R}$ 中的区间 (可以无限), X 表示一般的 Banach 空间, X' 表示其对偶空间. X 上的线性泛函 (满足可加性和连续性的泛函) $Z^* \in X'$ 在 $Z \in X$ 处的取值记为 $Z^*(Z) = (Z, Z^*) = (Z^*, Z)$.

定义 5.1.1　单值映射 $Z : E \mapsto X$ 称为由 E 到 X 中的抽象函数. 称 E 是抽象函数的定义域, X 是值域.

有时为了表示抽象函数的自变量, 抽象函数 Z 也常常记为 $Z(t)$. 相应于 Banach 空间 X 的几种不同拓扑结构, 抽象函数有下列几种连续性.

定义 5.1.2　设 $Z : E \mapsto X$ 是抽象函数, $t_0 \in E$, 如果

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} |(Z(t), Z^*) - (Z(t_0), Z^*)| = 0, \qquad \forall Z^* \in X',$$

则称抽象函数 $Z(t)$ 在 t_0 处弱连续. 如果

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ x \in E}} \|Z(t) - Z(t_0)\|_X = 0,$$

则称抽象函数 $Z(t)$ 在 t_0 处强连续. 当 $Z(t)$ 在 E 上每一点均强 (弱) 连续时, 称 $Z(t)$ 在 E 上强 (弱) 连续.

显然, 抽象函数 $Z(t)$ 在 t_0 处强连续, 必在 t_0 处弱连续, 反之不一定成立.

设 X, Y 为两个 Banach 空间. 记 $L[X, Y]$ 为定义在 X 上取值于 Y 的线性算子 (满足可加性和连续性的算子) 全体组成的算子空间. 因为 $L[X](= L[X, X])$ 依

算子范数构成 Banach 空间, 所以可以考虑由 E 到 $L[X]$ 的抽象函数, 习惯上称这类抽象函数为算子函数.

定义 5.1.3 设 $\widetilde{L}: E \mapsto L[X]$ 是算子函数, $t_0 \in E$. 如果

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} |(\widetilde{L}(t)Z, Z^*) - (\widetilde{L}(t_0)Z, Z^*)| = 0, \quad Z \in X, \quad Z^* \in X',$$

则称算子函数 $\widetilde{L}$ 在 t_0 处弱连续. 如果

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \|\widetilde{L}(t)Z - \widetilde{L}(t_0)Z\|_X = 0, \quad Z \in X,$$

则称算子函数 $\widetilde{L}$ 在 t_0 处强连续. 如果

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \|\widetilde{L}(t) - \widetilde{L}(t_0)\|_{L[X]} = 0,$$

则称算子函数 $\widetilde{L}$ 在 t_0 处一致连续.

定理 5.1.1 (1) 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集, X 是 Banach 空间, X' 是 X 的对偶空间和 X'' 是 X' 的对偶空间. 若抽象函数 $Z: E \mapsto X$ 在 E 上强连续, 则

$$\max_{t \in E} \|Z(t)\|_X < \infty;$$

(2) 若算子函数 $\widetilde{L}: E \mapsto L[X]$ 在 E 上弱连续, 则

$$\max_{t \in E} \|\widetilde{L}(t)\|_{L[X]} < \infty.$$

证明 (1) 对于任意给定的 $Z^* \in X'$, $(Z(t), Z^*)$ 是 E 上的普通连续函数. 因为 E 是 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集, 所以

$$\max_{t \in E} |(Z(t), Z^*)| < \infty. \tag{5.1.1}$$

记 J 为 X 到 X'' 的嵌入映射, 即对任意给定的 $Z \in X, Z^* \in X', (Z, Z^*) = (Z^*, JZ)$. 由式 (5.1.1) 可知

$$\max_{t \in E} |(Z^*, JZ(t))| < \infty.$$

再由定理 1.2.3(共鸣定理) 推出 $\max_{t \in E} \|JZ(t)\|_{X''} < \infty$. 因为 J 是嵌入映射, 所以 $\|JZ(t)\|_{X''} = \|Z(t)\|_X$. 于是

$$\max_{t \in E} \|Z(t)\|_X < \infty.$$

(2) 由于 $\widetilde{L}$ 是 E 上的弱连续算子函数, 则由定义 5.1.3 可知, 对于任给的 $Z \in X$, $\widetilde{L}(t)Z$ 是 E 上的弱连续抽象函数. 从证明 (1) 的情形得到 $\max_{t\in E}\|\widetilde{L}(t)Z\|_X < \infty$. 再利用共鸣定理便成立

$$\max_{t\in E}\|\widetilde{L}(t)\|_{L[X]} < \infty.$$ □

类似于由全体实值连续函数组成的空间 $C[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, 可以定义取值于 X 中的抽象连续函数空间

$$C([a,b];X) = \{Z|Z(t) \in X, t \in [a,b], \text{并且 } Z \text{ 在 } [a,b] \text{ 上强连续}\}.$$

定理 5.1.2 空间 $C([a,b];X)$ 在范数 $\|Z\|_{C([a,b];X)} = \max_{t\in[a,b]}\|Z(t)\|_X$ 下是 Banach 空间.

证明 对于 $Z \in C([a,b];X)$, 由于 $Z(t)$ 在 $[a,b]$ 上强连续, 因此由定理 5.1.1 知

$$\max_{t\in[a,b]}\|Z(t)\|_X < \infty,$$

这表示范数的定义有意义. 显然, 上述定义的范数满足范数公理, 从而 $C([a,b];X)$ 成为线性赋范空间.

设 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是空间 $C([a,b];X)$ 中的基本序列, 即对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N_0 = N_0(\varepsilon)$, 当 $n, m \geqslant N_0$ 时,

$$\max_{t\in[a,b]}\|Z_n(t) - Z_m(t)\|_X = \|Z_n - Z_m\|_{C([a,b];X)} < \varepsilon. \tag{5.1.2}$$

因而, 对于每个 $t \in [a,b]$, $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的基本序列. 由空间 X 的完备性可知, 存在 $Z \in X$, 使得在空间 X 中, 当 $n \to \infty$ 时,

$$Z_n(t) \to Z(t).$$

根据式 (5.1.2) 推得, 关于 $t \in [a,b]$ 一致地有

$$\|Z_n(t) - Z_m(t)\|_X < \varepsilon.$$

在上式中令 $m \to \infty$ 时, 则当 $n \geqslant N_0$ 时, 得

$$\|Z_n(t) - Z(t)\|_X \leqslant \varepsilon, \quad t \in [a,b], \tag{5.1.3}$$

从而

$$\|Z_n - Z\|_{C([a,b];X)} = \max_{t\in[a,b]}\|Z_n(t) - Z(t)\|_X \leqslant \varepsilon.$$

任取 $t_0, t \in [a,b]$, 由 $Z_n \in C([a,b];X)$ 知, 存在 $\delta > 0$, 当 $|t-t_0| < \delta$ 时,

$$\|Z_n(t) - Z_n(t_0)\|_X < \varepsilon.$$

这时,

$$\begin{aligned}\|Z(t)-Z(t_0)\|_X \leqslant & \|Z(t)-Z_n(t)\|_X + \|Z_n(t)-Z_n(t_0)\|_X \\ & + \|Z_n(t_0)-Z(t_0)\|_X \leqslant 3\varepsilon,\end{aligned}$$

即序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限 $Z(t)$ 在 $[a,b]$ 上强连续, 这表明 $Z \in C([a,b];X)$, 所以 $C([a,b];X)$ 空间是 Banach 空间. □

5.2 抽象函数的 Bochner 积分

定义 5.2.1 设 $\{E_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 E 中的可测集, $E_i \bigcap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, 每一个 E_i 的 Lebesgue 测度 $\mu(E_i)$ 是有限的. 用 $\chi_{E_i}(t)$ 表示 E_i 上的特征函数, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 X 中的元素, 称抽象函数

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(t) b_i \tag{5.2.1}$$

为简单函数.

定义 5.2.2 称抽象函数 $Z(t)$ 在 E 上强可测, 如果存在简单函数序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, 在 E 中几乎处处成立

$$\lim_{n\to\infty} \|Z_n(t) - Z(t)\|_X = 0. \tag{5.2.2}$$

我们把在 E 上几乎处处相等的抽象函数视为同一函数.

定义 5.2.3 如果定义在 E 上的简单函数 $Z(t)$ 由式 (5.2.1) 确定, $Z(t)$ 在 E 上的 Bochner 积分定义为

$$\int_E Z(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E_i). \tag{5.2.3}$$

引理 5.2.1 设 $Z(t)$ 是定义在 E 上的简单函数, 则

$$\left\| \int_E Z(t)\mathrm{d}t \right\|_X \leqslant \int_E \|Z(t)\|_X \mathrm{d}t, \tag{5.2.4}$$

其中 X 是 Banach 空间.

证明

$$\left\|\int_E Z(t)\mathrm{d}t\right\|_X = \left\|\sum_{i=1}^n b_i\mu(E_i)\right\|_X \leqslant \sum_{i=1}^n \|b_i\|_X\mu(E_i)$$
$$= \int_E \|Z(t)\|_X\mathrm{d}t.$$ □

根据式 (5.2.3) 易知下面的结论.

引理 5.2.2 设 $Z(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个简单函数, α 和 β 是实数, 则

(1) $\alpha Z(t)+\beta Y(t)$ 仍是简单函数;

(2) $\displaystyle\int_E(\alpha Z(t)+\beta Y(t))\mathrm{d}t=\alpha\int_E Z(t)\mathrm{d}t+\beta\int_E Y(t)\mathrm{d}t.$

定义 5.2.4 称抽象函数 $Z(t)$ 在 E 上 Bochner 可积, 如果存在简单函数序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 在 E 上几乎处处满足

$$\lim_{n\to\infty}\|Z_n(t)-Z(t)\|_X=0,$$

并成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\|Z_n(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t=0. \tag{5.2.5}$$

此时, $Z(t)$ 的 Bochner 积分 $\displaystyle\int_E Z(t)\mathrm{d}t$ 定义如下:

$$\int_E Z(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_E Z_n(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.6}$$

为了说明定义 5.2.4 的合理性, 必须验证式 (5.2.6) 右端极限的存在性, 并且指出此极限不依赖于 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 的选择.

(1) 证明式 (5.2.6) 右端极限的存在性. 事实上, 由式 (5.2.4) 推出

$$\left\|\int_E Z_m(t)\mathrm{d}t-\int_E Z_n(t)\mathrm{d}t\right\|_X \leqslant \int_E\|Z_m(t)-Z_n(t)\|_X\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_E\|Z_m(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t+\int_E\|Z_n(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t.$$

由上式看出 $\displaystyle\left\{\int_E Z_n(t)\mathrm{d}t\right\}_{n=1}^\infty$ 是 X 中的基本序列. 由 X 的完备性知道极限是存在的.

(2) 极限不依赖于 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 的选择. 事实上, 如果 $\{Y_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 是满足式 (5.2.2) 和式 (5.2.5) 的两个简单函数序列, 于是

$$\left\|\int_E Y_n(t)\mathrm{d}t-\int_E Z_n(t)\mathrm{d}t\right\|_X \leqslant \int_E\|Y_n(t)-Z_n(t)\|_X\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_E\|Y_n(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t+\int_E\|Z(t)-Z_n(t)\|_X\mathrm{d}t.$$

由此可见, $\left\{\int_E Y_n(t)\mathrm{d}t\right\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\left\{\int_E Z_n(t)\mathrm{d}t\right\}_{n=1}^{\infty}$ 具有同一极限. 综合 (1) 和 (2) 可知抽象函数 $Z(t)$ 的 Bochner 积分的存在性与满足式 (5.2.2) 和式 (5.2.5) 的简单函数序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 的选取无关.

定理 5.2.1 强可测函数 $Z(t)$ 在 E 上 Bochner 可积的充要条件是 $\|Z(t)\|_X \in L^1(E)$.

证明 必要性. 设 $Z(t)$ 在 E 上 Bochner 可积, 则存在满足式 (5.2.2) 和式(5.2.5) 的简单函数序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \|Z_n(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t=0. \tag{5.2.7}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_E \|Z(t)\|_X\mathrm{d}t &= \int_E \|Z(t)-Z_n(t)+Z_n(t)\|_X\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_E \|Z_n(t)\|_X\mathrm{d}t+\int_E \|Z(t)-Z_n(t)\|_X\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $Z(t)$ 的 Bochner 可积性, $\|Z_n(t)\|_X$ 是可积函数, 所以 $\|Z(t)\|_X$ 在 E 上 Lebesgue 可积.

充分性. 由于 $Z(t)$ 强可测, 则存在简单函数序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足式 (5.2.2), 由此得到在 E 上除去零测集 $\widetilde{E}$ 外成立

$$\lim_{n\to\infty}\|Z_n(t)-Z(t)\|_X=0,\quad t\in E-\widetilde{E}.$$

作简单函数序列 $\{Y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 如下:

$$Y_n(t)=\begin{cases}Z_n(t), & \text{当 } \|Z_n(t)\|_X<2\|Z(t)\|_X \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \|Z_n(t)\|_X\geqslant 2\|Z(t)\|_X \text{ 时}.\end{cases}$$

显然成立

$$\lim_{n\to\infty}\|Y_n(t)-Z(t)\|_X=0,\quad t\in E-\widetilde{E}$$

和

$$\|Y_n(t)-Z(t)\|_X\leqslant 3\|Z(t)\|_X.$$

利用定理 2.1.6(Lebesgue 控制收敛定理) 推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \|Y_n(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t=\int_E\lim_{n\to\infty}\|Y_n(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t=0.$$

所以简单函数序列 $\{Y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足式 (5.2.2) 和式 (5.2.5), 从而 $Z(t)$ Bochner 可积. □

定理 5.2.2 有限个 Bochner 可积函数的线性组合仍是 Bochner 可积的, 并且线性组合的积分等于积分的线性组合.

证明 为了简单起见, 只证两个 Bochner 可积函数的情形. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 E 上 Bochner 可积, 对于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别存在满足式 (5.2.2) 和式 (5.2.5) 式的简单函数序列 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n(t)-x(t)\|_X=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|y_n(t)-y(t)\|_X=0$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\|x_n(t)-x(t)\|_X\mathrm{d}t=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_E\|y_n(t)-y(t)\|_X\mathrm{d}t=0.$$

对于 α,β 常数存在简单函数序列 $\{\alpha x_n(t)+\beta y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上几乎处处满足

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n(t)+\beta y_n(t)-(\alpha x(t)+\beta y(t))\|_X\\ \leqslant&\lim_{n\to\infty}[|\alpha|\|x_n(t)-x(t)\|_X+|\beta|\|y_n(t)-y(t)\|_X]=0,\end{aligned}$$

并成立

$$\begin{aligned}&\int_E\|\alpha x_n(t)+\beta y_n(t)-(\alpha x(t)+\beta y(t))\|_X\mathrm{d}t\\ \leqslant&\int_E|\alpha|\|x_n(t)-x(t)\|_X\mathrm{d}t+\int_E|\beta|\|y_n(t)-y(t)\|_X\mathrm{d}t\to0,\qquad n\to\infty.\end{aligned}$$

所以 $\alpha x(t)+\beta y(t)$ 在 E 上 Bochner 可积. 还有

$$\begin{aligned}\int_E(\alpha x(t)+\beta y(t))\mathrm{d}t&=\lim_{n\to\infty}\int_E(\alpha x_n(t)+\beta y_n(t))\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\alpha\int_E x_n(t)\mathrm{d}t+\beta\int_E y_n(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\alpha\int_E x(t)\mathrm{d}t+\beta\int_E y(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

定理 5.2.3 如果 $Z(t)$ 在 E 上 Bochner 可积, 则

$$\left\|\int_E Z(t)\mathrm{d}t\right\|_X\leqslant\int_E\|Z(t)\|_X\mathrm{d}t. \tag{5.2.8}$$

证明 如果 $Z(t)$ 是简单函数, 则由引理 5.2.1 知式 (5.2.8) 就是式 (5.2.4). 如果 $Z(t)$ 不是简单函数, 则存在满足式 (5.2.2) 和式 (5.2.5) 的简单函数序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

设 $Z_n(t)$ 是简单函数序列 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 中的任一元素, 那么

$$\begin{aligned}\left\|\int_E Z(t)\mathrm{d}t\right\|_X &\leqslant \left\|\int_E (Z(t)-Z_n(t))\mathrm{d}t\right\|_X + \left\|\int_E Z_n(t)\mathrm{d}t\right\|_X \\ &\leqslant \left\|\int_E (Z(t)-Z_n(t))\mathrm{d}t\right\|_X + \int_E \|Z_n(t)\|_X\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left\|\int_E (Z(t)-Z_n(t))\mathrm{d}t\right\|_X + \int_E \|Z_n(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t + \int_E \|Z(t)\|_X\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意到当 $n\to\infty$ 时, 由于 $Z(t)$ Bochner 可积知上式右端第一项趋于零. 由式 (5.2.5) 得到右端第二项也趋于零, 而上式左端与 n 又无关. 这样由上式推得式 (5.2.8) 成立. □

由定理 5.2.1 可知, 强可测函数的 Bochner 积分与 Lebesgue 可测函数的 Lebesgue 积分基本上是类似的. 在具体运算时, 大多数情况下, 可以将强可测函数的 Bochner 积分类比成数值可测函数的 Lebesgue 积分来处理. 例如, 类似于数值 Lebesgue 可积函数, Bochner 可积函数还有以下重要性质. 我们以定理形式列出, 而不加以证明.

定理 5.2.4　设 $Z(t)$ 在 E 上 Bochner 可积, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 E 中可测集 $\widetilde{E}$ 满足 $\mu(\widetilde{E})<\delta$ 时, 有

$$\left\|\int_{\widetilde{E}} Z(t)\mathrm{d}t\right\|_X < \varepsilon.$$

定理 5.24 称为 Bochner 积分的绝对连续性定理.

定理 5.2.5　设 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是 E 上的 Bochner 可积函数, 并且 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 几乎处处强收敛于 $Z(t)$, 又

$$\|Z_n(t)\|_X \leqslant F(t), \quad n=1,2,\cdots, \quad \int_E F(t)\mathrm{d}t<\infty,$$

则 $Z(t)$ 在 E 上也是 Bochner 可积的, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E Z_n(t)\mathrm{d}t = \int_E Z(t)\mathrm{d}t.$$

定理 5.2.5 称为 Bochner 积分的控制收敛定理.

定理 5.2.6　设 $Z(t)$ 在 E 上 Bochner 可积, 对 E 中两两不相交的可测集 $E_n, n=1,2,\cdots$, 有

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n} Z(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} Z(t)\mathrm{d}t,$$

上式右端和式表示强极限.

定理 5.2.6 称为 Bochner 积分的可列可加性定理.

5.3 含有时间的空间

在本节我们把 5.2 节讨论的区间 E 取为时间区间 $(0,T)$, 来研究含有时间的一些空间.

5.3.1 $L^p((0,T);X)$ 空间的完备性

定义 5.3.1 设 $1\leqslant p<\infty$ 和 X 是具有范数 $\|\cdot\|_X$ 的 Banach 空间. 空间 $L^p((0,T);X)$ 是由满足 Lebesgue 积分

$$\|Z\|_{L^p((0,T);X)}=\left(\int_0^T\|Z(t)\|_X^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty$$

的有限的全体强可测函数 $Z:(0,T)\mapsto X$ 组成.

我们将认为两个抽象函数 $Z_1,Z_2\in L^p((0,T);X)$ 相等当且仅当对于几乎所有的 $t\in(0,T)$, $Z_1(x)=Z_2(x)$. 容易验证 $L^p((0,T);X)$ 是一线性空间. 若 $L^p((0,T);X)$ 中的元素 $Z(t)$ 赋予范数

$$\|Z;L^p((0,T);X)\|(\text{或}\|Z\|_{L^p((0,T);X)})=\left(\int_0^T\|Z(t)\|_X^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

则易证 $L^p((0,T);X)$ 为赋范空间.

因为证明下面的定理需要 Fatou 引理, 现叙述如下.

引理 5.3.1 (Fatou 引理) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是可测集, 又设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是一个非负可测函数序列, 则

$$\int_\Omega\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5.3.1 设 X 是一 Banach 空间, 则 $L^p((0,T);X)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 也是 Banach 空间.

证明 首先证明 $p=1$ 的情形. 设 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 是 $L^1((0,T);X)$ 中的任一基本序列, 则

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^T\|Z_n(t)-Z_m(t)\|_X\mathrm{d}t=\lim_{n,m\to\infty}\|Z_n(t)-Z_m(t)\|_{L^1((0,T);X)}=0.$$

由上式可选出子序列 $\{Z_{n_k}(t)\}_{k=1}^\infty$, 使得

$$\|Z_{n_{k+1}}(t)-Z_{n_k}(t)\|_{L^1((0,T);X)}<2^{-k},\quad k=1,2,\cdots,\tag{5.3.1}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T \|Z_{n_{k+1}}(t)-Z_{n_k}(t)\|_X \mathrm{d}t<\infty.$$

由此可知, 对于几乎所有的 $t\in(0,T)$, 成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|Z_{n_{k+1}}(t)-Z_{n_k}(t)\|_X<\infty,$$

即级数 $Z_{n_1}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[Z_{n_{k+1}}(t)-Z_{n_k}(t)]$ 几乎处处强收敛. 记其极限函数为几乎处处定义在 $(0,T)$ 上的

$$Z(t)=Z_{n_1}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[Z_{n_{k+1}}-Z_{n_k}(t)]=\lim_{k\to\infty}Z_{n_k}(t).$$

因为

$$\int_0^T\|Z(t)\|_X\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\left[\|Z_{n_1}(t)\|_X+\sum_{k=1}^{\infty}\|Z_{n_{k+1}}(t)-Z_{n_k}(t)\|_X\right]\mathrm{d}t,$$

所以 $Z(t)$ 强可测和 Bochner 可积. 对于几乎所有的 $t\in(0,T)$ 有

$$\begin{aligned}\|Z_{n_j}(t)-Z(t)\|_X&=\left\|\sum_{k=j}^{\infty}[Z_{n_{K+1}}(t)-Z_{n_k}(t)]\right\|_X\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|Z_{n_{k+1}}(t)-Z_{n_k}(t)\|_X.\end{aligned}$$

根据定理 2.1.6 (Lebesgue 控制收敛定理) 推出

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^T\|Z_{n_j}(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t=\int_0^T\lim_{j\to\infty}\|Z_{n_j}(t)-Z(t)\|_X\mathrm{d}t=0.$$

即

$$\lim_{j\to\infty}\|Z_{n_j}(t)-Z(t);L^1((0,T);X)\|=0.$$

所以 $Z(t)\in L^1((0,T);X)$.

由不等式

$$\begin{aligned}&\|Z_n(t)-Z(t)\|_{L^1((0,T);X)}\\\leqslant&\|Z_n(t)-Z_{n_j}(t)\|_{L^1((0,T);X)}+\|Z_{n_j}(t)-Z(t)\|_{L^1((0,T);X)}\end{aligned}$$

可知 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 依 $L^1((0,T);X)$ 范数收敛于 $Z(t)$, 所以 $L^1((0,T);X)$ 是 Banach 空间.

其次证明 $1 < p < \infty$ 的情形.

设 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是空间 $L^p((0,T);X)$ 中任一基本序列. 利用 Hölder 不等式可推出 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 也是空间 $L^1((0,T);X)$ 中的基本序列. 事实上,

$$\begin{aligned}&\|Z_n(t) - Z_m(t)\|_{L^1((0,T);X)}\\&=\int_0^T \|Z_n(t) - Z_m(t)\|_X \mathrm{d}t \leqslant T^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \|Z_n(t) - Z_m(t)\|_X^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

所以存在 $Z \in L^1((0,T);X)$ 和成立下式

$$\lim_{n\to\infty} \|Z_n(t) - Z(t)\|_{L^1((0,T);X)} = 0.$$

这是 $p = 1$ 情形所证明的结论. 考虑实值函数

$$\varphi_n(t) = \|Z_n(t) - Z(t)\|_X.$$

序列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^1(0,T)$ 中收敛于零函数. 令 $\{g_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列, 对于几乎处处的 $t \in (0,T)$ 在 X 中具有下列性质

$$\lim_{k\to\infty} g_k(t) = Z(t)$$

和 $m \geqslant k$ 时,

$$\int_0^T \|g_k(t) - g_m(t); X\|^p \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

因为 $\|g_k(t) - g_m(t); X\| \geqslant 0$. 由 Fatou 引理

$$\int_0^T \|g_k(t) - Z(t); X\|^p \mathrm{d}t \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int_0^T \|g_k(t) - g_m(t)\|_X^p \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

这样 $Z(t) \in L^p((0,T);X)$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty} \|g_k(t) - Z(t)\|_{L^p((0,T);X)} = 0$. 从而当 $k \to \infty$ 和 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|Z_n(t) - Z(t)\|_{L^p((0,T);X)} \leqslant &\|Z_n(t) - g_k(t)\|_{L^p((0,T);X)}\\&+ \|g_k(t) - Z(t)\|_{L^p((0,T);X)} \to 0.\end{aligned}$$

所以 $L^p((0,T);X)$ 是 Banach 空间. □

5.3.2 $L^\infty((0,T);X)$ 空间的完备性

定义 5.3.2 用 $L^\infty((0,T);X)$ 表示满足

$$\operatorname*{ess\ sup}_{x\in(0,T)} \|Z(t); X\| < \infty$$

的所有强可测函数 $Z:(0,T)\mapsto X$ 的集合.

显然集合 $L^\infty((0,T);X)$ 是线性空间. 若 $L^\infty((0,T);X)$ 中的元素 $Z(t)$ 赋予范数

$$\|Z;L^\infty((0,T);X)\|=\text{ess}\sup_{x\in(0,T)}\|Z(t);X\|,$$

易证 $L^\infty((0,T);X)$ 是赋范空间.

证明 $L^\infty((0,T);X)$ 是一 Banach 空间之前, 先建立下面有用的引理.

引理 5.3.2 设 $Z\in L^\infty((0,T);X)$, 则存在测度为零的集合 $A\subset(0,T)$, 使得

$$\|Z;L^\infty((0,T);X)\|=\sup_{t\in(0,T)-A}\|Z(t);X\|.$$

证明 从定义 5.3.2 有

$$\|Z;L^\infty((0,T);X)\|=\inf_{\substack{B\subset(0,T)\\ \mu(B)=0}}\sup_{t\in(0,T)-B}\|Z(t);X\|,$$

因此, 存在 $A_n\subset(0,T)$, $n=1,2,\cdots$, $\mu(A_n)=0$, 使得

$$\sup_{t\in(0,T)-A_n}\|Z(t);X\|\leqslant\|Z;L^\infty((0,T);X)\|+\frac{1}{n}.$$

设 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 则对于所有 $n\in\mathbb{N}$

$$\|Z;L^\infty((0,T);X)\|\leqslant\sup_{t\in(0,T)-A}\|Z(t);X\|\leqslant\|Z;L^\infty((0,T);X)\|+\frac{1}{n}.$$

所以 A 是所要的集合. □

定理 5.3.2 设 X 是 Banach 空间, 则空间 $L^\infty((0,T);X)$ 也是 Banach 空间.

证明 设 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 是空间 $L^\infty((0,T);X)$ 中的任一基本序列. 由引理 5.3.2 得

$$\begin{aligned}\|Z_n-Z_m;L^\infty((0,T);X)\|&=\sup_{t\in(0,T)-A_{m,n}}\|Z_n(t)-Z_m(t);X\|\\&\geqslant\sup_{t\in(0,T)-A}\|Z_n(t)-Z_m(t);X\|,\end{aligned}$$

其中 $A=\bigcup_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}$, $\mu(A_{m,n})=0$. 因此 $\{Z_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 是 $(0,T)-A$ 上的一致基本序列和在 $(0,T)-A$ 上一致收敛于强可测函数 $Z(t)$. 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得对于所有的 $m,n\geqslant n_0$,

$$\varepsilon>\|Z_n-Z_m;L^\infty((0,T);X)\|\geqslant\sup_{t\in(0,T)-A}\|Z_n(t)-Z_m(t);X\|.$$

当 $m \to \infty$ 时, 对于 $n \geqslant n_0$, 有

$$\varepsilon \geqslant \sup_{t\in(0,T)\setminus A} \|Z_n(t) - Z(t); X\| \geqslant \|Z_n - Z; L^\infty((0,T); X)\|.$$

由上面的不等式推出 $Z \in L^\infty((0,T); X)$ 和

$$\lim_{n\to\infty} \|Z_n - Z; L^\infty((0,T); X)\| = 0.$$

所以空间 $L^\infty((0,T); X)$ 是 Banach 空间. □

5.4 含有时间的索伯列夫空间

定义 5.4.1 (1) 设 X 是 Banach 空间. $W^{1,p}((0,T); X)$ 是由所有函数 $Z \in L^p((0,T); X)$ 组成, 且使得 $Z_t(t) \left(= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z(t)\right)$ 在弱意义下存在和属于 $L^p((0,T); X)$. 赋予范数

$$\|Z\|_{W^{1,p}((0,T);X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \left(\|Z(t)\|_X^p + \|Z_t(t)\|_X^p\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \left(\|Z(t)\|_X + \|Z_t(t)\|_X\right), & p = \infty \end{cases}$$

后, 称空间 $W^{1,p}((0,T); X)$ 为含有时间的索伯列夫空间.

(2) 记 $H^1((0,T); X) = W^{1,2}((0,T); X)$.

类似地, 可以定义含有时间的索伯列夫空间 $W^{m,p}((0,T); X)$, 且类似于证明 $L^p((0,T); X)$ 为 Banach 空间, 可证明当 X 为 Banach 空间时, $W^{m,p}((0,T); X)$ 也为 Banach 空间.

定理 5.4.1 设 $1 \leqslant p < \infty$, $Z \in W^{1,p}((0,T); X)$, 则

(1) (可能在一零测集上重新定义之后)$Z \in C([0,T]; X)$;

(2) 对于所有的 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

$$Z(t) = Z(s) + \int_s^t Z_\tau(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

(3) 成立估计

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|Z(t)\|_X \leqslant C_1(T,p)\|Z\|_{W^{1,p}((0,T);X)}, \tag{5.4.1}$$

其中 $C_1(T,p)$ 是依赖于 T 和 p 的常数.

证明 首先延拓 $Z(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 (T,∞) 上为零, 然后置 $J_\delta Z=(j_\delta * Z)(t)$, 其中 j_δ 是在 $\mathbb{R}$ 上的软化子. 例如, 证明定理 2.1.20(1), 可以证明在 $(\delta, T-\delta)$ 上 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_\delta Z=\left(j_\delta * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z\right)(t)$, 则当 $\delta\to 0$ 时, 在 $L^p((0,T);X)$ 中

$$J_\delta Z(t)\to Z(t) \quad 和 \quad J_\delta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t)\to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t). \tag{5.4.2}$$

固定 $0<s<t<T$, 计算

$$J_\delta Z(t)=J_\delta Z(s)+\int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}J_\delta Z(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

根据式 (5.4.2) 对于几乎处处的 $0<s<t<T$ 成立

$$Z(t)=Z(s)+\int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Z(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{5.4.3}$$

作为映射 $t\mapsto \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是连续的, 所以定理的结论 (1) 和 (2) 成立.

其次, 估计 (5.4.1) 容易由式 (5.4.3) 得到. □

定理 5.4.2 设 $Z\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z\in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$, 则

(1) (可能重新定义一个零测集后)

$$Z\in C([0,T];L^2(\Omega));$$

(2) 映射

$$t\mapsto \|Z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

是绝对连续的, 且对于几乎处处的 $0\leqslant t\leqslant T$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|Z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2=2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t),Z(t)\right),$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 的内积;

(3) 成立估计

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z(t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_2(T)\left(\|Z\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))}+\|Z_t\|_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))}\right),$$

其中 $C_2(T)$ 是仅依赖于 T 的常数.

证明 (1) 首先像定理 5.4.1 延拓 $Z(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 (T,∞) 上为零和定义 $Z(t)$ 的正则化为

$$J_\delta Z(t)=\int_{\mathbb{R}}Z(\tau)j_\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{\mathbb{R}}Z(t-\delta\tau)j(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则对于 $\delta, \varepsilon > 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|J_\delta Z(t) - J_\varepsilon Z(t); L^2(\Omega)\|^2 = 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(J_\delta Z(t) - J_\varepsilon Z(t)\big), J_\delta Z(t) - J_\varepsilon Z(t)\right).$$

上式从 s 到 t 积分, 则对所有的 $0 \leqslant s, t \leqslant T$ 成立

$$\begin{aligned}
&\|J_\delta Z(t) - J_\varepsilon Z(t); L^2(\Omega)\|^2 \\
=&\|J_\delta Z(s) - J_\varepsilon Z(s); L^2(\Omega)\|^2 \\
&+ 2\int_s^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big(J_\delta Z(\tau) - J_\varepsilon Z(\tau)\big), J_\delta Z(\tau) - J_\varepsilon Z(\tau)\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

固定任意点 $s \in (0, T)$, 在 $L^2(\Omega)$ 中当 $\delta \to 0$ 时,

$$J_\delta Z(s) \to Z(s).$$

因此由式 (5.4.4) 并注意到

$$|(Z_t, Z(t))| \leqslant \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t); H^{-1}(\Omega)\right\| \|Z(t); H_0^1(\Omega)\|,$$

推出

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\delta,\varepsilon\to 0}} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|J_\delta Z(t) - J_\varepsilon Z(t); L^2(\Omega)\|^2 \\
\leqslant &\lim_{\delta,\varepsilon\to 0}\int_0^T \left[\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(J_\delta Z(\tau) - J_\varepsilon Z(\tau)); H^{-1}(\Omega)\right\|^2\right. \\
&\left. + \|J_\delta Z(\tau) - J_\varepsilon Z(\tau); H_0^1(\Omega)\|^2\right]\mathrm{d}\tau \\
=&0.
\end{aligned}$$

从上式看出, 光滑函数集合 $\{J_\delta Z(t)\}_{0<\delta\leqslant 1}$ 是 $C([0, T]; L^2(\Omega))$ 中的基本序列, 所以它在 $C([0, T]; L^2(\Omega))$ 中收敛到极限函数 $v \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. 因为对于几乎处处的 t, 当 $\delta \to 0$ 时, $J_\delta Z(t) \to Z(t)$, 所以我们得到几乎处处 $Z(t) = v(t)$. 结论 (1) 得证.

下面证 (2). 类似于式 (5.4.4) 有

$$\|J_\delta Z(t); L^2(\Omega)\|^2 = \|J_\delta Z(s); L^2(\Omega)\|^2 + 2\int_s^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}J_\delta Z(\tau), J_\delta Z(\tau)\right)\mathrm{d}\tau,$$

和在 (1) 中认为 $Z(t)$ 与 $v(t)$ 是一致的, 所以对于所有的 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, 有

$$\|Z(t); L^2(\Omega)\|^2 = \|Z(s); L^2(\Omega)\|^2 + 2\int_s^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Z(\tau), Z(\tau)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{5.4.5}$$

由式 (5.4.5) 和 Lebesgue 可积函数的不定积分是绝对连续函数, 可知 (2) 的结论成立.

最后证 (3). 对 s 积分式 (5.4.5) 得

$$\int_0^T \|Z(t);L^2(\Omega)\|^2\mathrm{d}s=\int_0^T \|Z(s);L^2(\Omega)\|^2\mathrm{d}s+2\int_0^T\int_s^t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Z(\tau),Z(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

于是

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z(t);L^2(\Omega)\|\leqslant C_3(T)\left(\|Z\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))}+\|Z_t\|_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))}\right),$$

其中 $C_3(T)$ 常数只依赖于 T. □

定理 5.4.3 设 Ω 是有界开集, 其边界 $\partial\Omega$ 是光滑的, m 是非负整数. 又设 $Z\in L^2((0,T);H^{m+2}(\Omega))$ 和 $Z_t\in L^2((0,T);H^m(\Omega))$, 则

(1) (可能在一零测集重新定义之后)

$$Z\in C([0,T];H^{m+1}(\Omega)).$$

(2) 成立估计

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z(\cdot,t);H^{m+1}(\Omega)\|\leqslant&C_4(T,\Omega,m)(\|Z;L^2((0,T);H^{m+2}(\Omega))\|\\&+\|Z_t;L^2((0,T);H^m(\Omega))\|),\end{aligned}\tag{5.4.6}$$

其中常数 $C_4(T,\Omega,m)$ 仅依赖于 T,Ω 和 m.

证明 (1) 首先假定 $m=0$, 此时

$$Z\in L^2((0,T);H^2(\Omega)),\quad Z_t\in L^2((0,T);L^2(\Omega)).$$

选一有界开集 $G\supset\supset\Omega$, 然后根据注 4.6.1 作一对应的延拓 $\overline{Z}=LZ$, 由于定理 5.4.2 中的估计 (3) 对于适当的常数 $C_5(\Omega,G)$ 有

$$\|\overline{Z}\|_{L^2((0,T);H^2(G))}\leqslant C_5(\Omega,G)\|Z\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))}\tag{5.4.7}$$

和

$$\overline{Z}\in L^2((0,T);H^2(G)).$$

另外, $\overline{Z}_t\in L^2((0,T);L^2(G))$ 和成立估计

$$\|\overline{Z}_t\|_{L^2((0,T);L^2(G))}\leqslant C_6(\Omega,G)\|Z_t\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}.\tag{5.4.8}$$

式 (5.4.8) 的推出, 用到关于 t 的差商, 定理 3.8.1 和 L 是从 $L^2(\Omega)$ 到 $L^2(G)$ 的线性算子.

现在暂时假定 $\overline{Z}$ 是光滑的. 由于延拓 $\overline{Z}=LZ$ 在 G 内有支集, 因此对 x 分部积分时, 不会出现边界项, 于是

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_G\left|D\overline{Z}(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\right)\right|=2\left|\int_G D\overline{Z}(x,t)\cdot D\overline{Z}_t(x,t)\mathrm{d}x\right|=2\left|\int_G \Delta\overline{Z}(x,t)\overline{Z}_t(x,t)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant C_7\left(\|\overline{Z}(\cdot,t)\|^2_{H^2(G)}+\left\|\overline{Z}_t(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(G)}\right).$$

注意到式 (5.4.6) 和式 (5.4.7), 积分上式可得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C_8\left(\|Z(\cdot,t)\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))}+\|Z_t(\cdot,t)\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}\right). \quad (5.4.9)$$

如果 $Z(x,t)$ 不是光滑的, 利用 $J_\delta Z=(j_\delta*Z)(t)$, 类似前面的证明, 可推出 $Z\in C([0,T];H^1(\Omega))$.

(2) 其次考虑 $m\geqslant 1$ 的情形. 令 α 是一 N 重指数 ($|\alpha|\leqslant m$) 和置 $v=D^\alpha Z$, 则

$$v\in L^2((0,T);H^2(\Omega)),\quad v_t\in L^2((0,T);L^2(\Omega)).$$

我们在式 (5.4.9) 中以 v 替代 Z, 并对所有的 $|\alpha|\leqslant m$ 求和, 立得式 (5.4.6). □

5.5 Aubin 引 理

本节证明对研究非线性发展方程起着非常重要作用的 Aubin 引理. 为此, 先引入一个涉及弱紧性的泛函分析引理, 证明另一个引理, 再证 Aubin 引理.

引理 5.5.1 自反的 Banach 空间中任意有界集是弱紧的, 即有界集中的任意序列必有一个弱收敛的子序列 (关于 $L^p(\Omega)$ 空间的结论见定理 2.3.4).

引理 5.5.2 设 B_0, B, B_1 是三个 Banach 空间, $B_0\hookrightarrow B\hookrightarrow B_1$, 且 $B_0\hookrightarrow\hookrightarrow B$, 则对于任意的 $\eta>0$, 存在一个仅依赖于 η 的正常数 $C(\eta)$, 使得对于任意的 $v\in B_0$

$$\|v\|_B\leqslant\eta\|v\|_{B_0}+C(\eta)\|v\|_{B_1}, \quad (5.5.1)$$

其中 $\|v\|_B$ 表示 v 在空间 B 中的范数.

证明 反证法. 设式 (5.5.1) 不成立, 则存在一正常数 η_0 和序列 $\{v_k\}_{k=1}^\infty\subset B_0$, 使得对于所有的 $k\in\mathbb{N}$ 成立

$$\|v_k\|_B>\eta_0\|v_k\|_{B_0}+k\|v_k\|_{B_1}. \quad (5.5.2)$$

令

$$f_k=\frac{v_k}{\|v_k\|_{B_0}}, \quad (5.5.3)$$

则 $\|f_k\|_{B_0}=1$, 且

$$\|f_k\|_B > \eta_0 + k\|f_k\|_{B_1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.5.4}$$

此外, 由于 $B_0 \hookrightarrow B$, 所以存在一不依赖于 f_k 的正常数 C_0, 使得

$$\|f_k\|_B \leqslant C_0\|f_k\|_{B_0} = C_0. \tag{5.5.5}$$

综合式 (5.5.4) 和式 (5.5.5) 推出, 当 $k \to \infty$ 时,

$$\|f_k\|_{B_1} < \frac{C_0}{k} \to 0, \tag{5.5.6}$$

即当 $k \to \infty$ 时, 在 B_1 中 $f_k \to 0$. 又由 $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$, 和 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 B_0 中有界, 所以存在 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得当 $n_k \to \infty$ 时, 在 B 中 $f_{n_k} \to f_0$. 而 $B \hookrightarrow B_1$, 因此当 $n_k \to \infty$ 时, 在 B_1 中 $f_{n_k} \to f_0$. 由式 (5.5.6) 知 $f_0 = 0$, 即当 $n_k \to 0$ 时, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 B 中收敛于零. 这与

$$\|f_{n_k}\|_B > \eta_0 + n_k\|f_{n_k}\|_{B_1} > \eta_0$$

矛盾. □

定理 5.5.1 (Aubin 引理 [42]) 设 B_0, B, B_1 是三个 Banach 空间, 其中 B_0, B_1 是自反的. 再设 $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, 且 $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$. 对于任给的 $1 < p_0, p_1 < \infty$, 令

$$W = \{v | v \in L^{p_0}([0,T];B_0), v_t \in L^{p_1}([0,T];B_1)\}, \tag{5.5.7}$$

则 W 紧嵌入 $L^{p_0}([0,T];B)$.

证明 为了证明定理的结论成立, 只需证明, 如果 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W$, 且

$$\|v_n\|_W = \left(\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B_0)}^2 + \|v_{nt}\|_{L^{p_1}([0,T];B_1)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M,$$

其中 $M > 0$ 为一常数, 则 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中必存在在 $L^{p_0}([0,T];B)$ 中强收敛的子序列. 因为 W 是自反的 Banach 空间, 根据引理 5.5.1 存在子序列, 仍记为 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得在 W 中弱收敛于 $v \in W$. 于是, 只需证明在 $L^{p_0}([0,T];B)$ 中 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于 v 即可.

为了讨论简单起见, 我们考虑差 $v_n - v$, 但仍记为 v_n. 于是问题变成证明 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 W 中弱收敛于 θ (零元素) 推出 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^{p_0}([0,T];B)$ 中强收敛于 θ.

由引理 5.5.2 知, 对于任意的 $\eta > 0$, 存在 $C(\eta) > 0$, 使得

$$\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B)} \leqslant \eta\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B_0)} + C(\eta)\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B_1)}. \tag{5.5.8}$$

对于任意的 $\varepsilon>0$, 取 $\eta=\dfrac{\varepsilon}{2M}$, 则由式 (5.5.8) 有

$$\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+C(\varepsilon)\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B_1)}. \tag{5.5.9}$$

所以若能证明当 $n\to\infty$ 时, $\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B_1)}\to 0$, 则定理得证. 令

$$p=\min(p_0,p_1).$$

由 $v_n\in L^p([0,T];B_1)$ 和 $v_{nt}\in L^p([0,T];B_1)$ 根据定理 5.4.1 知 $v_n\in C([0,T];B_1)$.

为了证明当 $n\to\infty$ 时,

$$\|v_n\|_{L^{p_0}([0,T];B_1)}=\left[\int_0^T\|v_n\|_{B_1}^{p_0}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p_0}}\to 0,$$

根据定理 2.1.6(Lebesgue 控制收敛定理) 只需证明 $\forall t\in[0,T]$, 当 $n\to\infty$ 时, $\|v_n(\cdot,t)\|_{B_1}\to 0$. 由于 t 不起任何特殊作用, 下面仅证明当 $n\to\infty$ 时, $\|v_n(\cdot,0)\|_{B_1}\to 0$, 但是对于 $t\in[0,T]$, 利用完全类似的方法可以证明.

令 $\varphi(t)\in C^1[0,T]$ 且 $\varphi(0)=-1$, $\varphi(T)=0$, 并记

$$w_n(x,t)=v_n(x,\lambda t),\quad \lambda\in(0,1),$$

于是

$$\begin{aligned}
v_n(x,0)=w_n(x,0)&=\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)w_n(x,t))\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T w_n(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_0^T\varphi(t)\frac{\partial w_n(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t\\
&=\alpha_n+\beta_n,
\end{aligned}\tag{5.5.10}$$

其中

$$\alpha_n=\int_0^T w_n(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad \beta_n=\int_0^T\varphi(t)\frac{\partial w_n(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t=\int_0^T\varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}v_n(x,\lambda t)\mathrm{d}t.$$

利用 Hölder 不等式和取 λ 充分小, 得

$$\begin{aligned}
\|\beta_n(\cdot,t)\|_{B_1}&\leqslant\|\varphi\|_{C[0,T]}\int_0^T\left\|\frac{\partial}{\partial t}v_n(\cdot,\lambda t)\right\|_{B_1}\mathrm{d}t\\
&\leqslant\|\varphi\|_{C[0,T]}\int_0^{\lambda T}\left\|\frac{\partial}{\partial\xi}v_n(\cdot,\xi)\right\|_{B_1}\mathrm{d}\xi\\
&\leqslant\|\varphi\|_{C[0,T]}\left(\int_0^{\lambda T}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p_1-1}{p_1}}\left(\int_0^{\lambda T}\left\|\frac{\partial}{\partial\xi}v_n(\cdot,\xi)\right\|_{B_1}^{p_1}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\leqslant C_1(T)M\lambda^{1-\frac{1}{p_1}}<\frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}\tag{5.5.11}$$

其中 $C_1(T)$ 是依赖于 T 的正常数.

此外, 由 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 W 中弱收敛于 θ, 推出 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^{p_0}([0,T];B_0)$ 中弱收敛于 θ, 故 α_n 在 B_0 中弱收敛于 θ. 因为 $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B_1$, 所以当 $n \to \infty$ 时,

$$\|\alpha_n\|_{B_1} = \left\| \int_0^T w_n(x,t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)\mathrm{d}t \right\|_{B_1} \to 0. \tag{5.5.12}$$

综合式 (5.5.10)~ 式 (5.5.12) 知, 当 $n \to \infty$ 时, $\|v_n(\cdot,0)\|_{B_1} \to 0$. □

本章主要参考了文献 [2], [21], [43].

第 6 章　索伯列夫空间在偏微分方程中的应用 (I)

索伯列夫空间的产生为研究偏微分方程的近代理论开辟了广阔的前景. 本章主要涉及偏微分方程的初边值问题和边值问题. 作为例子初步介绍整数阶索伯列夫空间在偏微分方程中的应用：讨论一类非线性抛物型方程初边值问题的整体广义解和整体古典解的存在性、唯一性、正则性和解的渐近性质; 证明一般线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题存在唯一的弱解; 研究具阻尼非线性双曲型方程的初边值问题和广义立方双色散方程的初边值问题解的爆破现象, 研究一类四阶非线性发展方程初边值问题解的渐近性质以及讨论广义 IMBq 型方程组的初边值问题.

6.1　预 备 知 识

6.1.1　Gronwall 不等式 (微分形式)

定理 6.1.1　(1) 设 $w(t)$ 是一 $[0,T]$ 上的非负、绝对连续, 且对几乎处处的 t 满足

$$\dot{w}(t) \leqslant \phi(t)w(t) + \psi(t), \tag{6.1.1}$$

其中 $\dot{w} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$, $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数, 则对所有的 $0 \leqslant t \leqslant T$ 成立

$$w(t) \leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t \phi(\tau)\mathrm{d}\tau}\left[w(0) + \int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right]. \tag{6.1.2}$$

(2) 特别地, 如果在 $[0,T]$ 上

$$\dot{w}(t) \leqslant \phi(t)w(t) \quad 和 \quad w(0) = 0,$$

那么在 $[0,T]$ 上

$$w(t) \equiv 0. \tag{6.1.3}$$

证明　从式 (6.1.1) 可知, 对于几乎处处的 $0 \leqslant \tau \leqslant T$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(w(\tau)\mathrm{e}^{-\int_0^\tau \phi(s)\mathrm{d}s}\right) &= \mathrm{e}^{-\int_0^\tau \phi(s)\mathrm{d}s}(\dot{w}(\tau) - \phi(\tau)w(\tau)) \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^\tau \phi(s)\mathrm{d}s}\psi(\tau).\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

所以对于每一 $0 \leqslant t \leqslant T$, 由式 (6.1.4) 推得

$$w(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s} \leqslant w(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^\tau \phi(s)\mathrm{d}s}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant w(0) + \int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{6.1.5}$$

不难从式 (6.1.5) 看出不等式 (6.1.2) 成立. 式 (6.1.3) 成立是显然的. □

6.1.2 Gronwall 不等式 (积分形式)

定理 6.1.2 (1) 设 $w(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数, 若几乎处处满足

$$w(t) \leqslant C_1 \int_0^t w(\tau)\mathrm{d}\tau + C_2, \tag{6.1.6}$$

其中 C_1 和 C_2 是非负常数, 则对于几乎处处的 $0 \leqslant t \leqslant T$ 成立

$$w(t) \leqslant C_2 \mathrm{e}^{C_1 t}. \tag{6.1.7}$$

(2) 特别地, 如果对于几乎处处的 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有

$$w(t) \leqslant C_1 \int_0^t w(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{6.1.8}$$

那么几乎处处成立

$$w(t) = 0.$$

证明 若 $C_1 = 0$, 式 (6.1.7) 显然成立. 设 $C_1 > 0$, 又设

$$g(t) = \int_0^t w(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则 $g(t)$ 在 $[0,T]$ 上绝对连续且几乎处处 $\dot{g}(t) = w(t)$, 所以几乎处处成立

$$\dot{g}(t) \leqslant C_1 g(t) + C_2.$$

于是几乎处处有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-C_1 t} g(t)) \leqslant C_2 \mathrm{e}^{-C_1 t}.$$

上式两边从 0 到 t 积分, 由 Newton-Leibniz 公式得

$$g(t) \leqslant \frac{C_2}{C_1}(\mathrm{e}^{C_1 t} - 1).$$

将上式代入式 (6.1.6) 得式 (6.1.7). 若式 (6.1.8) 成立, 则显然 $w(t) = 0$. □

6.1.3 Jensen 不等式

定理 6.1.3 设 $\phi(u)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的 (下) 凸函数, 定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta,$$

非负函数 $p(x)$ 满足

$$Q = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0,$$

则在下述积分存在的情况下, 有

$$\phi\left(\frac{1}{Q}\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{Q}\int_a^b \phi[f(x)]p(x)\mathrm{d}x. \tag{6.1.9}$$

证明 令 $\gamma = \dfrac{1}{Q}\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x$, 显然 $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. 首先, 设 $\alpha < \gamma < \beta$, 并记过点 $(\gamma, \phi(\gamma))$ 的支撑直线的斜率为 k, 则由 ϕ 的凸性可知

$$\phi(u) - \phi(\gamma) \geqslant k(u - \gamma), \qquad \alpha \leqslant u \leqslant \beta.$$

现在用 $f(x)$ 代替 u, 且在上式两端乘以函数 $p(x)$, 再对 x 在 $[a, b]$ 上积分, 可知

$$\int_a^b \phi[f(x)]p(x)\mathrm{d}x - \phi(\gamma)\int_a^b p(x)\mathrm{d}x \geqslant k\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x - k\gamma\int_a^b p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

由此推出

$$\phi(\gamma) \leqslant \frac{1}{Q}\int_a^b \phi[f(x)]p(x)\mathrm{d}x.$$

其次, 如果 $\gamma = \beta$, 由 γ 的定义成立

$$\int_a^b (f(x) - \beta)p(x)\mathrm{d}x = 0,$$

所以在 $p(x) > 0$ 的一切 x 上有 $f(x) = \beta$. 从而不等式 (6.1.9) 显然成立. $\gamma = \alpha$ 的情形类推. □

注 6.1.1 如果 ϕ 是上凸函数, 则不等号反向.

6.1.4 Leray-Schauder 不动点定理

我们只给出此定理的表述, 不加证明.

定理 6.1.4 (Leray-Schauder 不动点定理[44]) 设 X 是一 Banach 空间, 考虑变换

$$y = L(x, \lambda),$$

其中 $x, y \in X$, λ 是一实参数, 它在有界区间中变化, 设其为 $a \leqslant \lambda \leqslant b$. 假定

(1) $L(x, \lambda)$ 对所有的 $x \in X$ 和 $a \leqslant \lambda \leqslant b$ 都有定义;

(2) 对于任意固定的 λ, $L(x, \lambda)$ 在 X 中是连续的, 即对于任意 $x^\circ \in X$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|x - x^\circ\|_X < \delta$ 时, 有

$$\|L(x, \lambda) - L(x^\circ, \lambda)\|_X < \varepsilon;$$

(3) 对于 X 的有界集中的 $x, L(x,\lambda)$ 关于 λ 是一致连续的, 即对于任意有界集 $X_0 \subset X$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in X_0$, $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$, $a \leqslant \lambda_1, \lambda_2 \leqslant b$ 时, 有

$$\|L(x,\lambda_1) - L(x,\lambda_2)\|_X < \varepsilon;$$

(4) 对于任意固定的 λ, $L(x,\lambda)$ 是紧变换, 即它把 X 的有界子集映射到 X 的紧子集中;

(5) 存在一个 (有限) 常数 M, 使得 $x - L(x,\lambda) = 0(x \in X, \lambda \in [a,b])$ 的所有可能的解 x 满足 $\|x\|_X \leqslant M$;

(6) 方程 $x - L(x,a) = 0$ 在 X 中有一解, 则方程

$$x - L(x,\lambda) = 0$$

的解存在.

6.2 广义 Ginzburg-Landau 模型方程的初边值问题

在文献 [45] 中研究人口问题中的增长和弥散时, 提出了如下的模型方程

$$u_t = -a_1 u_{xxxx} + a_2 u_{xx} + a(u^3)_{xx} + f(u), \tag{6.2.1}$$

其中 $a_1, a > 0$ 和 $a_2 \neq 0$ 是常数, 依赖于空间变量 $x \in \mathbb{R}$ 和时间 $t \in \mathbb{R}_+ (= [0,\infty))$ 的未知函数 $u(x,t)$ 表示人口密度, $f(u)$ 是给定的非线性函数, 表示动力或反应项和下标 x 和 t 分别表示对 x 和对 t 求偏导数, $u_{xxxx} = \dfrac{\partial^4}{\partial^4 x} u$. 方程 (6.2.1) 是一维四阶非线性抛物型方程.

下面先讨论较方程 (6.2.1) 更广的一维方程[46]

$$u_t = -A(t) u_{x^4} + B(t) u_{xx} + g(u)_{xx} + f(u)_x + h(u_x)_x + G(u), \tag{6.2.2}$$

其中 $u(x,t)$ 是未知函数, $A(t)$ 和 $B(t)$ 是定义在 $[0,T](T > 0)$ 上的已知函数, $g(s)$, $f(s)$, $h(s)$ 和 $G(s)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的已知非线性函数.

我们将研究方程 (6.2.2) 的初边值问题

$$u(-l,t) = u(l,t) = 0, \quad u_{x^2}(-l,t) = u_{x^2}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6.2.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega} \triangleq [-l,l], \tag{6.2.4}$$

其中 $l > 0$ 为常数, $\varphi(x)$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上的给定的初值函数, 且满足边界条件.

将利用 Galerkin 方法, 积分估计和紧性定理证明初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 整体广义解和整体古典解的存在性、唯一性、正则性和解的渐近性质.

6.2.1 初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 整体解的存在性与唯一性

令 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是由下列常微分方程特征值问题

$$y'' = \lambda y,$$
$$y(-l) = y(l) = 0$$

对应于特征值 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ 的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 空间的标准正交基, 其中 $y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)$. 问题 (6.2.2)-(6.2.4) 的 Galerkin 近似解可以表示为

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_{N,n}(t) y_n(x),$$

其中 $\alpha_{N,n}(t)(n=1,2,\cdots,N)$ 是待定系数和 N 是自然数 (在这一章 N 不代表 $\mathbb{R}^N$ 的维数).

假定初值函数 $\varphi(x)$ 可表为

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n y_n(x),$$

其中 $\delta_n(n=1,2,\cdots)$ 是常数. 将近似解 $u_N(x,t)$ 和初值函数的近似

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n y_n(x)$$

代入方程 (6.2.2) 和初值条件 (6.2.4) 中, 可得近似解 $u_N(x,t)$ 满足下列方程

$$u_{Nt} = -A(t)u_{Nx^4} + B(t)u_{Nx^2} + g(u_N)_{x^2} + f(u_N)_x + h(u_{Nx})_x + G(u_N) \tag{6.2.5}$$

和初值条件

$$u_N(x,0) = \varphi_N(x). \tag{6.2.6}$$

方程 (6.2.5) 和初值条件 (6.2.6) 两端分别乘以 $y_s(x)$, 并在 Ω 上积分, 得

$$\begin{aligned}&(u_{Nt}, y_s) + (A(t)u_{Nx^4}, y_s) - (B(t)u_{Nx^2}, y_s)\\ =&(g(u_N)_{xx} + f(u_N)_x + h(u_{Nx})_x + G(u_N), y_s)\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

和

$$(u_N(x,0), y_s) = (\varphi_N(x), y_s), \tag{6.2.8}$$

其中 $s = 1,2,\cdots,N$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 的内积.

引理 6.2.1 设下列条件成立:

(1) $A(t)$ 和 $B(t)$ 在 $[0,T]$ 上连续且存在常数 $a_0>0, b>0$, 使得在 $[0,T]$ 上 $A(t)\geqslant a_0$ 和 $B(t)\geqslant -b$;

(2) $g\in C^2(\mathbb{R})$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $g'(s)\geqslant 0$ 且 $|g'(s)|\leqslant K_1|s|^{\xi+1}$ 和 $|g''(s)|\leqslant K_1|s|^{\xi}$, 其中 $0<\xi<3$, $K_1>0$ 是一常数;

(3) $f\in C^1(\mathbb{R})$, $F(u)=\displaystyle\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 且 $|f(s)|\leqslant K_2|s|^{\eta+1}$ 和 $|f'(s)|\leqslant K_2|s|^{\eta}$, 其中 $0<\eta<6$ 和 $K_2>0$ 是常数;

(4) $h\in C^1(\mathbb{R})$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $h'(s)\geqslant 0$ 且 $|h'(s)|\leqslant K_3|s|^{\mu}$, 其中 $0<\mu<\dfrac{4}{3}$ 和 $K_3>0$ 是常数;

(5) $G\in C^1(\mathbb{R})$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $G'(s)\leqslant\gamma$ 且 $|G'(s)|\leqslant K_4|s|^{\zeta}$, 其中 $0<\zeta<8$, $K_4>0$ 和 γ 是常数;

(6) $\varphi\in H^2(\Omega)$,

则对于任意的 N 初值问题 (6.2.7), (6.2.8) 在 $[0,T]$ 上存在解 $\alpha_{N,s}(t)\in C^1[0,T](s=1,2,\cdots,N)$ 和问题 (6.2.2)-(6.2.4) 的 Galerkin 近似解 $u_N(x,t)$ 有估计

$$\|u_N(\cdot,t)\|^2_{H^2(\Omega)}+\|u_N\|^2_{H^4(Q_t)}\leqslant C(T),\quad t\in[0,T],$$

其中 $Q_t\triangleq\Omega\times[0,t]$ 和常数 $C(T)$ 依赖于 T, 而不依赖于 N.

注 6.2.1 条件 (5) 中的 $\forall s\in\mathbb{R}$, $G'(s)\leqslant\gamma$ 表示 $G'(s)$ 上方有界. $G'(s)$ 上方有界条件是相当广泛的. 通常所考虑的 $G(u)=-|u|^pu$(只要 $p>0$) 及 $G(u)=-\sin u$ 都满足此条件; $G(u)$ 也可以是形如 $a_0u^{2m+1}+a_1u^{2m}+\cdots+a_{2m+1}(a_0<0, m$ 为正整数) 的多项式.

引理 6.2.1 的证明 为了熟悉 Leray-Schauder 不动点定理的用法, 我们应用 Leray-Schauder 不动点定理证明常微分方程组初值问题 (6.2.7), (6.2.8) 解的存在性, 即确定系数 $\alpha_{N,n}(t)(n=1,2,\cdots,N)$. 我们考虑下面的带参数 θ 的常微分方程组的初值问题

$$\begin{aligned}(u_{Nt},y_s)+(A(t)u_{Nx^4},y_s)=&\theta(B(t)u_{Nx^2}+g(u_N)_{x^2}+f(u_N)_x\\&+h(u_{Nx})_x+G(u_N),y_s),\end{aligned}\tag{6.2.9}$$

$$\alpha_{N,s}(0)=\theta(\varphi_N,y_s),\tag{6.2.10}$$

其中 $s=1,2,\cdots,N$ 和 $0\leqslant\theta\leqslant 1$. 下面作先验估计.

方程组 (6.2.9) 两端乘以 $2\alpha_{N,s}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和, 利用特征函数 $y_n(x)$ 在边界的性质: $y_n^{(2k)}(l)=y_n^{(2k)}(-l)=0$ $(k=0,1,2,\cdots$ 和 $(2k)$ 表示求导数的阶

数) 对 x 分部积分, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+2(A(t)u_{Nx^2},u_{Nx^2})+2\theta(B(t)u_{Nx},u_{Nx})$$
$$=2\theta(g(u_N)_{x^2}+f(u_N)_x+h(u_{Nx})_x+G(u_N),u_N).$$

上式对 t 在 $(0,t)$ 上积分, 可知

$$\begin{aligned}&\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+2[A(t)u_{Nx^2},u_{Nx^2}]+2\theta[B(t)u_{Nx},u_{Nx}]\\ \leqslant&2\theta[g(u_N)_{x^2}+f(u_N)_x+h(u_{Nx})_x+G(u_N),u_N]+\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}\tag{6.2.11}$$

其中 $[u,v]=\int_0^t(u,v)\mathrm{d}\tau=\int_{Q_t}uv\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$, $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2=(u,u)$.

我们有

$$\begin{aligned}\theta(g(u_N)_{x^2},u_N)&=\theta\int_{-l}^{l}g(u_N)_{x^2}u_N\mathrm{d}x=-\theta\int_{-l}^{l}g(u_N)_xu_{Nx}\mathrm{d}x\\&=-\theta\int_{-l}^{l}g'(u_N)u_{Nx}^2\mathrm{d}x\leqslant 0;\end{aligned}\tag{6.2.12}$$

$$\theta(f(u_N)_x,u_N)=-\theta(f(u_N),u_{Nx})=-\theta\int_{-l}^{l}\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x=0;\tag{6.2.13}$$

$$\begin{aligned}\theta(h(u_{Nx})_x,u_N)&=-\theta\int_{-l}^{l}h(u_{Nx})u_{Nx}\mathrm{d}x\\&=-\theta\int_{-l}^{l}(h(u_{Nx})-h(0))u_{Nx}\mathrm{d}x-\theta\int_{-l}^{l}h(0)u_{Nx}\mathrm{d}x\\&\leqslant-\theta\int_{-l}^{l}h'(\theta_1u_{Nx})u_{Nx}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}\tag{6.2.14}$$

其中 $0<\theta_1<1$;

$$\begin{aligned}\theta(G(u_N),u_N)&=\theta(G(u_N)-G(0),u_N)+\theta(G(0),u_N)\\&=\theta(G'(\theta_2u_N)u_N,u_N)+\theta(G(0),u_N)\\&\leqslant\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|G(0)\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}\tag{6.2.15}$$

其中 $0<\theta_2<1$.

将式 (6.2.12)~ 式 (6.2.15) 代入式 (6.2.11), 可见

$$\begin{aligned}&\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+2a_0\|u_{Nx^2}\|_{L^2(Q_t)}^2\\ \leqslant&(2b+1)\|u_{Nx}\|_{L^2(Q_t)}^2+(2\gamma+1)\|u_N\|_{L^2(Q_t)}^2\\&+\|G(0)\|_{L^2(Q_t)}^2+\|h(0)\|_{L^2(Q_t)}^2+\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}\tag{6.2.16}$$

其中 $\|u\|_{L^2(Q_t)}^2=[u,u]$. 利用内插不等式

$$\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant K\varepsilon\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}+K\varepsilon^{-1}\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)},$$

并取 ε 充分小, 使得 $2a_0-2K^2\varepsilon^2(2b+1)>0$, 则由式 (6.2.16) 推得

$$\begin{aligned}&\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{Nx^2}\|_{L^2(Q_t)}^2\\ \leqslant&C_1\|u_N\|_{L^2(Q_t)}^2+C_2\{\|h(0)\|_{L^2(Q_t)}^2+\|G(0)\|_{L^2(Q_t)}^2+\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2\},\end{aligned}\tag{6.2.17}$$

其中 $C_1,C_2>0$ 是常数, 与 N 无关.

对式 (6.2.17) 应用积分形式的 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{Nx^2}\|_{L^2(Q_t)}^2\leqslant&C_2\mathrm{e}^{C_1T}\{\|h(0)\|_{L^2(Q_T)}^2+\|G(0)\|_{L^2(Q_T)}^2+\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2\}\\ =&C_3(T),\quad\forall t\in[0,T],\end{aligned}\tag{6.2.18}$$

其中 $C_3(T)$ 是一依赖于 T 而不依赖于 N 的常数.

方程组 (6.2.9) 两端乘以 $\lambda_s^2\alpha_{N,s}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和, 得

$$\begin{aligned}&(u_{Nt},u_{Nx^4})+(A(t)u_{Nx^4},u_{Nx^4})-\theta(B(t)u_{Nx^2},u_{Nx^4})\\ =&\theta(g(u_N)_{x^2}+f(u_N)_x+h(u_{Nx})_x+G(u_N),u_{Nx^4}).\end{aligned}\tag{6.2.19}$$

下式对 x 进行分部积分, 有

$$(u_{Nt},u_{Nx^4})=(u_{Nx^2t},u_{Nx^2})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2.\tag{6.2.20}$$

利用 Hölder 不等式和对 $g(s)$ 的假定导出

$$\begin{aligned}|\theta(g(u_N)_{x^2},u_{Nx^4})|=&|\theta(g'(u_N)u_{Nx^2}+g''(u_N)u_{Nx}^2,u_{Nx^4})|\\ \leqslant&\|g'(u_N(\cdot,t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\&+\|g''(u_N(\cdot,t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}^2\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&K_1\|u_N(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\xi+1}\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\&+K_1\|u_N(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\xi}\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}^2\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{6.2.21}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理可见

$$\|u_N(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M_1\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{7}{8}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{8}}, \tag{6.2.22}$$

$$\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)} \leqslant M_2\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{11}{16}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{5}{16}}, \tag{6.2.23}$$

$$\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M_3\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \tag{6.2.24}$$

其中 $M_i > 0(i=1,2,3)$ 是常数. 将式 (6.2.22)~ 式 (6.2.24) 代入式 (6.2.21), 应用估计式 (6.2.18) 和 Young 不等式, 得

$$\begin{aligned}|\theta(g(u_N)_{x^2},u_{Nx^4})| \leqslant& C_4(T)\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{\xi+1}{8}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+C_5(T)\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{\xi}{8}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{5}{8}}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant& \frac{a_0}{10}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+C_6(T).\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 插值定理推出

$$\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M_4\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{4}}, \tag{6.2.26}$$

$$\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M_5\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{8}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{3}{8}}, \tag{6.2.27}$$

其中 $M_i > 0(i=4,5)$ 为常数.

下面进行其他项的估计, 有

$$\begin{aligned}|\theta(f(u_N)_x,u_{Nx^4})| =&|\theta(f'(u_N)u_{Nx},u_{Nx^4})|\\ \leqslant&K_2\|u_N(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\eta}\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&K_2M_1^{\eta}\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{7\eta}{8}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{\eta}{8}}\\ &\times M_4\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&C_7(T)\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{\eta}{8}+\frac{1}{4}}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&\frac{a_0}{10}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+C_8(T).\end{aligned} \tag{6.2.28}$$

$$\begin{aligned}|\theta(h(u_{Nx})_x,u_{Nx^4})| =&|\theta(h'(u_{Nx})u_{Nx^2},u_{Nx^4})|\\ \leqslant&K_3\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\mu}\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&K_3M_5^{\mu}\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5\mu}{8}}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{3\mu}{8}}M_3\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\\ &\times\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&C_9(T)\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{3\mu+4}{8}}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&\frac{a_0}{10}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{10}(T).\end{aligned} \tag{6.2.29}$$

$$\begin{aligned}
|\theta(G(u_N),u_{Nx^4})| &\leqslant |\theta(G(u_N)-G(0),u_{Nx^4})|+|\theta(G(0),u_{Nx^4})| \\
&\leqslant \left|\int_\Omega \theta G'(\theta_3 u_N)u_N u_{Nx^4}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\Omega \theta G(0)u_{Nx^4}\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \|G'(\theta_3 u_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +\frac{\varepsilon}{2}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|G(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant K_4 M_1^\zeta \|u_N(\cdot,t)\|^{\frac{7\zeta}{8}}_{L^2(\Omega)}\|u_N(\cdot,t)\|^{\frac{\zeta}{8}}_{H^4(\Omega)} \\
&\quad \times \|u_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +\frac{\varepsilon}{2}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|G(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{11}(T)\|u_N(\cdot,t)\|^{\frac{\zeta}{8}}_{H^4(\Omega)}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +\frac{\varepsilon}{2}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|G(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{a_0}{10}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+C_{12}(T),
\end{aligned} \tag{6.2.30}$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{a_0}{10}$ 和 $0<\theta_3<1$. 由 Gagliardo-Nirenberg 插定值理, 得

$$\begin{aligned}
2b\|u_{Nx^3}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant 2bC_{13}\|u_N(\cdot,t)\|^{\frac12}_{L^2(\Omega)}\|u_N(\cdot,t)\|^{\frac32}_{H^4(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{a_0}{10}\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+C_{14}(T).
\end{aligned} \tag{6.2.31}$$

将式 (6.2.20), 式 (6.2.25), 式 (6.2.28)～ 式 (6.2.31) 代入式 (6.2.19) 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+a_0\|u_{Nx^4}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{15}(T).$$

上式两端对 t 积分, 得

$$\|u_{Nx^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{Nx^4}\|^2_{L^2(Q_t)}\leqslant C_{16}(T),\quad \forall t\in[0,T]. \tag{6.2.32}$$

由式 (6.2.18) 和式 (6.2.32) 推得

$$\|u_N(\cdot,t)\|^2_{H^2(\Omega)}+\|u_N\|^2_{H^4(Q_t)}\leqslant C(T),\quad \forall t\in[0,T]. \tag{6.2.33}$$

有了上面的先验估计, 下面应用 Leary-Schauder 不动点定理, 证明 $\alpha_{N,s}(t)(s=1,2,\cdots,N)$ 在 $[0,T]$ 上的存在性.

令 E 表示基本函数空间 $C[0,T]$. 考虑初值问题

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{N,s}(t) &= -A(t)\lambda_s^2\alpha_{N,s}(t)+\theta(B(t)v_{Nx^2}+g(v_N)_{x^2} \\
&\quad +f(v_N)_x+h(v_{Nx})_x+G(v_N),y_s),
\end{aligned} \tag{6.2.34}$$

$$\alpha_{N,s}(0)=\theta(\varphi_N,y_s),\quad s=1,2,\cdots,N, \tag{6.2.35}$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $v_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \beta_{N,n}(t) y_n(x)$, $\beta_{N,n}(t) \in E$.

对于任意向量值函数 $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_{N,1}(t), \beta_{N,2}(t), \cdots, \beta_{N,N}(t)) \in E$(这表示 $\boldsymbol{\beta}(t)$ 的每一分量都属于 E), 由线性常微分方程理论知, 初值问题 (6.2.34), (6.2.35) 有唯一解 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\alpha_{N,1}(t), \alpha_{N,2}(t), \cdots, \alpha_{N,N}(t)) \in C^1[0,T]$, 若用 Z 记 $C^1[0,T]$, 则 $Z \subset E$. 这样我们就定义了带参数 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 由基本空间 E 到自身的映射 $\boldsymbol{\alpha} = L(\boldsymbol{\beta}, \theta)$.

令 $F \subset E$ 是任一有界子集. 对于 $\boldsymbol{\beta}(t) \in F$ 和 $0 \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant 1$, 有 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = L(\boldsymbol{\beta}, \theta_1)$, $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = L(\boldsymbol{\beta}, \theta_2)$, 则 $\boldsymbol{w}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) - \overline{\boldsymbol{\alpha}}(t) = (w_{N,1}(t), w_{N,2}(t), \cdots, w_{N,N}(t))$ 满足下列常微分方程组的初值问题

$$\begin{aligned} \dot{w}_{N,s}(t) = & -A(t)\lambda_s^2 w_{N,s}(t) + (\theta_1 - \theta_2)(B(t) v_{Nx^2} + g(v_N)_{x^2} \\ & + f(v_N)_x + h(v_{Nx})_x + G(v_N), y_s), \end{aligned} \tag{6.2.36}$$

$$w_{N,s}(0) = (\theta_1 - \theta_2)(\varphi_N, y_s), \quad s = 1, 2, \cdots, N. \tag{6.2.37}$$

式 (6.2.36) 两端乘以 $2w_{N,s}(t)$, 在 $(0,t)$ 上积分, 并对 $s = 1, 2, \cdots, N$ 求和, 成立

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N} w_{N,s}^2(t) = & -2 \int_0^t \sum_{s=1}^{N} A(\tau) \lambda_s^2 w_{N,s}^2(\tau) \mathrm{d}\tau \\ & + 2(\theta_1 - \theta_2) \sum_{s=1}^{N} \int_0^t (B(\tau) v_{Nx^2} + g(v_N)_{x^2} + f(v_N)_x + h(v_{Nx})_x \\ & + G(v_N), y_s) w_{N,s}(\tau) \mathrm{d}\tau + (\theta_1 - \theta_2)^2 \sum_{s=1}^{N} [(\varphi_N, y_s)]^2. \end{aligned}$$

因为 $g(v_N)_{x^2}$, $f(v_N)_x$, $h(v_{Nx})_x$ 和 $G(v_N)$ 在 $\overline{\Omega} \times [0,T]$ 上有界, 以及 $A(t)$ 和 $B(t)$ 在 $[0,T]$ 上也有界, 由上式推知

$$\sum_{s=1}^{N} w_{N,s}^2(t) \leqslant C_{17} \int_0^t \sum_{s=1}^{N} w_{N,s}^2(\tau) \mathrm{d}\tau + C_{18}(T) |\theta_1 - \theta_2|^2. \tag{6.2.38}$$

利用 Gronwall 不等式, 从式 (6.2.38) 得

$$\sum_{s=1}^{N} w_{N,s}^2 \leqslant C_{19}(T) |\theta_1 - \theta_2|^2, \quad \forall t \in [0,T],$$

即

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{\alpha}}\|_{C[0,T]} = \max_{1 \leqslant s \leqslant N} \|w_{N,s}\|_{C[0,T]} \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\sum_{s=1}^{N} w_{N,s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \overline{C}_{19}(T) |\theta_1 - \theta_2|,$$

其中常数 $\overline{C}_{19}(T)$ 不依赖于 θ. 这表明对于任意有界子集 $F\subset E$, 映射 $\boldsymbol{\alpha}=L(\boldsymbol{\beta},\theta)$ 关于 θ 是一致连续的.

对于任意固定的 $\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 1$, 设 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}=L(\boldsymbol{\beta},\theta)$, $\check{\boldsymbol{\alpha}}=L(\overline{\boldsymbol{\beta}},\theta)$, 其中 $\boldsymbol{\beta}(t),\overline{\boldsymbol{\beta}}(t)\in E$, 则 $\boldsymbol{\alpha}(t)=\widehat{\boldsymbol{\alpha}}-\check{\boldsymbol{\alpha}}=(\alpha_{N,1}(t),\alpha_{N,2}(t),\cdots,\alpha_{N,N}(t))$ 满足下列常微分方程组的初值问题

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{N,s}=&-A(t)\lambda_s^2\alpha_{N,s}+\theta\big(B(t)(v_{Nx^2}-\overline{v}_{Nx^2})\\&+g(v_N)_{x^2}-g(\overline{v}_N)_{x^2}+f(v_N)_x-f(\overline{v}_N)_x+h(v_{Nx})_x-h(\overline{v}_{Nx})_x\\&+G(v_N)-G(\overline{v}_N),y_s\big),\end{aligned}\tag{6.2.39}$$

$$\alpha_{N,s}(0)=0,\quad s=1,2,\cdots,N,\tag{6.2.40}$$

其中 $v_N(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{N}\beta_{N,n}(t)y_n(x)$, $\overline{v}_N(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{N}\overline{\beta}_{N,n}(t)y_n(x)$ 以及 $\beta_{N,n}(t)$ 和 $\overline{\beta}_{N,n}(t)$ 分别是 $\boldsymbol{\beta}(t)$ 和 $\overline{\boldsymbol{\beta}}(t)$ 的第 n 个分量.

式 (6.2.39) 两端乘以 $2\alpha_{N,s}(t)$ 后, 在 $(0,t)$ 上积分, 对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和, 并关于 x 分部积分, 有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{N}\alpha_{N,s}^2=&-2\int_0^t A(\tau)\sum_{s=1}^{N}\lambda_s^2\alpha_{N,s}^2\mathrm{d}\tau+2\theta\int_0^t\int_\Omega\Big\{B(\tau)[v_{Nx^2}-\overline{v}_{Nx^2}]\\&+[g(v_N)_{x^2}-g(\overline{v}_N)_{x^2}]+[f(v_N)_x-f(\overline{v}_N)_x]+[h(v_{Nx})_x-h(\overline{v}_{Nx})_x]\\&+[G(v_N)-G(\overline{v}_N)]\Big\}u_N\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\\leqslant&\, 2\theta\int_0^t\int_\Omega\Big\{[B(\tau)(v_N-\overline{v}_N)u_{Nx^2}]\\&+[g(v_N)-g(\overline{v}_N)]u_{Nxx}-[f(v_N)-f(\overline{v}_N)]u_{Nx}\\&-[h(v_{Nx})-h(\overline{v}_{Nx})]u_{Nx}+[G(v_N)-G(\overline{v}_N)]u_N\Big\}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\\leqslant&\, C_{20}\int_0^t\left|\sum_{s=1}^{N}(\beta_{Ns}-\overline{\beta}_{Ns})\alpha_{N,s}\right|\mathrm{d}\tau+\left|\int_0^t\int_\Omega\widetilde{g}'\cdot(v_N-\overline{v}_N)u_{Nx^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|\\&+\left|\int_0^t\int_\Omega\widetilde{f}'\cdot(v_N-\overline{v}_N)u_{Nx}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|+\left|\int_0^t\int_\Omega\widetilde{h}'\cdot(v_{Nx}-\overline{v}_{Nx})u_{Nx}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|\\&+\left|\int_0^t\int_\Omega\widetilde{G}'\cdot(v_N-\overline{v}_N)u_N\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|,\end{aligned}\tag{6.2.41}$$

其中 $\widetilde{g}',\widetilde{f}'$ 和 $\widetilde{G}'$ 表示相应导数在 v_N 和 $\overline{v}_N$ 之间取值, $\widetilde{h}'$ 表示相应导数在 v_{Nx} 和 $\overline{v}_{Nx}$ 之间取值, 而 $u_N(x,t)=\sum\limits_{s=1}^{N}\alpha_{N,s}(t)y_s(x)$.

利用 Cauchy 不等式, 式 (6.2.41) 变为

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{N}\alpha_{N,s}^2 &\leqslant C_{21}\int_0^t\sum_{s=1}^{N}\alpha_{N,s}^2\mathrm{d}\tau+C_{22}\int_0^t\sum_{s=1}^{N}(\beta_{N,s}-\overline{\beta}_{N,s})^2\mathrm{d}\tau\\&\leqslant C_{21}\int_0^t\sum_{s=1}^{N}\alpha_{N,s}^2\mathrm{d}\tau+C_{23}(T)\|\boldsymbol{\beta}-\overline{\boldsymbol{\beta}}\|_{C[0,T]}^2.\end{aligned}\tag{6.2.42}$$

于是由 Gronwall 不等式得

$$\|\widehat{\boldsymbol{\alpha}}-\breve{\boldsymbol{\alpha}}\|_{C[0,T]}\leqslant C_{24}(T)\|\boldsymbol{\beta}-\overline{\boldsymbol{\beta}}\|_{C[0,T]},$$

这表明对于任意固定的 θ, $\boldsymbol{\alpha}=L(\boldsymbol{\beta},\theta)$ 在 E 中是连续的.

因为 $Z\hookrightarrow\hookrightarrow E$, 所以 $E\mapsto E$ 的映射 $\boldsymbol{\alpha}=L(\boldsymbol{\beta},\theta)$ 对于每个固定的 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 是紧变换.

当 $\theta=0$ 时, 初值问题 (6.2.34), (6.2.35) 有唯一解 $\alpha_{N,s}(t)=0, s=1,2,\cdots,N$.

从估计 (6.2.18) 知, 对于初值问题 (6.2.34), (6.2.35) 的所有可能解或 $E\mapsto E$ 的映射 $\boldsymbol{\alpha}=L(\boldsymbol{\beta},\theta)$ 的所有可能的不动点有 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_{C[0,T]}\leqslant K_4$, 其中 K_4 不依赖于 θ. 根据 Leray-Schauder 不动点定理, 初值问题 (6.2.34), (6.2.35) 至少存在一解 $\boldsymbol{\alpha}(t)\in C[0,T]$. 取 $\theta=1$ 时, 初值问题 (6.2.7), (6.2.8) 存在解 $\boldsymbol{\alpha}(t)\in C[0,T]$. 由线性常微分方程理论便得 $\boldsymbol{\alpha}(t)\in C^1[0,T]$. □

引理 6.2.2[47] 设 $J(z_1,z_2,\cdots,z_j)$ 是变量 $z_1,z_2,\cdots,z_j$ 的函数, 并设 J 对每个变量是 $k(k\geqslant 1)$ 次连续可导的. 令 $z_i(x,t)\in L^\infty([0,T];H^k(-l,l))(i=1,2,\cdots,j)$, 则有估计

$$\int_{-l}^{l}|D_x^kJ(z_1(x,t),\cdots,z_j(x,t))|^2\mathrm{d}x\leqslant C(M,k,j)\sum_{i=1}^{j}\|z_i(\cdot,t)\|_{H^k(-l,l)}^2,$$

其中 $C(M,k,j)$ 是依赖于 M,k,j 的常数, $M=\sup\limits_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ x\in(-l,l)}}|z_i(x,t)|$, $D_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$.

引理 6.2.3 设下列条件成立:

(1) 引理 6.2.1 的条件成立;

(2) $g\in C^{2k}(\mathbb{R})$, $f\in C^{2k-1}(\mathbb{R})$, $h\in C^{2k-1}(\mathbb{R})$, $G\in C^{2k-1}(\mathbb{R})$ 且 $\varphi\in H^{2k}(\Omega)(k\geqslant 1$ 是自然数);

(3) $$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}[g(u)_{x^2}]\Big|_{x=-l}=\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}[g(u)_{x^2}]\Big|_{x=l}=0,\quad \beta=0,2,\cdots,2(k-1);\tag{6.2.43}$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}[f(u)_x]\Big|_{x=-l}=\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}[f(u)_x]\Big|_{x=l}=0,\quad \beta=0,2,\cdots,2(k-1);\tag{6.2.44}$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}[h(u_x)_x]\Big|_{x=-l}=\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}[h(u_x)_x]\Big|_{x=l}=0,\quad \beta=0,2,\cdots,2(k-1);\tag{6.2.45}$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}G(u)\Big|_{x=-l}=\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}G(u)\Big|_{x=l}=0,\quad \beta=0,2,\cdots,2(k-1),\tag{6.2.46}$$

则近似解 $u_N(x,t)$ 有估计

$$\|u_N(\cdot,t)\|^2_{H^{2k}(\Omega)}+\|u_N\|^2_{H^{2(k+1)}(Q_t)}\leqslant C_{25}(T),\quad \forall t\in[0,T],\tag{6.2.47}$$

其中常数 $C_{25}(T)$ 不依赖于 N.

证明　为了得到近似解 $u_N(x,t)$ 的估计 (6.2.47), 将用数学归纳法证明.

由引理 6.2.1 知, 当 $k=1$ 时, 估计 (6.2.47) 成立. 现假定 $k=p$ 时, 估计 (6.2.47) 成立. 下证当 $k=p+1$ 时, 估计 (6.2.47) 成立. 式 (6.2.7)(相当于式 (6.2.9) 中 $\theta=1$ 的情况) 式两端乘以 $2\lambda_s^{2(p+1)}\alpha_{N,s}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和, 注意到式 (6.2.43)～式 (6.2.46), 对 x 进行分部积分和利用 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx^{2(p+1)}}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2a_0\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant 2b\|u_{Nx^{2(p+2)-1}}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\{\|g(u_N)_{x^{2(p+1)}}\|_{L^2(\Omega)}\\&\quad+\|f(u_N)_{x^{2p+1}}\|_{L^2(\Omega)}+\|h(u_{Nx})_{x^{2p+1}}\|_{L^2(\Omega)}\\&\quad+\|G(u_N)_{x^{2p}}\|_{L^2(\Omega)}\}\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{6.2.48}$$

由引理 6.2.2 和 Gagliardo-Nirenberg 插值定理推得

$$\begin{aligned}\|g(u_N)_{x^{2(p+1)}}\|_{L^2(\Omega)}&\leqslant C_{26}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^{2(p+1)}(\Omega)}\\&\leqslant C_{27}(T)\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|^{\frac{p+1}{p+2}}_{L^2(\Omega)}+C_{28}(T),\end{aligned}\tag{6.2.49}$$

$$\begin{aligned}\|f(u_N)_{x^{2p+1}}\|_{L^2(\Omega)}&\leqslant C_{29}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^{2p+1}(\Omega)}\\&\leqslant C_{30}(T)\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|^{\frac{2p+1}{2(p+2)}}_{L^2(\Omega)}+C_{31}(T),\end{aligned}\tag{6.2.50}$$

$$\begin{aligned}\|h(u_{Nx})_{x^{2p+1}}\|_{L^2(\Omega)}&\leqslant C_{32}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^{2(p+1)}(\Omega)}\\&\leqslant C_{33}(T)\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|^{\frac{p+1}{p+2}}_{L^2(\Omega)}+C_{34}(T),\end{aligned}\tag{6.2.51}$$

$$\begin{aligned}\|G(u_N)_{x^{2p}}\|_{L^2(\Omega)}&\leqslant C_{35}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^{2p}(\Omega)}\\&\leqslant C_{36}(T)\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|^{\frac{p}{p+2}}_{L^2(\Omega)}+C_{37}(T),\end{aligned}\tag{6.2.52}$$

$$\|u_{Nx^{2(p+2)-1}}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{38}(T)\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|^{\frac{2p+3}{2(p+2)}}_{L^2(\Omega)}+C_{39}(T).\tag{6.2.53}$$

将式 (6.2.49)～ 式 (6.2.53) 代入式 (6.2.48), 并利用 Young 不等式可见

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx^{2(p+1)}}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+a_0\|u_{Nx^{2(p+2)}}(\cdot,t)\|^2\leqslant C_{40}(T).\tag{6.2.54}$$

式 (6.2.54) 对 t 积分并注意到式 (6.2.18) 有

$$\|u_N(\cdot,t)\|^2_{H^{2(p+1)}(\Omega)}+\|u_N\|^2_{H^{2(p+2)}(Q_t)}\leqslant C_{41}(T),\quad \forall t\in[0,T],\tag{6.2.55}$$

其中常数 $C_{41}(T)$ 不依赖于 N. □

引理 6.2.4 假定引理 6.2.3 的条件成立且 $\dot{A}(t)$ 和 $\dot{B}(t)$ 在 $[0,T]$ 上有界. 如果 $k \geqslant 2$, $k = 2 + p_0$, $p_0 \geqslant 0$, 则存在估计

$$\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{H^{2p_0}(\Omega)} + \|u_{Nt}\|^2_{H^{2(p_0+1)}(Q_t)} \leqslant C_{42}(T), \quad \forall t \in [0,T], \tag{6.2.56}$$

其中常数 $C_{42}(T)$ 不依赖于 N.

证明 应用归纳法证明. 先证 $k=2$, $p_0=0$ 的情形. 式 (6.2.7) 对 t 求导一次, 乘以 $2\dot{\alpha}_{N,s}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和并对 x 分部积分得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2a_0\|u_{Nx^2t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant& 2b\|u_{Nxt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(\dot{A}(t)u_{Nx^2}, u_{Nx^2t}) - 2(\dot{B}(t)u_{Nx}, u_{Nxt}) \\
&+ 2(g(u_N)_{x^2t} + f(u_N)_{xt} + h(u_{Nx})_{xt} + G(u_N)_t, u_{Nt}).
\end{aligned} \tag{6.2.57}$$

由引理 6.2.3 的估计式 (6.2.47) 和索伯列夫嵌入定理知

$$\|u_N(\cdot,t)\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leqslant C_{43}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)} \leqslant C_{44}(T). \tag{6.2.58}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 内插定理有

$$\begin{aligned}
2b\|u_{Nxt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant C_{45}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{a_0}{5}\|u_{Nxxt}\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{46}\|u_{Nt}\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{47}(T).
\end{aligned} \tag{6.2.59}$$

下面对式 (6.2.57) 中右端一些项进行估计. 利用引理假定, 由式 (6.2.58) 和式 (6.2.59) 推知

$$\begin{aligned}
2(g(u_N)_{x^2t}, u_{Nt}) &= -2(g'(u_N)u_{Nxt} + g''(u_N)u_{Nx}u_{Nt}, u_{Nxt}) \\
&\leqslant -2(g''(u_N)u_{Nx}u_{Nt}, u_{Nxt}) \\
&\leqslant C_{48}(T)\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nxt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{49}(T)\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a_0}{5}\|u_{Nx^2t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)};
\end{aligned} \tag{6.2.60}$$

$$\begin{aligned}
2(f(u_N)_{xt}, u_{Nt}) &= -2(f'(u_N)u_{Nt}, u_{Nxt}) \leqslant C_{50}(T)\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nxt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{51}(T)\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a_0}{5}\|u_{Nx^2t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)};
\end{aligned} \tag{6.2.61}$$

$$2(h(u_{Nx})_{xt}, u_{Nt}) = -2(h'(u_{Nx})u_{Nxt}, u_{Nxt}) \leqslant 0; \tag{6.2.62}$$

$$2(G(u_N)_t, u_{Nt}) \leqslant 2\gamma\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}; \tag{6.2.63}$$

$$-2(\dot{A}(t)u_{Nx^2}, u_{Nx^2t}) \leqslant \frac{a_0}{5}\|u_{Nx^2t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{52}(T); \tag{6.2.64}$$

$$-2(\dot{B}(t)u_{Nx}, u_{Nxt}) \leqslant \frac{a_0}{5}\|u_{Nx^2t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{53}(T)\|u_{Nt}\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{54}(T). \tag{6.2.65}$$

将式 (6.2.65)~ 式 (6.2.59) 代入式 (6.2.57), 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a_0\|u_{Nx^2t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{55}(T) + C_{56}(T)\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.2.66}$$

下证 $\|u_{Nt}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}$ 关于 N 是一致有界的. 式 (6.2.7) 乘以 $\dot{\alpha}_{N,s}(t)$, 对 $s = 1,2,\cdots,N$ 求和, 并令 $t=0$, 然后再利用 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}\|u_{Nt}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant & C_{57}\{\|u_{Nx^4}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{Nx^2}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|g(u_N(\cdot,0))_{x^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f(u_N(\cdot,0))_x\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|h(u_{Nx}(\cdot,0))_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|G(u_N(\cdot,0))\|^2_{L^2(\Omega)}\}.\end{aligned}$$

由对 $g(s)$, $f(s)$, $h(s)$, $G(s)$ 和 $\varphi(x)$ 的假定推出 $\|u_{Nt}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}$ 关于 N 是一致有界的. 利用 Gronwall 不等式由式 (6.2.66) 立得

$$\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{Nx^2t}\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant C_{58}(T), \quad \forall t \in [0,T], \tag{6.2.67}$$

其中常数 $C_{58}(T)$ 不依赖于 N.

现在假定当 $0 \leqslant p_0 \leqslant n$ 时, 估计式 (6.2.56) 成立. 下证当 $p_0 = n+1$ 时估计式 (6.2.56) 也成立. 式 (6.2.7) 对 t 求导, 乘以 $2\lambda_s^{2(n+1)}\dot{\alpha}_{N,s}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和, 并注意到式 (6.2.43)~ 式 (6.2.46), 再对 x 进行分部积分, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx^{2(n+1)}t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2a_0\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leqslant & 2b\|u_{Nx^{2(n+2)-1}t}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2|(\dot{A}(t)u_{Nx^{2(n+2)}}, u_{Nx^{2(n+2)}t})| \\ & + 2|(\dot{B}(t)u_{Nx^{2(n+1)}}, u_{Nx^{2(n+2)}t})| + 2\{\|g(u_N)_{x^{2(n+1)}t}\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \|f(u_N)_{x^{2n+1}t}\|_{L^2(\Omega)} + \|h(u_{Nx})_{x^{2n+1}t}\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \|G(u_N)_{x^{2n}t}\|_{L^2(\Omega)}\}\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{6.2.68}$$

令 $g(u_N)_{x^{2(n+1)}t} = w(u_N, u_{Nt})_{x^{2(n+1)}}$, 由引理 6.2.2 和 Gagliardo-Nirenberg 插值定理可见

$$\begin{aligned}\|g(u_N)_{x^{2(n+1)}t}\|_{L^2(\Omega)} &= \|w(u_N, u_{Nt})_{x^{2(n+1)}}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C_{59}(T)\{\|u_N(\cdot,t)\|_{H^{2(n+1)}(\Omega)} + \|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{H^{2(n+1)}(\Omega)}\} \\ &\leqslant C_{60}(T) + C_{61}(T)\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|^{\frac{n+1}{n+2}}_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{6.2.69}$$

同理可得

$$\|f(u_N)_{x^{2n+1}t}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{62}(T) + C_{63}(T)\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2n+1}{2(n+2)}}, \tag{6.2.70}$$

$$\|h(u_{Nx})_{x^{2n+1}t}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{64}(T) + C_{65}(T)\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{n+1}{n+2}}, \tag{6.2.71}$$

$$\|G(u_N)_{x^{2n}t}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{66}(T) + C_{67}(T)\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{n}{n+2}}. \tag{6.2.72}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 插值定理有

$$\begin{aligned}\|u_{Nx^{2n+3}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant C_{68}(T)\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{H^{2(n+2)}(\Omega)}^{\frac{2n+3}{2(n+2)}} \\ &\leqslant C_{69}(T) + C_{70}(T)\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2n+3}{2(n+2)}}.\end{aligned} \tag{6.2.73}$$

将式 (6.2.69)~ 式 (6.2.73) 代入式 (6.2.68), 并利用 Young 不等式进而得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx^{2(n+1)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_0\|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{71}(T). \tag{6.2.74}$$

因为 $k = 2 + p_0 = 2 + (n+1) = 3 + n$, 容易验证, $\|u_{Nx^{2(n+1)}t}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2$ 关于 N 是一致有界的. 式 (6.2.74) 对 t 积分推得

$$\|u_{Nx^{2(n+1)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{Nx^{2(n+2)}t}(\cdot,t)\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{72}(T), \quad \forall t \in [0,T],$$

其中常数 $C_{72}(T)$ 与 N 无关. 由归纳法可见式 (6.2.56) 成立. □

引理 6.2.5 假定引理 6.2.4 的条件成立. 令 $k = 2r + p_{r-1}$, $r \geqslant 1$, $p_{r-1} \geqslant 0$. 如果 $k \geqslant 2r (r = 2, 3, \cdots)$ 和 $A(t), B(t)$ 在 $[0,T]$ 上是 r 次连续可导, 则有估计

$$\|u_{Nt^r}(\cdot,t)\|_{H^{2p_{r-1}}(\Omega)}^2 + \|u_{Nt^r}\|_{H^{2+2p_{r-1}}(Q_t)}^2 \leqslant C_{73}(T), \quad \forall t \in [0,T], \quad r = 2, 3, \cdots, \tag{6.2.75}$$

其中常数 $C_{73}(T)$ 与 N 无关.

证明 首先证明估计式 (6.2.75) 当 $r = 2$ 时成立. 如果 $r = 2$, 于是 $k = 2r + p_{r-1} = 4 + p_1$. 方程组 (6.2.7) 对 t 求导两次后, 乘以 $2\lambda_s^{2p_1}\ddot{\alpha}_{N,s}(t)$, 对 $s = 1, 2, \cdots, N$ 求和, 并对 x 分部积分得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nx^{2p_1}t^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2a_0\|u_{Nx^{2+2p_1}t^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leqslant& 2b\|u_{Nx^{2p_1+1}t^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(2\dot{A}(t)u_{Nx^{2+2p_1}t}, u_{Nx^{2+2p_1}t^2}) \\ &- 2(\ddot{A}(t)u_{Nx^{2+2p_1}}, u_{Nx^{2+2p_1}t^2}) + 2(2\dot{B}(t)u_{Nx^{2p_1}t}, u_{Nx^{2+2p_1}t^2}) \\ &+ 2(\ddot{B}(t)u_{Nx^{2p_1}}, u_{Nx^{2+2p_1}t^2}) + 2(g(u_N)_{x^{2+2p_1}t^2} \\ &+ f(u_N)_{x^{1+2p_1}t^2} + h(u_{Nx})_{x^{1+2p_1}t^2} + G(u_N)_{x^{2p_1}t^2}, u_{Nx^{2p_1}t^2}).\end{aligned} \tag{6.2.76}$$

令 $p_1 = 0$, 从式 (6.2.76) 看出

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2a_0\|u_{Nx^2t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant &2b\|u_{Nxt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(2\dot{A}(t)u_{Nx^2t}, u_{Nx^2t^2}) - 2(\ddot{A}(t)u_{Nx^2}, u_{Nx^2t^2}) \\
&+ 2(2\dot{B}(t)u_{Nt}, u_{Nx^2t^2}) + 2(\ddot{B}(t)u_N, u_{Nx^2t^2}) \\
&+ 2(g(u_N)_{x^2t^2} + f(u_N)_{xt^2} + h(u_{Nx})_{xt^2} + G(u_N)_{t^2}, u_{Nt^2}).
\end{aligned} \tag{6.2.77}$$

利用带 ε 的 Cauchy 不等式, 引理假定和所得估计, 由式 (6.2.77) 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2a_0\|u_{Nx^2t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant &2b\|u_{Nxt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{74}(\varepsilon,T) + \varepsilon\{\|u_{Nx^2t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g(u_N)_{x^2t^2}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|f(u_N)_{xt^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h(u_{Nx})_{xt^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|G(u_N)_{t^2}\|^2_{L^2(\Omega)}\} \\
&+ C_{75}(\varepsilon,T)\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{6.2.78}$$

其中 $\varepsilon > 0$, $C_{74}(\varepsilon,T)$ 和 $C_{75}(\varepsilon,T)$ 是依赖于 ε 和 T, 但不依赖于 N 的常数. 应用引理 6.2.2, 得

$$\begin{aligned}
\|g(u_N)_{x^2t^2}\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|(g''(u_N)u^2_{Nt} + g'(u_N)u_{Nt^2})_{x^2}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{76}(T)\sum_{i=0}^{2}\|u_{Nt^i}(\cdot,t)\|^2_{H^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{77}(T)\{1 + \|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{Nx^2t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\};
\end{aligned} \tag{6.2.79}$$

$$\|f(u_N)_{xt^2}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{78}(T)\{1 + \|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{Nxt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\}; \tag{6.2.80}$$

$$\|h(u_{Nx})_{xt^2}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{79}(T)\{1 + \|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{Nx^2t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\}; \tag{6.2.81}$$

$$\|G(u_N)_{t^2}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{80}(T)\{1 + \|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\}. \tag{6.2.82}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 内插定理导出

$$\begin{aligned}
2b\|u_{Nxt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C_{81}\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leqslant \varepsilon\|u_{Nx^2t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{82}\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{6.2.83}$$

将式 (6.2.79)~ 式 (6.2.83) 代入式 (6.2.78), 对 t 积分和取 ε 充分小, 使得

$$\begin{aligned}
&\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{Nx^2t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(Q_t)} \\
\leqslant &C_{83}(T)\int_0^t \|u_{Nt^2}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau + C_{84}(T).
\end{aligned} \tag{6.2.84}$$

易证 $\|u_{Nt^2}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ 关于 N 是一致有界的. 利用 Gronwall 不等式从式 (6.2.84) 得

$$\|u_{Nt^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{Nx^2t^2}\|^2_{L^2(Q_t)}\leqslant C_{85}(T),\quad \forall t\in[0,T].$$

同理, 当 $p_1\geqslant 1$ 时, 由式 (6.2.76) 可得估计

$$\|u_{Nx^{2p_1}t^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{Nx^{2+2p_1}t^2}\|^2_{L^2(Q_t)}\leqslant C_{86}(T),\quad \forall t\in[0,T],$$

其中常数 $C_{86}(T)$ 不依赖于 N. 同理可证估计 (6.2.75) 对 $r=3,4,\cdots$ 成立. □

定理 6.2.1 在引理 6.2.5 的条件下, 若 $k\geqslant 4$, 则初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)$, 解 $u(x,t)$ 有连续导数 $u_{x^s}(x,t)(0\leqslant s\leqslant 2k-5)$ 和广义导数 $u_{x^st^r}(x,t)(0\leqslant s+4r\leqslant 2k,\ \ r=0,1,\cdots)$; 如果 $k\geqslant 5$, 则初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$, 这解 $u(x,t)$ 有连续导数 $u_{x^st^r}(x,t)(0\leqslant s+4r\leqslant 2k-5,\ \ r=0,1,\cdots)$ 和广义导数 $u_{x^st^r}(x,t)(0\leqslant s+4r\leqslant 2k,\ \ r=0,1,\cdots)$.

证明 为了证明初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 存在唯一整体广义解, 先给出广义解的定义.

函数 $u(x,t)\in W_2^{(4,1)}(Q_T)=\{u,u_{x^i}\in L^2(Q_T),i=1,2,3,4,u_t\in L^2(Q_T)\}$ 称为初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 的广义解, 如果 $u(x,t)$ 满足下列恒等式

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}\{u_t(x,t)+A(t)u_{x^4}(x,t)-[B(t)u_{x^2}(x,t)\\&+g(u(x,t))_{x^2}+f(u(x,t))_x+h(u_x(x,t))_x\\&+G(u(x,t))]\}\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\qquad \forall\psi(x,t)\in L^2(Q_T)\end{aligned}\tag{6.2.85}$$

和在古典意义下 $u(x,t)$ 满足初边值条件

$$\begin{aligned}&u(-l,t)=u(l,t)=0,\qquad u_{x^2}(-l,t)=u_{x^2}(l,t)=0,\\&u(x,0)=\varphi(x).\end{aligned}$$

下证初边值问题 (6.2.2)-(6.2.4) 广义解的存在性. 根据引理 6.2.3 和引理 6.2.4 知

$$\begin{aligned}&\|u_N(\cdot,t)\|^2_{H^{2k}(\Omega)}+\|u_N\|^2_{H^{2(k+1)}(Q_t)}\leqslant C_{25}(T),\qquad \forall t\in[0,T],\\&\|u_{N_t}(\cdot,t)\|^2_{H^{2p_0}(\Omega)}+\|u_{N_t}\|^2_{H^{2(p_0+1)}(Q_t)}\leqslant C_{42}(T),\qquad \forall t\in[0,T],\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&u_N\in C([0,T];H^{2k}(\Omega)),\\&u_{N_t}\in C([0,T];H^{2p_0}(\Omega)).\end{aligned}$$

利用索伯列夫嵌入定理不难看出

$$u_{Nx^s}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s\leqslant 2k-1,$$
$$u_{Nx^st}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s\leqslant 2k-5.$$

如果 $k=4$, 则

$$u_{Nx^s}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s\leqslant 7,$$
$$u_{Nx^st}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s\leqslant 3.$$

因此可以从 $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 中抽出子序列和存在函数 $u(x,t)$ 使得, 当 $N\to\infty$ 时, 子序列在 Q_T 上一致收敛于 $u(x,t)$. 事实上, $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 在 $\overline{Q}_T$ 上一致有界. 同时

$$\begin{aligned}&|u_N(x+\Delta x,t+\Delta t)-u_N(x,t)|\\ \leqslant&|u_N(x+\Delta x,t+\Delta t)-u_N(x,t+\Delta t)|+|u_N(x,t+\Delta t)-u_N(x,t)|\\ =&|u_{Nx}(x+\theta_1\Delta x,t+\Delta t)||\Delta x|+|u_{Nt}(x,t+\theta_2\Delta t)||\Delta t|,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1,\ \theta_2<1$, Δx 和 Δt 分别为 x 和 t 的改变量. 所以 $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 在 $\overline{Q}_T$ 上等度连续. 根据 Ascoli-Arzelá定理 $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 存在子序列, 仍记为 $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$, 在 $\overline{Q}_T$ 上一致收敛于 $u(x,t)$. 对应的导数序列 $\{u_{Nx^i}(x,t)(i=1,2,3)\}_{N=1}^{\infty}$ 的子序列在 $\overline{Q}_T$ 上也一致收敛于 $u_{x^i}(x,t)(i=1,2,3)$.

另外根据 L^p 的弱紧性定理 (定理 2.3.4), 子序列 $\{u_{Nx^s}(x,t)\}_{N=1}^{\infty}(0\leqslant s\leqslant 8)$ 和 $\{u_{Nx^st}(x,t)\}_{N=1}^{\infty}(0\leqslant s\leqslant 4)$ 分别在 $L^2(Q_T)$ 内弱收敛于 $u_{x^s}(x,t)(0\leqslant s\leqslant 8)$ 和 $u_{Nx^st}(x,t)(0\leqslant s\leqslant 4)$. 我们把 $\{u_{Nx^4}(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 等存在的子序列仍记为 $\{u_{Nx^4}(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$, 从而当 $N\to\infty$ 时,

$$\int_{Q_T}A(t)u_{Nx^4}(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

收敛于

$$\int_{Q_T}A(t)u_{x^4}(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad \forall\psi(x,t)\in L^2(Q_T);$$

$$\int_{Q_T}B(t)u_{x^2}(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

收敛于

$$\int_{Q_T}B(t)u_{x^2}(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad \forall\psi(x,t)\in L^2(Q_T).$$

现在证明, 当 $N\to\infty$ 时,

$$\int_{Q_T}g(u_N(x,t))_{x^2}\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

收敛于

$$\int_{Q_T} g(u)_{x^2}\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \forall\psi(x,t)\in L^2(Q_T). \tag{6.2.86}$$

事实上

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{Q_T}(g(u_N(x,t))_{xx}-g(u(x,t))_{xx})\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\
=&\Big|\int_{Q_T}\big\{g''(u_N(x,t))u_{Nx}^2(x,t)+g'(u_N(x,t))u_{Nxx}(x,t)-g''(u(x,t))u_x^2(x,t)\\
&-g'(u(x,t))u_{xx}(x,t)\big\}\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\
\leqslant&\Big|\int_{Q_T}\big\{g''(u_N(x,t))[u_{Nx}^2(x,t)-u_x^2(x,t)]+[g''(u_N(x,t))-g''(u(x,t))]u_x^2(x,t)\\
&+g'(u_N(x,t))[u_{Nxx}(x,t)-u_{xx}(x,t)]+[g'(u_N(x,t))\\
&-g'(u(x,t))]u_{xx}(x,t)\big\}\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\
\leqslant&\max_{\overline{Q}_T}\Big|g''(u_N(x,t))(u_{Nx}(x,t)+u_x(x,t))\Big|\Big|\int_{Q_T}(u_{Nx}(x,t)-u_x(x,t))\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\
&+\max_{\overline{Q}_T}|g'''(\widetilde{u}_N(x,t))u_x^2(x,t)|\Big|\int_{Q_T}(u_N(x,t)-u(x,t))\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\
&+\max_{\overline{Q}_T}|g'(u_N(x,t)|\Big|\int_{Q_T}(u_{Nxx}(x,t)-u_{xx}(x,t))\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\
&+\max_{\overline{Q}_T}|g''(\overline{u}_N(x,t))(u_N(x,t)-u(x,t))|\\
&\times\Big[\int_{Q_T}|u_{xx}(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big]^{\frac12}\Big[\int_{Q_T}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big]^{\frac12},
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{u}_N$ 和 $\overline{u}_N$ 取值于 $u_N(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 之间. 所以当 $N\to\infty$ 时, 由上式取极限立得式 (6.2.86). 同理可证, 当 $N\to\infty$ 时,

$$\int_{Q_T} f(u_N(x,t))_x\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad \text{收敛于} \int_{Q_T} f(u(x,t))_x\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \forall\psi\in L^2(Q_T),$$

$$\int_{Q_T} h(u_{Nx}(x,t))_x\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad \text{收敛于} \int_{Q_T} h(u_x(x,t))_x\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \forall\psi\in L^2(Q_T),$$

$$\int_{Q_T} G(u_N(x,t))\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad \text{收敛于} \int_{Q_T} G(u(x,t))\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \forall\psi\in L^2(Q_T).$$

因为近似解子序列 $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 满足恒等式

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T}\big\{&u_{Nt}(x,t)+A(t)u_{Nx^4}(x,t)-[B(t)u_{Nx^2}(x,t)\\
&+g(u_N(x,t))_{x^2}+f(u_N(x,t))_x+h(u_{Nx}(x,t))_x\\
&+G(u_N(x,t))]\big\}\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0, \quad \forall\psi\in L^2(Q_T).
\end{aligned} \tag{6.2.87}$$

所以当 $N \to \infty$ 时, 由式 (6.2.87) 得式 (6.2.85). 显然 $u(x,t)$ 在古典意义下满足初边值条件 (6.2.3) 和 (6.2.4). 故当 $k \geqslant 4$ 时, $u(x,t)$ 是问题 (6.2.2)-(6.2.4) 的整体广义解, 有连续导数 $u_{x^s}(x,t)(0 \leqslant s \leqslant 2k-5)$, 广义导数 $u_{x^st^r}(x,t)(0 \leqslant s+4r \leqslant 2k, r = 0,1,\cdots)$.

下面证明广义解的唯一性.

设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是问题 (6.2.2)-(6.2.4) 的两个广义解, 则 $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ 满足下列初边值问题

$$
\begin{aligned}
&u_t + A(t)u_{x^4} - B(t)u_{x^2} - \{g(u_1)_{xx} - g(u_2)_{xx} + f(u_1)_x - f(u_2)_x \\
&\quad + h(u_{1x})_x - h(u_{2x})_x + G(u_1) - G(u_2)\} = 0, \quad \text{a.e.}, \qquad (6.2.88)\\
&u(-l,t) = u(l,t) = 0, \qquad u_{xx}(-l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \qquad (6.2.89)\\
&u(x,0) = 0. \qquad (6.2.90)
\end{aligned}
$$

方程 (6.2.88) 两端乘以 $2u(x,t)$ 并在 Ω 上积分, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2A(t)\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
=&2(B(t)u_{x^2},u) + 2(g(u_1)-g(u_2),u_{xx}) - 2(f(u_1)-f(u_2),u_x)\\
&-2(h(u_{1x})-h(u_{2x}),u_x) + 2(G(u_1)-G(u_2),u).
\end{aligned}
$$

利用 Cauchy 不等式, 中值定理和 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 由上式可见

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2a_0\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant&\frac{a_0}{3}\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3B^2(t)}{a_0}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2(g'(\breve{u})u,u_{xx})\\
&-2(f'(\overline{u})u,u_x) - 2(h'(\widetilde{u})u_x,u_x) + 2(G'(\widehat{u})u,u)\\
\leqslant&\frac{2a_0}{3}\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3B^2(t)}{a_0}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left(3\max_{x\in\overline{\Omega}}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{|g'(\breve{u})|^2}{a_0}\right)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left(\max_{x\in\overline{\Omega}}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|f'(\overline{u})|^2\right)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\gamma\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant&\frac{2a_0}{3}\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3B^2(t)}{a_0}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left(3\max_{x\in\overline{\Omega}}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{|g'(\breve{u})|^2}{a_0}\right)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\max_{x\in\overline{\Omega}}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|f'(\overline{u})|^2\right)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{a_0}{3}\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{87}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\gamma\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

其中 $\breve{u}, \overline{u}, \widehat{u}$ 取值于 u_1 和 u_2 之间, 而 $\widetilde{u}$ 取值于 u_{1x} 和 u_{2x} 之间. 经计算上式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+a_0\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{88}(T)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

利用 Gronwall 不等式, 由上式推知

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{xx}\|^2_{L^2(Q_t)}\leqslant 0,\quad \forall t\in[0,T],$$

即

$$u_1(x,t)=u_2(x,t),\quad \text{a.e..}$$

如果 $k\geqslant 5$, 由引理 6.2.5 知, 当 $k=2r+p_{r-1},\ r\geqslant 1,\ p_{r-1}\geqslant 0$ 时,

$$u_N\in C([0,T];H^{2k}),$$

$$u_{Nt^r}\in C([0,T];H^{2k-4r}),\quad r=1,2,3,\cdots,$$

$$u_{Nx^st^r}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s+4r\leqslant 2k-1,\quad r=2,3,\cdots.$$

如果 $k=5$, 则

$$u_{Nx^s}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s\leqslant 9,$$
$$u_{Nx^st}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s\leqslant 5,$$
$$u_{Nx^st^2}\in C([0,T]\times\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

根据前面的论证方法, 当 $k\geqslant 5$ 时, 问题 (6.2.2)-(6.2.4) 存在整体古典解 $u(x,t)$. 这解 $u(x,t)$ 有连续导数 $u_{x^st^r}(x,t)(0\leqslant s+4r\leqslant 2k-5)$ 和有广义导数 $u_{x^st^r}(x,t)(0\leqslant s+4r\leqslant 2k,\ r=0,1,2,\cdots)$.

古典解显然是唯一的. □

6.2.2 解的渐近性质

定理 6.2.2 设下列条件成立:

(1) 存在常数 $a_0,\ b_0,\ b_1>0$, 使得在 $[0,\infty)$ 上 $A(t)\geqslant a_0>0,\ B(t)\geqslant b_0$ 或 $|B(t)|\leqslant b_1$;

(2) $g\in C^1(\mathbb{R})$ 且 $\forall s\in\mathbb{R},\ g'(s)\geqslant 0$; $f\in C(\mathbb{R}),\ F(u)=\displaystyle\int_0^u f(\xi)\mathrm{d}\xi$; $h\in C^1(\mathbb{R})$, $h(0)=0$ 且 $\forall\xi\in\mathbb{R},\ h'(\xi)\geqslant 0$;

(3) $G\in C^1(\mathbb{R}),\ G(0)=0$ 且存在常数 $\gamma_0>0$ 或 $\gamma_0>\dfrac{b_1^2}{2a_0}$, 使得 $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $G'(\xi)\leqslant-\gamma_0$;

(4) $\varphi\in L^2(\Omega)$,

则问题 (6.2.2)-(6.2.4) 的整体广义解或整体古典解 $u(x,t)$ 有渐近性质

$$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}=0. \tag{6.2.91}$$

证明　方程 (6.2.2) 两端乘以 $2u(x,t)$ 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}&2(u_t,u)+2(A(t)u_{x^4},u)-2(B(t)u_{x^2},u)\\&-2\{(g(u)_{xx}+f(u)_x+h(u_x)_x+G(u),u)\}=0.\end{aligned} \tag{6.2.92}$$

式 (6.2.92) 对 x 分部积分和利用假定条件推出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2a_0\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2b_0\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\\leqslant&-2\gamma_0\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant-2\gamma_0\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

利用分离变量法由上式得

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{e}^{-2\gamma_0t}.$$

如果 $\gamma_0>\dfrac{b_1^2}{2a_0}$, 则由式 (6.2.92) 知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2a_0\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant2(B(t)u_{x^2},u)-2\gamma_0\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+a_0\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\left(\frac{b_1^2}{a_0}-2\gamma_0\right)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

由此得

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{e}^{\left(\frac{b_1^2}{a_0}-2\gamma_0\right)t}.$$

□

6.3　一般线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题

本节考虑如下一般散度型线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题

$$Lu=-D_j(a_{ij}D_iu)+b_iD_iu+cu=f+D_if^i, \tag{6.3.1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{6.3.2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, a_{ij}, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $f^i \in L^2(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 重复指标代表从 1 到 n 求和, 系数矩阵 (a_{ij}) 满足一致椭圆型条件, 即存在常数 $0 < \lambda \leqslant \Lambda$, 使得

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega.$$

这时, 我们称方程 (6.3.1) 为一致椭圆型方程.

定义 6.3.1 称函数 $u \in H^1(\Omega)$ 为方程 (6.3.1) 的弱解, 如果对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 积分等式

$$\int_\Omega (a_{ij}D_iuD_j\varphi + b_iD_iu\cdot\varphi + cu\varphi)\mathrm{d}x = \int_\Omega (f\varphi - f^iD_i\varphi)\mathrm{d}x$$

都成立. 如果还有 $u \in H_0^1(\Omega)$, 则称 u 为 Dirichlet 问题 (6.3.1), (6.3.2) 的弱解.

定理 6.3.1 存在常数 c_0, 使得当 $c \geqslant c_0$ 时, 对任意 $f \in L^2(\Omega)$, $f^i \in L^2(\Omega)(i = 1, 2, \cdots, n)$, Dirichlet 问题 (6.3.1), (6.3.2) 存在唯一弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$.

证明 记

$$a(u,v) = \int_\Omega (a_{ij}D_iuD_jv + b_iD_iu\cdot v + cuv)\mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

显然 $a(u,v)$ 是双线性的. 因为 a_{ij}, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, 可知

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leqslant C_1\int_\Omega (|\nabla u||\nabla v| + |\nabla u||v| + |u||v|)\mathrm{d}x \\
&\leqslant C_1(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}) \\
&\leqslant C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

其中 ∇ 表示梯度算子, $C_2 > 0$ 为常数. 所以 $a(u,v)$ 是有界的. 另外, 应用椭圆型条件和带 ε 的 Cauchy 不等式, 对 $u \in H_0^1(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geqslant \lambda\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_3\int_\Omega |\nabla u||u|\mathrm{d}x + c_0\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geqslant \lambda\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{C_3^2}{2\varepsilon}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_0\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(c_0 - \frac{C_3^2}{2\varepsilon}\right)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

其中 $C_3 > 0$ 为常数. 取 $0 < \varepsilon < 2\lambda$, $c_0 > \dfrac{C_3^2}{2\varepsilon}$, 则对某个常数 $\delta > 0$, 成立

$$a(u,u) \geqslant \delta\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

即 $a(u,v)$ 满足强制性. 易知泛函

$$F(v)=\int_{\Omega}(fv-f^iD_iv)\mathrm{d}x$$

是 $H_0^1(\Omega)$ 上的线性泛函. 所以按照定理 1.4.3 (Lax-Milgram 定理), 存在唯一的 $u\in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant\frac{1}{\delta}\|F;H^{-1}\|,$$

且

$$a(u,v)=F(v),\quad \forall u\in H_0^1(\Omega),$$

即 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是 Dirichlet 问题 (6.3.1), (6.3.2) 的唯一弱解. □

6.4 具阻尼非线性双曲型方程的初边值问题

我们知道非线性抛物型方程或者是非线性双曲型方程的 Cauchy 问题和初边值问题, 当没有整体解时, 解可能在有限时刻发生爆破 (blow up). 研究非线性抛物型方程或者非线性双曲型方程解的爆破现象是有实际意义的. 本节讨论下列具阻尼非线性双曲型方程的初边值问题[48]

$$u_{tt}+k_1\nabla^4u+k_2\nabla^4u_t+\nabla^2g(\nabla^2u)=0,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\tag{6.4.1}$$

$$u=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial\nu}=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\tag{6.4.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega\tag{6.4.3}$$

解的爆破, 其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, Ω 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant2$ 是自然数) 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, k_1 和 k_2 是两个正常数, ∇ 表示梯度算子, $\nabla^2=\Delta$ 表示 Laplace 算子, $\nabla^4=\Delta^2$ 表示双调和算子, ν 表示 $\partial\Omega$ 上的外单位法向, $g(s)$ 是给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是给定的初值函数, 而下标 t 表示对 t 求偏导数.

关于初边值问题 (6.4.1)-(6.4.3) 局部解的存在性可用 Galerkin 方法证明. 于是对于问题 (6.4.1)-(6.4.3) 有下列定理.

定理 6.4.1 设 $n=3$, $u_0\in H^4(\Omega)$, $u_1\in H^2(\Omega)$, $g\in C^3(\mathbb{R})$, 则初边值问题 (6.4.1)-(6.4.3) 有唯一的广义解 $u\in C([0,T_0);H^4(\Omega))\cap C^1([0,T_0);H^2(\Omega))\cap H^1((0,T_0);H^4(\Omega))\cap H^2((0,T_0);L^2(\Omega))$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间.

为了很好地了解微分方程定解问题解的爆破现象, 我们用下面的常微分方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(u),\quad 0<t<\infty,\\ u(0)=a\end{cases}$$

来说明问题. 如果 $a>0, f(u)=u^2$, 解之得 $u(t)=\dfrac{a}{1-at}$. 显然当 $t\to\dfrac{1}{a}$ 时, $u(t)\to\infty$ (图 6.4.1). 用微分方程的术语来说 "在有限时刻解爆破了", 这就是说不可能有整体解.

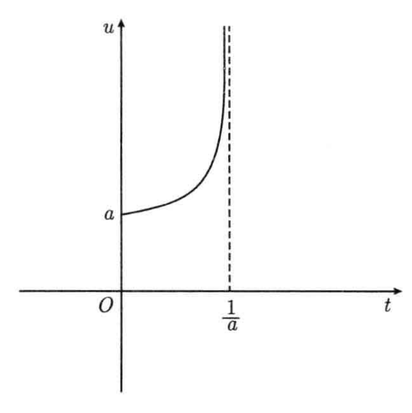


图 6.4.1

如果 $a<0$, 则解在 $t\geqslant 0$ 上整体存在. 且当 $t\to\infty$ 时, 解衰减为零.

定义 6.4.1　若存在 $\widetilde{T}(0<\widetilde{T}<\infty)$, 初边值问题 (6.4.1)-(6.4.3) 的解 $u(x,t)$ 在 $\overline{\Omega}\times[0,\widetilde{T})$ 上存在, 且当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^t\int_\Omega[\nabla^2u(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega[\nabla^2u(x,s)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\to\infty,$$

则称初边值问题 (6.4.1)-(6.4.3) 的解 $u(x,t)$ 在有限时刻内爆破.

为了给出初边值问题 (6.4.1)-(6.4.3) 解爆破的充分条件, 先引入两个引理.

引理 6.4.1[49]　设 $\dot{u}=F(t,u)$, $\dot{v}\geqslant F(t,v)$, $F\in C([0,\infty)\times(-\infty,\infty))$ 和 $u(t_0)=v(t_0)$, $t_0\geqslant 0$, 则当 $t\geqslant t_0$ 时, $v(t)\geqslant u(t)$.

引理 6.4.2[50]　设一正可导函数 $M(t)$ 满足不等式

$$\dot{M}(t)+M(t)\geqslant Ct^{\frac{1-r}{2}}(M(t))^{\frac{r+3}{4}},\quad t\geqslant t_1>0, \tag{6.4.4}$$

并附有条件

$$M(t)\geqslant -Ft^2+\dot{M}(0)t+M(0),\quad t\geqslant t_1>0, \tag{6.4.5}$$

其中 $M(0)$, $\dot{M}(0)$, $r>1$, $C>0$ 均为常数和

$$F\leqslant F_0<0,$$

且 F_0 为一常数, 则存在一常数 $\widetilde{T}$, 使得当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时, $M(t)\to\infty$.

证明　考虑 Bernoulli 方程的 Cauchy 问题

$$\dot{W}(t)+W(t)=Ct^{\frac{1-r}{2}}(W(t))^{\frac{r+3}{4}},\quad t>t_1, \tag{6.4.6}$$

$$W(t_1)=M(t_1). \tag{6.4.7}$$

解问题 (6.4.6), (6.4.7), 得

$$\begin{aligned}W(t)&=\mathrm{e}^{-(t-t_1)}\left\{(M(t_1))^{\frac{1-r}{4}}-\frac{C(r-1)}{4}\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{r-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau\right\}^{\frac{4}{1-r}}\\&=\mathrm{e}^{-(t-t_1)}M(t_1)Z^{\frac{4}{1-r}}(t),\quad t\geqslant t_1,\end{aligned} \tag{6.4.8}$$

其中

$$Z(t)=1-\frac{C(r-1)}{4}(M(t_1))^{\frac{r-1}{4}}\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{r-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau.$$

显然 $Z(t_1)=1$.

$$\begin{aligned}Q(t)&=\frac{C(r-1)}{4}(M(t_1))^{\frac{r-1}{4}}\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-r}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{r-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau\\&\geqslant\frac{C(r-1)}{4}(M(t_1))^{\frac{r-1}{4}}(t_1+1)^{\frac{1-r}{2}}\int_{t_1}^{t_1+1}\mathrm{e}^{-\frac{r-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau\\&=C(M(t_1))^{\frac{r-1}{4}}(t_1+1)^{\frac{1-r}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{r-1}{4}}\right),\quad t\geqslant t_1+1.\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

从式 (6.4.5) 推出, 当 $t\to\infty$ 时,

$$(M(t))^{\frac{r-1}{4}}(t+1)^{\frac{1-r}{2}}\geqslant\left\{\frac{-Ft^2+\dot{M}(0)(t)+M(0)}{(t+1)^2}\right\}^{\frac{r-1}{4}}\to(-F)^{\frac{r-1}{4}}.$$

取 t_1 充分大, 使得

$$(M(t_1))^{\frac{r-1}{4}}(t_1+1)^{\frac{1-r}{2}}\geqslant\frac{1}{2}(-F)^{\frac{r-1}{4}}.$$

从式 (6.4.9) 和对 F 的假定断言

$$Q(t)\geqslant\frac{C}{2}(-F)^{\frac{r-1}{4}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{r-1}{4}}\right)\geqslant 1,\quad t\geqslant t_1+1. \tag{6.4.10}$$

所以

$$Z(t)=1-Q(t)\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1+1. \tag{6.4.11}$$

根据 $Z(t)$ 的连续性和中值定理存在常数 $\widetilde{T}(t_1<\widetilde{T}\leqslant t_1+1)$, 使得 $Z(\widetilde{T})=0$. 因此当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时, $W(t)\to\infty$. 由引理 6.4.1 知, $M(t)\geqslant W(t)$, $t\geqslant t_1$. 于是当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时, $M(t)\to\infty$. □

定理 6.4.2 设下列条件成立:

(1) $sg(s) \leqslant KG(s)$, $G(s) \leqslant -\alpha|s|^{q+1}$, 其中 $G(s) = \int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$, $K > 2$, $\alpha > 0$ 和 $q > 1$ 是常数;

(2) $k_2 = 1$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ 和

$$E(0) = \|u_1\|^2 + k_1\|\nabla^2 u_0\|^2 + 2\int_\Omega G(\nabla^2 u_0)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{-4|\Omega|}{\left[\dfrac{(K-2)\alpha\}}{q+3}\right]^{\frac{2}{q-1}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{q-1}{4}})^{\frac{4}{q-1}}} < 0,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示空间 $L^2(\Omega)$ 的范数, $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度, 则问题 (6.4.1)-(6.4.3) 的广义解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega [\nabla^2 u(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega [\nabla^2 u(x,s)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \to \infty.$$

证明 方程 (6.4.1) 两端同乘以 $2u_t$, 并在 Ω 上积分, 得

$$\dot{E}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{6.4.12}$$

其中

$$E(t) = \|u_t(\cdot,t)\|^2 + k_1\|\nabla^2 u(\cdot,t)\|^2 + 2k_2\int_0^t \|\nabla^2 u_t(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau + 2\int_\Omega G(\nabla^2 u(x,t))\mathrm{d}x.$$

从而

$$E(t) = E(0) < 0, \quad t > 0. \tag{6.4.13}$$

令

$$M(t) = \|u(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega [\nabla^2 u(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega [\nabla^2 u(x,s)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,$$

则

$$\dot{M}(t) = 2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Omega [\nabla^2 u(x,t)]^2\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega [\nabla^2 u(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau. \tag{6.4.14}$$

应用定理 6.4.2 的假定条件 (1) 和条件 (2), 并注意到

$$K\int_\Omega G(\nabla^2 u(x,t))\mathrm{d}x = E(0) - \|u_t(\cdot,t)\|^2 - 2k_2\int_0^t \|\nabla^2 u_\tau(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau - k_1\|\nabla^2 u(\cdot,t)\|^2$$
$$+ (K-2)\int_\Omega G(\nabla^2 u(x,t))\mathrm{d}x,$$

有

$$
\begin{aligned}
\ddot{M}(t) &= 2\int_\Omega \left\{u_t^2(x,t) + u(x,t)u_{tt}(x,t) + \nabla^2 u(x,t)\nabla^2 u_t(x,t) + \frac{1}{2}[\nabla^2 u(x,t)]^2\right\}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_\Omega \Big\{u_t^2(x,t) - k_1[\nabla^2 u(x,t)]^2 - k_2\nabla^2 u(x,t)\nabla^2 u_t(x,t) - \nabla^2 u(x,t) g(\nabla^2 u(x,t)) \\
&\quad + \nabla^2 u(x,t)\nabla^2 u_t(x,t) + \frac{1}{2}[\nabla^2 u(x,t)]^2\Big\}\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_\Omega \left\{u_t^2(x,t) - k_1[\nabla^2 u(x,t)]^2 - KG[\nabla^2 u(x,t)] + \frac{1}{2}[\nabla^2 u(x,t)]^2\right\}\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_\Omega \left\{4u_t^2(x,t) + [\nabla^2 u(x,t)]^2 - 2E(0) - 2(K-2)\int_\Omega G(\nabla^2 u(x,t))\right\}\mathrm{d}x \\
&\geqslant 4\|u_t(\cdot,t)\|^2 - 2E(0) + \|\nabla^2 u(\cdot,t)\|^2 \\
&\quad + 2(K-2)\alpha\int_\Omega |\nabla^2 u(x,t)|^{q+1}\mathrm{d}x > 0, \quad t>0.
\end{aligned} \tag{6.4.15}
$$

由式 (6.4.15) 推知

$$
\dot{M}(t) \geqslant -2E(0)t + 2(K-2)\alpha\int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u(x,\tau)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \dot{M}(0), \tag{6.4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
M(t) &\geqslant -E(0)t^2 + 2(K-2)\alpha\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u(x,s)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \dot{M}(0)t + M(0),
\end{aligned} \tag{6.4.17}
$$

其中 $\dot{M}(0) = 2\int_\Omega u_0(x)u_1(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega [\nabla^2 u_0(x)]^2\mathrm{d}x, M(0) = \|u_0\|^2$.

从式 (6.4.15)~ 式 (6.4.17) 可见

$$
\begin{aligned}
&\ddot{M}(t) + \dot{M}(t) + M(t) \\
\geqslant& 4\|u_t(\cdot,t)\|^2 + 2(K-2)\alpha\Big\{\int_\Omega |\nabla^2 u(x,t)|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u(x,\tau)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u(x,s)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\Big\} \\
&+ \|\nabla^2 u(\cdot,t)\|^2 - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right) + \dot{M}(0)(t+1) + M(0).
\end{aligned} \tag{6.4.18}
$$

将式 (6.4.14) 代入式 (6.4.18) 左端得到

$$
\begin{aligned}
&\ddot{M}(t) + M(t) + 2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Omega [\nabla^2 u(x,t)]^2\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega [\nabla^2 u(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
\geqslant& 4\|u_t(\cdot,t)\|^2 + 2(K-2)\alpha\Big\{\int_\Omega |\nabla^2 u(x,t)|^{q+1}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^t\int_\Omega|\nabla^2u(x,\tau)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega|\nabla^2u(x,s)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\Big\}$$
$$+\|\nabla^2u(\cdot,t)\|^2-2E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\dot{M}(0)(t+1)+M(0). \tag{6.4.19}$$

因为 $\ddot{M}(t)>0$, $M(t)\geqslant 0$ 和

$$2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2,$$

由式 (6.4.19) 导出

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t)+M(t)\geqslant{}&(K-2)\alpha\left\{\int_\Omega|\nabla^2u(x,t)|^{q+1}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_\Omega|\nabla^2u(x,\tau)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right.\\&\left.+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega|\nabla^2u(x,s)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right\}-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)\\&+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0).\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

利用 Hölder 不等式和索伯列夫空间的等价范数得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla^2u(x,t)|^{q+1}\mathrm{d}x&\geqslant|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\|\nabla^2u\|^{q+1}\\&\geqslant|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\left(\|u\|^2+\sum_{|\gamma|=2}\|D^\gamma u\|^2\right)^{\frac{q+1}{2}}\\&\geqslant|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\|u\|^{q+1},\end{aligned} \tag{6.4.21}$$

其中 D 表示求导数和 γ 是一 n 重指数.

类似地可得

$$\int_0^t\int_\Omega|\nabla^2u(x,\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant|\Omega|^{\frac{q-1}{q+1}}t^{\frac{q-1}{q+1}}\left\{\int_0^t\int_\Omega|\nabla^2u(x,\tau)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right\}^{\frac{2}{q+1}}. \tag{6.4.22}$$

由式 (6.4.22) 推出

$$\int_0^t\int_\Omega|\nabla^2u(x,\tau)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\geqslant|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}t^{\frac{1-q}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega|\nabla^2u(x,\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}. \tag{6.4.23}$$

类似地可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega|\nabla^2u(x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\\leqslant{}&|\Omega|^{\frac{q-1}{q+1}}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega|\nabla^2u(x,s)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{2}{q+1}}.\end{aligned} \tag{6.4.24}$$

由式 (6.4.24) 导出

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla^2 u(x,s)|^{q+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\
\geqslant &|\Omega|^{\frac{1-q}{2}} 2^{\frac{q-1}{2}} t^{1-q} \left(\int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla^2 u(x,s)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \right)^{\frac{q+1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{6.4.25}
$$

将式 (6.4.21), 式 (6.4.23) 和式 (6.4.25) 代入式 (6.4.20), 并利用不等式

$$
(a+b+c)^m \leqslant 2^{2m-2}(a^m+b^m+c^m), \quad a,b,c>0, \quad m>1,
$$

有

$$
\begin{aligned}
\ddot{M}(t) + M(t) \geqslant &(K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}} \left\{ \left[\int_\Omega |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x \right]^{\frac{q+1}{2}} \right. \\
&+ t^{\frac{1-q}{2}} \left[\int_0^t \int_\Omega |\nabla^2 u(x,\tau)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \right]^{\frac{q+1}{2}} \\
&\left. + 2^{\frac{q-1}{2}} t^{1-q} \left[\int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla^2 u(x,s)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \right]^{\frac{q+1}{2}} \right\} \\
&- E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) + \frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1) + \frac{1}{2}M(0) \\
\geqslant &(K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}} t^{1-q} 2^{1-q} M^{\frac{q+1}{2}}(t) - E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) \\
&+ \frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1) + \frac{1}{2}M(0), \quad t \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{6.4.26}
$$

由式 (6.4.16), 式 (6.4.17) 知, 当 $t\to\infty$ 时, $M(t)\to\infty$ 和 $\dot{M}(t)\to\infty$. 所以存在一个 $t_0\geqslant 1$, 使得 $M(t)>0$ 和 $\dot{M}(t)>0 (t\geqslant t_0)$. 式 (6.4.26) 两端同乘以 $2\dot{M}(t)$ 和利用式 (6.4.16) 得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{M}^2(t) + M^2(t)] \geqslant C_1 t^{1-q} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M^{\frac{q+3}{2}}(t) + H(t), \quad t \geqslant t_0,
\tag{6.4.27}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&C_1 = \frac{2(K-2)\alpha}{2^{q-2}(3+q)|\Omega|^{\frac{q-1}{2}}}, \\
&H(t) = [-4E(0)t + 2\dot{M}(0)] \left[-E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) + \frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1) + \frac{M(0)}{2} \right].
\end{aligned}
$$

从式 (6.4.27) 可见

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^{q-1}(\dot{M}^2(t) + M^2(t)) - C_1 M^{\frac{q+3}{2}}(t)] \geqslant t^{q-1} H(t), \quad t \geqslant t_0.
\tag{6.4.28}
$$

在 (t_0,t) 上积分式 (6.4.28) 有

$$
\begin{aligned}
&t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t))-C_1M^{\frac{q+3}{2}}(t)\\
\geqslant&\int_{t_0}^{t}\tau^{q-1}H(\tau)\mathrm{d}\tau+t_0^{q-1}(\dot{M}^2(t_0)+M^2(t_0))-C_1M^{\frac{q+3}{2}}(t_0),\quad t\geqslant t_0. \quad (6.4.29)
\end{aligned}
$$

注意到当 $t\to\infty$ 时, 式 (6.4.29) 的右端趋于正无穷大, 所以存在 $t_1\geqslant t_0$, 使得当 $t\geqslant t_1$ 时, 式 (6.4.29) 的右端大于或等于零. 因此有

$$
t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t))\geqslant C_1M^{\frac{q+3}{2}}(t),\quad t\geqslant t_1.
$$

上式两端开方, 得

$$
\dot{M}(t)+M(t)\geqslant C_2t^{\frac{1-q}{2}}M^{\frac{q+3}{4}}(t),\quad t\geqslant t_1, \tag{6.4.30}
$$

其中 $C_2=\sqrt{C_1}$.

由式 (6.4.17) 推出

$$
M(t)\geqslant -E(0)t^2+\dot{M}(0)t+M(0).
$$

根据引理 6.4.2 存在一常数 $\widetilde{T}$, 使得当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时,

$$
\|u(\cdot,t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega[\nabla^2u(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega[\nabla^2u(x,s)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\to\infty. \qquad \square
$$

6.5 广义立方双色散方程的初边值问题

在本节我们研究下列广义立方双色散方程的初边值问题

$$
u_{tt}-u_{xx}-au_{xxtt}+bu_{x^4}-du_{xxt}=f(u)_{xx},\quad x\in\Omega,\ t>0, \tag{6.5.1}
$$

$$
u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u_{xx}(0,t)=u_{xx}(l,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{6.5.2}
$$

$$
u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{6.5.3}
$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $f(s)$ 是给定的非线性函数, $\Omega=(0,l)$, $a,b>0$ 和 d 是常数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数, 且满足边值条件 (6.5.2).

在物理问题中有不少方程可以化为方程 (6.5.1). 事实上, 非线性波在波导管中传播时, 经过波导管侧面波导管和外部介质的能量交换的可能性是不能忽略的. 如果考虑由超弹性材料 (即 Murnaghan 材料) 制成的非线性弹性杆的表面和由 Winkler 或者 Pasternak[51] 提出的介质之间的交换模型, 则杆的纵向位移满足下面的双色散方程 (DDE):

$$
u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(6u^2+au_{tt}-bu_{xx})_{xx}. \tag{6.5.4}
$$

此方程由 Hamiltonian 原理得到 [52,53]. 类似地, 可得一般的双色散方程 DDE (CDDE, 参见文献 [52], [53]):

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(cu^3+6u^2+au_{tt}-bu_{xx}+du_t)_{xx},\tag{6.5.5}$$

其中 $u(x,t)$ 是纵向位移和是与弯曲 $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ 成比例, $U(x,t)$ 是横向位移, $a>0$, $b>0$, $c>0$ 和 $d\neq 0$ 是依赖于杨氏模数、切变模数 μ、波导管密度 ρ 和 Poisson 系数 ν 的一些常数. 显然, 如果 $f(u)=\dfrac{c}{4}u^3+\dfrac{3}{2}u^2$ 以及 a,b 和 d 分别由 $\dfrac{a}{4},\dfrac{b}{4}$ 和 $\dfrac{d}{4}$ 代替, 方程 (6.5.1) 变成方程 (6.5.5). 如果 $d=0$, $f(u)=\dfrac{3}{2}u^2$ 以及 a 和 b 分别由 $\dfrac{a}{4}$ 和 $\dfrac{b}{4}$ 代替, 方程 (6.5.1) 变成方程 (6.5.4).

为了得到初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 存在整体广义解和整体古典解, 考虑下列辅助问题

$$v_{tt}-v_{xx}-av_{xxtt}+bv_{x^4}-dv_{xxt}=f(v_x)_x,\quad x\in\Omega,\quad t>0,\tag{6.5.6}$$

$$v_x(0,t)=v_x(l,t)=0,\quad v_{xxx}(0,t)=v_{xxx}(l,t)=0,\quad t\geqslant 0,\tag{6.5.7}$$

$$v(x,0)=\varphi(x),\qquad v_t(x,0)=\psi(x),\qquad x\in\overline{\Omega},\tag{6.5.8}$$

其中 $v(x,t)$ 是未知函数, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是已知初值函数, 常数 a,b,d 同方程 (6.5.1).

首先利用 Galerkin 方法证明辅助问题 (6.5.6)-(6.5.8) 存在唯一的整体光滑古典解 $v(x,t)$, 然后通过变换 $v_x(x,t)=u(x,t)$, $\varphi_x(x)=u_0(x)$ 和 $\psi_x(x)=u_1(x)$ 可以得到初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 整体广义解和整体古典解. 现将初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 解的存在唯一性定理叙述如下, 详细情况见文献 [54].

定理 6.5.1 设 $u_0\in H^4(\Omega)$, $u_1\in H^3(\Omega)$, $f\in C^3(\mathbb{R})$ 和 $f'(s)$ 下有界, 则初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 存在唯一整体广义解

$$u\in C([0,T];H^4(\Omega))\bigcap C^1([0,T];H^3(\Omega))\bigcap C^2([0,T];H^2(\Omega)).$$

定理 6.5.2 设 $u_0\in H^6(\Omega)$, $u_1\in H^5(\Omega)$, $f\in C^4(\Omega)$, $f^{(i)}(0)=0(i=2,4)$ 和 $f'(s)$ 下有界, 则初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 有唯一整体古典解 $u(x,t)$.

为了研究初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 解的爆破现象, 先建立一个关于二阶常微分不等式引理, 然后利用它讨论初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 解的爆破.

引理 6.5.1[55] 设 $w(t)\in C[0,\infty)\bigcap C^2(0,\infty)$ 和满足常微不等式

$$\ddot{w}(t)+\sigma_1\dot{w}(t)+\sigma_2 w(t)\geqslant\sigma_3 h(\sigma_4 w),\quad t>0,\tag{6.5.9}$$

且 $w(t)$ 还满足条件

$$w(0)=w_0,\quad \dot{w}(0)=w_1,\tag{6.5.10}$$

其中 $\sigma_2 \geqslant 0, \sigma_3 > 0, \sigma_4 > 0, w_0 > 0, w_1 > 0$ 均为常数, 而 σ_1 是任意实数.

如果 $h(s) \in C^2(\mathbb{R})$ 是一偶且凸的函数和满足条件

(1) $h(0) = 0$ 和 $\sigma_3 h(\sigma_4 w_0) - \sigma_2 w_0 \geqslant 0$;

(2) 当 $s \to \infty$ 时, $h(s)$ 增长得足够快, 使得当 $\sigma_1 > 0$ 时, 积分

$$\mathcal{B}_0 = \sigma_1 \int_{w_0}^{\infty} \left\{ w_1^2 + 2\int_{w_0}^{y} [\sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s] \mathrm{d}s \right\}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \tag{6.5.11}$$

收敛, 同时 $\mathcal{B}_0 < 1$; 当 $\sigma_1 \leqslant 0$ 时, 积分

$$\mathcal{T}_5 = \int_{w_0}^{\infty} \left\{ w_1^2 + 2\int_{w_0}^{y} \sigma_3 h(\sigma_4 s)\mathrm{d}s - \sigma_2 y^2 + \sigma_2 w_0^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \tag{6.5.12}$$

收敛, 则当 $\sigma_1 > 0$ 时, 对于某个有限时刻 $t_1 \leqslant \mathcal{T}_4 = -\dfrac{1}{\sigma_1}\ln(1 - \mathcal{B}_0)$

$$\lim_{t \to t_1^-} w(t) = \infty;$$

当 $\sigma_1 \leqslant 0$ 时, 对于某个有限时刻 $t_2 \leqslant \mathcal{T}_5$

$$\lim_{t \to t_2^-} w(t) = \infty,$$

其中 $\mathcal{T}_5$ 由式 (6.5.12) 给定.

证明 首先指出对于所有的 $s \geqslant w_0$, $\sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s \geqslant 0$. 事实上, 由于 $h \in C^2(\mathbb{R})$ 是一偶且凸的函数, 所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} h(\sigma_4 s) \geqslant 0$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} h(0) = 0$. 如果令 $f(s) = \sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} f(s) = \sigma_3 \sigma_4^2 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} h(\sigma_4 s) \geqslant 0$. 因此 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s)$ 是一单增函数. 根据

$$f(0) = h(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(0) = \sigma_3 \sigma_4 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} h(0) - \sigma_2 = -\sigma_2 \leqslant 0$$

和 $f(w_0) \geqslant 0$, 所以 $f(s)$ 在 $(0, w_0)$ 中某一点 s_0 取最小值和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s_0) = 0$. 由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s)$ 的单增性, 我们发现 $s \geqslant s_0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s) \geqslant \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s_0) = 0$, 即当 $s \geqslant s_0$ 时, $f(s)$ 是一单增函数. 特别地, $f(s)$ 在 $[w_0, \infty)$ 上是单增的和 $f(s) \geqslant f(w_0) \geqslant 0$. 这样一来, 对于所有的 $s \geqslant w_0$, $\sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s \geqslant 0$.

现在证明对于任意的 $t > 0$, $\dot{w}(t) > 0$. 设这个结果不真, 则存在 $t_0 > 0$, 使得当 $0 < t < t_0$ 时, $\dot{w}(t) > 0$, 但 $\dot{w}(t_0) = 0$.

首先我们考虑 $\sigma_1 > 0$ 的情况. 式 (6.5.9) 两端同乘以 $\mathrm{e}^{\sigma_1 t}$ 和在 $(0, t)$ 上积分, 得到

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\mathrm{e}^{\sigma_1 \tau} \dot{w}\right) \mathrm{d}\tau \geqslant \int_0^t [\sigma_3 h(\sigma_4 w) - \sigma_2 w] \mathrm{e}^{\sigma_1 \tau} \mathrm{d}\tau. \tag{6.5.13}$$

根据 t_0 的定义, 对于 $w(t) \geqslant w_0$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, 由式 (6.5.13) 导出

$$\dot{w}(t) \geqslant \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}\left\{w_1 + \int_0^t [\sigma_3 h(\sigma_4 w) - \sigma_2 w]\mathrm{e}^{\sigma_1 \tau}\mathrm{d}\tau\right\} \geqslant \mathrm{e}^{-\sigma_1 t} w_1, \quad t \in (0, t_0). \tag{6.5.14}$$

因此 $\dot{w}(t_0) \geqslant \mathrm{e}^{-\sigma_1 t} w_1 > 0$, 这与 $\dot{w}(t_0) = 0$ 矛盾. 所以对于 $t > 0$, $\dot{w}(t) > 0$, 容易看出对于 $t > 0$, $w(t) > w_0$.

式 (6.5.9) 两端同乘以 $2\mathrm{e}^{2\sigma_1 t}\dot{w}$, 在 $(0, t)$ 上积分并注意到 $\mathrm{e}^{2\sigma_1 t} > 1$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\sigma_1 t}\dot{w}^2 &\geqslant w_1^2 + 2\int_0^t \mathrm{e}^{2\sigma_1 \tau}[\sigma_3 h(\sigma_4 w) - \sigma_2 w]\dot{w}\mathrm{d}\tau \\ &\geqslant w_1^2 + 2\int_{w_0}^{w(t)} [\sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

从而

$$\dot{w} \geqslant \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}\left\{w_1^2 + 2\int_{w_0}^{w(t)} [\sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s]\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0. \tag{6.5.15}$$

式 (6.5.15) 分离变量化为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\left\{w_1^2 + 2\int_{w_0}^{w(t)} [\sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s]\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}\mathrm{d}t. \tag{6.5.16}$$

在 $(0, t)$ 上积分式 (6.5.16) 得

$$1 - \mathrm{e}^{-\sigma_1 t} \leqslant \sigma_1 \int_{w_0}^{w(t)} \left\{w_1^2 + 2\int_{w_0}^{y} [\sigma_3 h(\sigma_4 s) - \sigma_2 s]\mathrm{d}s\right\}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y. \tag{6.5.17}$$

于是在有限时刻 $t_1 \leqslant \mathcal{T}_4 = -\dfrac{1}{\sigma_1}\ln(1 - \mathcal{B}_0)$, $w(t)$ 发生奇性, 使得当 $t \to t_1^-$ 时, $w(t) \to \infty$.

当 $\sigma_1 \leqslant 0$ 时, 类似地可证 $w(t) > w_0$ 和对于 $t > 0$, $\dot{w}(t) > 0$. 于是式 (6.5.9) 化为

$$\ddot{w} \geqslant \sigma_3 h(\sigma_4 w) - \sigma_2 w, \quad t > 0. \tag{6.5.18}$$

式 (6.5.18) 两端同乘以 $2\dot{w}$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{w}^2 + \sigma_2 w^2 - 2\int_{w_0}^{w} \sigma_3 h(\sigma_4 s)\mathrm{d}s\right] \geqslant 0,$$

从而

$$\dot{w}^2 \geqslant w_1^2 + 2\int_{w_0}^{w} \sigma_3 h(\sigma_4 s)\mathrm{d}s - \sigma_2 w^2 + \sigma_2 w_0^2. \tag{6.5.19}$$

类似地, 由式 (6.5.19) 断定

$$t \leqslant \int_{w_0}^{w} \left\{ w_1^2 + 2\int_{w_0}^{y} \sigma_3 h(\sigma_4 s)\mathrm{d}s - \sigma_2 y^2 + \sigma_2 w_0^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y.$$

因此 $w(t)$ 在有限时刻 $t_2 \leqslant \mathcal{T}_5$ 发生奇性, 使得当 $t \to t_2^-$ 时, $w(t) \to \infty$. □

定理 6.5.3 设 $u(x,t)$ 是初边值问题 (6.5.1)-(6.5.3) 的广义解或是古典解. 又设下列条件成立:

(1) $-\dfrac{\pi}{2l}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \alpha > 0$; $-\dfrac{\pi}{2l}\displaystyle\int_\Omega u_1(x)\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \beta > 0$;

(2) (a)$f(s) \in C^2(\mathbb{R})$ 是满足

$$f(0) = 0 \quad 和 \quad f(\alpha) - \frac{l^2 + b\pi^2}{l^2}\alpha \geqslant 0$$

的一偶且凸的函数;

(b) 当 $s \to \infty$ 时, $f(s)$ 增长得足够快, 使得当 $d > 0$ 时, 积分

$$\mathcal{B} = \frac{d\pi^2}{l^2 + a\pi^2}\int_\alpha^\infty \left[\beta^2 + \frac{2\pi^2}{l^2 + a\pi^2}\int_\alpha^y \left(f(s) - \frac{l^2 + b\pi^2}{l^2}s\right)\mathrm{d}s\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \tag{6.5.20}$$

收敛, 同时 $\mathcal{B} < 1$; 对于 $d \leqslant 0$, 积分

$$\overline{T}_2 = \int_\alpha^\infty \left[\beta^2 + \frac{2\pi^2}{l^2 + a\pi^2}\left(\int_\alpha^y f(s)\mathrm{d}s - \frac{l^2 + b\pi^2}{2l^2}y^2\right) + \frac{\pi^2(l^2 + b\pi^2)}{l^2(l^2 + a\pi^2)}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \tag{6.5.21}$$

收敛, 则当 $d > 0$ 时, 对于某个有限时刻 $t_0 \leqslant \overline{T}_1 = -\dfrac{l^2 + a\pi^2}{d\pi^2}\ln(1 - \mathcal{B})$,

$$\lim_{t \to t_0^-}\sup_{x \in \Omega} |u(x,t)| = \infty; \tag{6.5.22}$$

当 $d \leqslant 0$ 时, 对于某个时刻 $t_0 \leqslant \overline{T}_2$,

$$\lim_{t \to t_0}\sup_{x \in \Omega} |u(x,t)| = \infty, \tag{6.5.23}$$

其中 $\overline{T}_2$ 由式 (6.5.21) 给定.

证明 令

$$\phi(t) = -\frac{\pi}{2l}\int_\Omega u(x,t)\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

方程 (6.5.1) 两端同乘以 $\dfrac{\pi}{2l}\sin\dfrac{\pi x}{l}$, 并在 Ω 上积分和分部积分, 得

$$\left(1 + \frac{a\pi^2}{l^2}\right)\ddot{\phi} + \frac{d\pi^2}{l^2}\dot{\phi} + \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{b\pi^4}{l^4}\right)\phi = -\frac{\pi}{2l}\int_\Omega f(u)_{xx}\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x. \tag{6.5.24}$$

因为 $f(s)$ 是一偶且凸的函数, 进行分部积分和利用 Jensen 不等式有

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2l}\int_{\Omega} f(u)_{xx}\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x =& \frac{\pi^3}{2l^3}\int_{\Omega} f(u)\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x \\
\geqslant& \frac{\pi^2}{l^2}f\left(-\frac{\pi}{2l}\int_{\Omega} u\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi^2}{l^2}f(\phi). \quad (6.5.25)
\end{aligned}
$$

将式 (6.5.25) 代入式 (6.5.24) 可知

$$
\ddot{\phi} + \frac{d\pi^2}{l^2+a\pi^2}\dot{\phi} + \frac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}\phi \geqslant \frac{\pi^2}{l^2+a\pi^2}f(\phi), \quad (6.5.26)
$$

和 $\phi(0)=\alpha>0$, $\dot{\phi}(0)=\beta>0$. 因为 $\sigma_2=\dfrac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}>0$, $\sigma_3=\dfrac{\pi^2}{l^2+a\pi^2}>0$, $\sigma_1=\dfrac{d\pi^2}{l^2+a\pi^2}$ 是任意实数和 $\sigma_4=1$, 所以根据引理 6.5.1 知

$$
\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}|u(x,t)|=\infty.
$$

□

下面利用定理 6.5.1 证明问题 (6.5.5),(6.5.2),(6.5.3) 存在唯一的整体广义解. 我们有

定理 6.5.4　设 $u_0\in H^4(\Omega), u_1\in H^3(\Omega)$, 则问题 (6.5.5),(6.5.2),(6.5.3) 存在唯一的整体广义解 $u\in C([0,T];H^4(\Omega))\cap C^1([0,T];H^3(\Omega))\cap C^2([0,T];H^2(\Omega))$.

证明　根据定理 6.5.1 只需证明 $f'(u)=\dfrac{1}{4}(3cu^2+12u)$ 下有界. 事实上,

$$
f'(u)=\frac{1}{4}(3cu^2+12u)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3c}u+\frac{6}{\sqrt{3c}}\right)^2-\frac{3}{c}\geqslant-\frac{3}{c}.
$$

□

现在应用定理 6.5.3 证明问题 (6.5.4), (6.5.2), (6.5.3) 的解在有限时刻爆破. 利用 Galerkin 方法可以证明此问题存在唯一的局部广义解和唯一的局部古典解.

定理 6.5.5　设 $u(x,t)$ 是问题 (6.5.4),(6.5.2),(6.5.3) 的广义解. 又设下列条件成立:

(1) $-\dfrac{\pi}{2l}\displaystyle\int_{\Omega} u_0(x)\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\alpha>0,\ -\frac{\pi}{2l}\int_{\Omega} u_1(x)\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\beta>0$;

(2) $\dfrac{3}{2}\alpha^2-\dfrac{l^2+b\pi^2}{l^2}\alpha>0$,

则对于某一有限时刻 $t_0\leqslant\overline{T}_2$,

$$
\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}|u(x,t)|=\infty. \quad (6.5.27)
$$

证明　因为

$$
\begin{aligned}
\overline{T}_2 &= \int_{\alpha}^{\infty}\left[\beta^2+\frac{2\pi^2}{l^2+a\pi^2}\left(\int_{\alpha}^{y}\frac{3s^2}{2}\mathrm{d}s-\frac{l^2+b\pi^2}{2l^2}y^2\right)+\frac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\alpha}^{\infty}\left[\beta^2+\frac{\pi^2}{l^2+a\pi^2}\left(y^3-\alpha^3-\frac{l^2+b\pi^2}{l^2}y^2\right)+\frac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

收敛, 由定理 6.5.3 立得式 (6.5.27) 成立. □

6.6 一类四阶非线性发展方程初边值问题解的渐近性质

本节研究下列四阶非线性发展方程初边值问题

$$u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 u_{xxt} - a_3 u_{xxtt} = \varphi(u_x)_x, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{6.6.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{6.6.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in [0,1] \tag{6.6.3}$$

解的渐近性质, 其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $a_i > 0\ (i = 1,2,3)$ 是常数,$\varphi(s)$ 是已知的非线性函数,$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是给定的初值函数.

在文献 [56] 中研究弹性杆中的非线性波时, 提出了如下的四阶发展方程

$$u_{tt} - C_0^2[1 + na_n u_x^{n-1}]u_{xx} - \beta u_{xxtt} = \gamma u_{xxt}, \tag{6.6.4}$$

其中 $C_0^2, \gamma > 0, \beta > 0$ 和 $a_n \neq 0$ 为常数和 n 为自然数. 显然方程 (6.6.4) 是方程 (6.6.1) 的特殊情形.

关于初边值问题 (6.6.1)-(6.6.3) 引入文献 [57] 的如下解的存在定理.

定理 6.6.1 设 $u_0, u_1 \in C^2[0,1], u_0(0) = u_0(1) = 0, u_1(0) = u_1(1) = 0, \varphi \in C^2(\mathbb{R})$ 且满足条件:

$$|\varphi(s)| \leqslant A \int_0^s \varphi(y)\mathrm{d}y + B,$$

其中 A 和 B 是正常数, 则初边值问题 (6.6.1)-(6.6.3) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

为了研究初边值问题 (6.6.1)-(6.6.3) 解的渐近性质, 需要以下引理.

引理 6.6.1[58] 设 $E : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_+ = [0,\infty))$ 是一非增函数并假定存在一常数 $T > 0$, 使得

$$\int_t^\infty E(s)\mathrm{d}s \leqslant TE(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{6.6.5}$$

那么

$$E(t) \leqslant E(0)\mathrm{e}^{1-\frac{t}{T}}, \quad \forall t \geqslant T. \tag{6.6.6}$$

证明 定义

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{T}} \int_x^\infty E(s)\mathrm{d}s, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

则由式 (6.6.5) 知, $f(x)$ 是局部绝对连续函数, 且是非增的. 因为

$$f'(x) = T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{x}{T}} \left(\int_x^\infty E(s)\mathrm{d}s - TE(x) \right) \leqslant 0, \quad \text{a.e.}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

所以再利用式 (6.6.5) 有

$$f(x) \leqslant f(0) = \int_0^\infty E(s)\mathrm{d}s \leqslant TE(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

即

$$\int_x^\infty E(s)\mathrm{d}s \leqslant TE(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{T}}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{6.6.7}$$

由于 E 是非负的和非增的, 得

$$\int_x^\infty E(s)\mathrm{d}s \geqslant \int_x^{x+T} E(s)\mathrm{d}s \geqslant TE(x+T).$$

将此式代入式 (6.6.7) 推得

$$E(x+T) \leqslant E(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{T}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

令 $x+T=t$, 于是断言式 (6.6.6) 成立. □

定理 6.6.2[59] 设 $u(x,t)$ 是初边值问题 (6.6.1)-(6.6.3) 的整体古典解, 又设以下条件成立:

(1) $G(s) \geqslant 0, \forall s \in \mathbb{R}$,

(2) $2G(s) \leqslant s\varphi(s), \forall s \in \mathbb{R}$,

(3) $u_0, u_1 \in H^1(0,1)$,

则

$$E(t) \leqslant E(0)\mathrm{e}^{1-\omega t},$$

其中

$$\omega = \left\{\frac{1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{2a_1} + \max\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3}\right) + \max\frac{1}{2}\left(1, \frac{a_3}{a_1}\right)\right\}^{-1},$$

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (|u_t|^2 + a_1|u_x|^2 + a_3|u_{xt}|^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 G(u_x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (|u_1|^2 + a_1|u_{0x}|^2 + a_3|u_{1x}|^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 G(u_{0x})\mathrm{d}x - a_2\int_0^t\int_0^1 |u_{xt}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

和

$$G(s) = \int_0^s \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

证明 经简单的计算给出对于初边值问题 (6.6.1)-(6.6.3) 的任意古典解 $u(x,t)$

$$\begin{aligned}
E(S) - E(T) &= -a_2\int_0^s\int_0^1 |u_{xt}|^2\mathrm{d}t + a_2\int_0^T\int_0^1 |u_{xt}|^2\mathrm{d}t \\
&= a_2\int_S^T\int_0^1 |u_{xt}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \forall 0 \leqslant S \leqslant T < \infty.
\end{aligned} \tag{6.6.8}$$

所以能量 $E(t)$ 是非增的.

方程 (6.6.1) 两端乘以 $u(x,t)$, 在 $(S,T)\times(0,1)$ 上积分, 并进行分部积分, 有

$$\begin{aligned}&\int_S^T\int_0^1[a_1u_x^2-u_t^2-a_3u_{xt}^2+2G(u_x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\=&-\left[\int_0^1 uu_t\mathrm{d}x\right]_S^T-\frac{a_2}{2}\left[\int_0^1 u_x^2\mathrm{d}x\right]_S^T-a_3\left[\int_0^1 u_{xt}u_x\mathrm{d}x\right]_S^T\\&+\int_S^T\int_0^1(2G(u_x)-\varphi(u_x)u_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant S<T<\infty.\end{aligned}\tag{6.6.9}$$

因为

$$2\int_S^T E(t)\mathrm{d}t=\int_S^T\int_0^1[|u_t|^2+a_1|u_x|^2+a_3|u_{xt}|^2+2G(u_x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{6.6.10}$$

式 (6.6.10) 两端各加 $2\int_S^T\int_0^1[|u_t|^2+a_3|u_{xt}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 后, 得

$$\begin{aligned}2\int_S^T E(t)\mathrm{d}t=&2\int_S^T\int_0^1(|u_t|^2+a_3|u_{xt}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\left[\int_0^1 uu_t\mathrm{d}x\right]_S^T-\left[\frac{a_2}{2}\int_0^1|u_x|^2\mathrm{d}x\right]_S^T\\&-a_3\left[\int_0^1 u_{xt}u_x\mathrm{d}x\right]_S^T+\int_S^T\int_0^1[2G(u_x)-\varphi(u_x)u_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{6.6.11}$$

根据假定 (2) 由式 (6.6.11) 推出

$$\begin{aligned}2\int_S^T E(t)\mathrm{d}t\leqslant&2\int_S^T\int_0^1(|u_t|^2+a_3|u_{xt}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\left[\int_0^1 uu_t\mathrm{d}x\right]_S^T-\left[\frac{a_2}{2}\int_0^1|u_x|^2\mathrm{d}x\right]_S^T\\&-a_3\left[\int_0^1 u_{xt}u_x\mathrm{d}x\right]_S^T.\end{aligned}\tag{6.6.12}$$

利用 $E(t)$ 的非增性质、Poincaré 不等式、Cauchy 不等式和 $E(t)$ 的定义, 可见

$$2\int_S^T\int_0^1|u_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant2\int_S^T\int_0^1|u_{xt}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{2}{a_2}[E(S)-E(T)]\leqslant\frac{2}{a_2}E(S);\tag{6.6.13}$$

$$2a_3\int_S^T\int_0^1|u_{xt}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{2a_3}{a_2}[E(S)-E(T)]\leqslant\frac{2a_3}{a_2}E(S);\tag{6.6.14}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 uu_t\mathrm{d}x\right|&\leqslant\frac12\int_0^1(|u|^2+|u_t|^2)\mathrm{d}x\leqslant\frac12\int_0^1(|u_x|^2+|u_{xt}|^2)\mathrm{d}x\\&=\frac12\int_0^1\left(\frac{a_1}{a_1}|u_x|^2+\frac{a_3}{a_3}|u_{xt}|^2\right)\mathrm{d}x\leqslant\max\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3}\right)E(t);\end{aligned}\tag{6.6.15}$$

$$\frac{a_2}{2}\int_0^1 |u_x|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{a_2}{a_1}E(t); \tag{6.6.16}$$

$$\left|a_3\int_0^1 u_{xt}u_x \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}a_3\int_0^1 (|u_{xt}|^2+|u_x|^2)\mathrm{d}x \leqslant \max\left(1,\frac{a_3}{a_1}\right)E(t). \tag{6.6.17}$$

应用估计 (6.6.12)-(6.6.16), 我们由式 (6.6.12) 断定

$$\int_S^T E(t)\mathrm{d}t \leqslant \left\{\frac{1}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_2}{2a_1}+\frac{1}{2}\max\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3}\right)+\frac{1}{2}\max\left(1,\frac{a_3}{a_1}\right)\right\}E(S),$$
$$\forall 0\leqslant S\leqslant T<\infty. \tag{6.6.18}$$

令 $T\to\infty$, 由式 (6.6.18) 导出

$$\int_S^\infty E(t)\mathrm{d}t \leqslant \left\{\frac{1}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_2}{2a_1}+\frac{1}{2}\max\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3}\right)+\frac{1}{2}\max\left(1,\frac{a_3}{a_1}\right)\right\}E(S),\ \forall S\geqslant 0$$

及由引理 6.6.1 断言

$$E(t)\leqslant E(0)\mathrm{e}^{1-\omega t}, \quad \forall t\geqslant 0. \qquad \square$$

现在, 利用定理 6.6.2 证明初边值问题 (6.6.4), (6.6.2), (6.6.3) 解的渐近性质. 显然, 由定理 6.6.1 可以证明初边值问题 (6.6.4), (6.6.2), (6.6.3) 存在唯一整体古典解.

定理 6.6.3 设 $u(x,t)$ 是初边值问题 (6.6.4), (6.6.2), (6.6.3) 的整体古典解. 又设 $a_n>0$, n 是一奇数且 $u_0,u_1\in H^1(0,1)$, 则

$$E_1(t)\leqslant E_1(0)\mathrm{e}^{1-\omega t},$$

其中

$$\omega=\left\{\frac{1}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{2C_0^2}+\frac{1}{2}\max\left(\frac{1}{C_0^2},\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{2}\max\left(1,\frac{\beta}{C_0^2}\right)\right\}^{-1},$$

$$E_1(t)=\frac{1}{2}\int_0^1(|u_t|^2+C_0^2|u_x|^2+\beta|u_{xt}|^2)\mathrm{d}x+\int_0^1 G_1(u_x)\mathrm{d}x,$$

$$G_1(s)=\int_0^s C_0^2 a_n\tau^n\mathrm{d}\tau. \qquad \square$$

6.7 广义 IMBq 型方程组的初边值问题

本节研究一类广义 IMBq 型方程组的初边值问题存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解, 并给出解爆破的充分条件.

6.7.1 问题的提出和广义解的定义

近年来, Toda 晶格已经用于模拟纵波在脱氧核糖核酸 (DNA) 分子中的传播 [60−62]. 文献 [63] 得到纵形变和横形变, $\phi(x,t)$ 和 $\psi(x,t)$ 的下列连续方程组:

$$\frac{\rho}{a}\phi_{tt}=\beta\phi_{xx}+\frac{\beta}{2}(\psi^2)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{\ell^2}{12}\phi_{xxtt}, \tag{6.7.1}$$

$$\frac{\rho}{a}\psi_{tt}=\frac{\beta}{2}(\psi^3)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{\ell^2}{12}\psi_{xxtt}, \tag{6.7.2}$$

其中 ℓ 和 $\dfrac{1}{b}$ 是模型中具有特性的长度, 它们的比值由 $\beta=\ell b$ 表示; ρ 是线性质量密度; $a>0$ 是常数.

方程组 (6.7.1), (6.7.2) 与 IMBq 方程 [64]

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=(u^3)_{xx} \tag{6.7.3}$$

有密切的关系. 我们称方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}=(u^2)_{xx} \tag{6.7.4}$$

为 Bq 方程. 此方程 1872 年由 J. Boussinesq 描述浅水波而得到的. 改进的 Bq 方程 (称为 IBq 方程) 是

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=(u^2)_{xx}. \tag{6.7.5}$$

修正的 IBq 方程就是方程 (6.7.3), 称为 IMBq 方程. 多变量的 IMBq 方程是

$$u_{tt}-\nabla^2u_{tt}-\nabla^2u=\nabla^2u^3. \tag{6.7.6}$$

下面研究下列广义 IMBq 型方程组的初边值问题

$$\phi_{tt}-A\phi_{xx}-B\phi_{xxtt}=m(\psi)_{xx},\quad 0<x<\ell_1,t>0, \tag{6.7.7}$$

$$\psi_{tt}-B\psi_{xxtt}=n(\psi)_{xx},\quad 0<x<\ell_1,t>0, \tag{6.7.8}$$

$$\phi(0,x)=\phi(\ell_1,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{6.7.9}$$

$$\psi(0,x)=\psi(\ell_1,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{6.7.10}$$

$$\phi(x,0)=\phi_0(x),\quad \phi_t(x,0)=\phi_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant \ell_1, \tag{6.7.11}$$

$$\psi(x,0)=\psi_0(x),\quad \psi_t(x,0)=\psi_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant \ell_1, \tag{6.7.12}$$

其中 $\phi(x,t)$ 和 $\psi(x,t)$ 是未知函数; $\ell_1>0$, $A,B>0$ 是常数; $m(s)$ 和 $n(s)$ 是给定的非线性函数; $\phi_0(x),\phi_1(x),\psi_0(x)$ 和 $\psi_1(x)$ 是已知的初值函数, 且它们都满足边值条件. 显然, 方程组 (6.7.1), (6.7.2) 是方程组 (6.7.7), (6.7.8) 的特殊情形.

为了讨论方便起见, 作变量替换. 令

$$x = \sqrt{B}y, \quad t = t, \tag{6.7.13}$$

则方程组 (6.7.7), (6.7.8) 变为

$$\phi_{tt}(\sqrt{B}y,t) - \frac{A}{B}\phi_{yy}(\sqrt{B}y,t) - \phi_{yytt}(\sqrt{B}y,t) = \frac{1}{B}m(\psi(\sqrt{B}y,t))_{yy}, \tag{6.7.14}$$

$$\psi_{tt}(\sqrt{B}y,t) - \psi_{yytt}(\sqrt{B}y,t) = \frac{1}{B}n(\psi(\sqrt{B}y,t))_{yy}. \tag{6.7.15}$$

如果在式 (6.7.14) 和式 (6.7.15) 中以 x 代替 y 和 $\phi(\sqrt{B}x,t) = u(x,t)$, $\psi(\sqrt{B}x,t) = v(x,t)$, $\frac{1}{B}m(\psi(\sqrt{B}x,t)) = f(v(x,t))$, $\frac{1}{B}n(\psi(\sqrt{B}x,t)) = g(v(x,t))$, 则问题 (6.7.7)-(6.7.12) 可以写成

$$u_{tt}(x,t) - Du_{xx}(x,t) - u_{xxtt}(x,t) = f(v(x,t))_{xx}, \tag{6.7.16}$$

$$v_{tt}(x,t) - v_{xxtt}(x,t) = g(v(x,t))_{xx}, \tag{6.7.17}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \tag{6.7.18}$$

$$v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \tag{6.7.19}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{6.7.20}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \tag{6.7.21}$$

其中 $D = \frac{A}{B}$, $\ell = \frac{\ell_1}{\sqrt{B}}$; $u_0(x) = \phi_0(\sqrt{B}x)$, $u_1(x) = \phi_1(\sqrt{B}x)$, $v_0(x) = \psi_0(\sqrt{B}x)$ 和 $v_1(x) = \psi_1(\sqrt{B}x)$ 是定义在 $[0,\ell]$ 上且满足边值条件 $u_0(0) = u_1(\ell) = v_0(0) = v_1(\ell) = 0$.

在这里我们只研究问题 (6.7.16)-(6.7.21) 整体广义解的存在唯一性, 整体古典解的存在唯一性和解的爆破, 因为通过变换 (6.7.13) 由问题 (6.7.16)-(6.7.21) 可以得到问题 (6.7.7)-(6.7.12) 同样结果.

为了求问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的广义解, 我们将问题 (6.7.16)-(6.7.21) 利用二阶常微分方程边值问题的 Green 函数化为积分方程的边值问题.

令 $K(x,\xi)$ 是二阶常微分方程边值问题

$$y(x) - y''(x) = 0, \quad y(0) = y(\ell) = 0$$

的 Green 函数, 即

$$K(x,\xi) = \frac{1}{\sinh\ell}\begin{cases} \sinh(\ell-\xi)\sinh x, & 0 \leqslant x < \xi, \\ \sinh\xi\sinh(\ell-x), & \xi \leqslant x \leqslant \ell. \end{cases} \tag{6.7.22}$$

易证 $K(x,\xi) < \frac{e^\ell - 1}{2(e^\ell + 1)} < \frac{1}{2}$.

现在, 假定 $(u(x,t),v(x,t))$ 是问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的古典解, 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 满足下列方程组和边值条件:

$$[u_{tt}+Du+f(v)]-[u_{tt}+Du+f(v)]_{xx}=Du+f(v), \tag{6.7.23}$$

$$[v_{tt}+g(v)]-[v_{tt}+g(v)]_{xx}=g(v), \tag{6.7.24}$$

$$u_{tt}(0,t)+Du(0,t)+f(v(0,t))=0, \tag{6.7.25}$$

$$u_{tt}(\ell,t)+Du(\ell,t)+f(v(\ell,t))=0, \tag{6.7.26}$$

$$v_{tt}(0,t)+g(v(0,t))=0, \tag{6.7.27}$$

$$v_{tt}(\ell,t)+g(v(\ell,t))=0. \tag{6.7.28}$$

为了讨论方便, 这里假定 $f(0)=0$ 和 $g(0)=0$, 否则可以用 $f(v)-f(0)$ 代替 $f(v)$ 和用 $g(v)-g(0)$ 代替 $g(v)$. 由式 (6.7.23)-(6.7.28) 有

$$u_{tt}(x,t)+Du(x,t)+f(v(x,t))=\int_0^\ell K(x,\xi)\{Du(\xi,t)+f(v(\xi,t))\}\mathrm{d}\xi, \tag{6.7.29}$$

$$v_{tt}(x,t)+g(v(x,t))=\int_0^\ell K(x,\xi)g(v(\xi,t))\mathrm{d}\xi. \tag{6.7.30}$$

式 (6.7.29) 和式 (6.7.30) 对 t 积分两次, 得到

$$\begin{aligned}u(x,t)=&u_0(x)+u_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{Du(x,\tau)+f(v(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\int_0^\ell(t-\tau)K(x,\xi)\{Du(\xi,\tau)+f(v(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{6.7.31}$$

$$\begin{aligned}v(x,t)=&v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)g(v(x,\tau))\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\int_0^\ell(t-\tau)K(x,\xi)g(v(\xi,\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{6.7.32}$$

所以问题 (6.7.23)-(6.7.28) 的任意古典解满足积分方程组 (6.7.31), (6.7.32) 以及边值条件

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0, \tag{6.7.33}$$

$$v(0,t)=v(\ell,t)=0. \tag{6.7.34}$$

定义 6.7.1 对于任意 $T>0$ 如果 $(u(x,t),v(x,t))\in C([0,T];C[0,\ell])$(即 $u(x,t)$, $v(x,t)\in C([0,T];C[0,\ell])$) 满足积分方程组 (6.7.31), (6.7.32) 和边值条件 (6.7.33) 和 (6.7.34), 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 称为积分方程组 (6.7.31), (6.7.32) 具有边值条件 (6.7.33) 和 (6.7.34) 的连续解或问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的广义解. 如果 $T<\infty$, 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 称为问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的局部广义解. 如果 $T=\infty$, 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 称为问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的整体广义解.

6.7.2 初边值问题 (6.7.17),(6.7.19),(6.7.21) 的整体解

为了证明问题 (6.7.16)-(6.7.21) 存在唯一整体广义解, 根据定义 6.7.1, 只需证明具有边值条件 (6.7.33) 和 (6.7.34) 的积分方程组 (6.7.31), (6.7.32) 存在唯一的整体连续解 $(u(x,t),v(x,t))\in C([0,T];C[0,\ell])(\forall T>0)$. 为此, 首先证明具有边值条件 (6.7.34) 的积分方程 (6.7.32) 有唯一的整体连续解 $v(x,t)\in C([0,T];C[0,\ell])(\forall T>0)$. 其次, 证明具有边值条件 (6.7.33) 的积分方程 (6.7.31) 存在唯一整体连续解 $u(x,t)\in C([0,T];C[0,\ell])(\forall T>0)$. 因此, 我们可以得到具有边值条件 (6.7.33) 和 (6.7.34) 的积分方程组 (6.7.31), (6.7.32) 有唯一的整体连续解 $(u(x,t),v(x,t))\in C([0,T];C[0,\ell])(\forall T>0)$, 即问题 (6.7.16)-(6.7.21) 存在唯一整体广义解.

下面证明具有边值条件 (6.7.34) 的积分方程 (6.7.32) 解的存在性. 为此, 考虑下列具有边值条件和小扩散项的积分方程

$$\begin{aligned}v(x,t)=&v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon v(x,\tau)+g(v(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\int_0^\ell(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon v(\xi,\tau)+g(v(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{6.7.35}$$

$$v(0,t)=v(\ell,t)=0,\tag{6.7.36}$$

其中 $0<\varepsilon<1$. 现在, 证明具有边值条件 (6.7.36) 的积分方程 (6.7.35) 存在局部连续解.

定义函数空间

$$X(T)=\{v(x,t)\in C([0,T];C[0,\ell]),v(0,t)=v(\ell,t)=0\}$$

并赋予由

$$\|v\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\max_{0\leqslant x\leqslant\ell}|v(x,t)|,\quad\forall v\in X(T)$$

定义的范数. 易知 $X(T)$ 是一 Banach 空间. 令 $U=\|v_0\|_{C[0,\ell]}+\|v_1\|_{C[0,l]}$. 取集合

$$P(U,T)=\{v|v\in X(T),\|v\|_{X(T)}\leqslant 2U+1\}.$$

显然, 对于每一对 $U,T>0$, $P(U,T)$ 是一非空有界闭凸子集.

定义映射 S 如下:

$$\begin{aligned}Sw=&v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon w(x,\tau)+g(w(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\int_0^\ell(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon w(\xi,\tau)+g(w(\varepsilon,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,\quad\forall w\in X(T).\end{aligned}\tag{6.7.37}$$

显然, S 映 $X(T)$ 到 $X(T)$.

引理 6.7.1 设 $v_0, v_1 \in C[0,\ell]$, $v_0(0) = v_0(\ell) = v_1(0) = v_1(\ell) = 0$ 和 $g(s) \in C^1(\mathbb{R})$, 则问题 (6.7.35), (6.7.36) 存在唯一局部连续解 $v_\varepsilon(x,t) \in C([0,T_0); C[0,\ell])$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间和 T_0 是不依赖于 ε 的常数. 同时, 如果

$$\sup_{0\leqslant t<T_0} \|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} + \sup_{0\leqslant t<T_0} \|v_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} < \infty, \tag{6.7.38}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 设 $w(x,t) \in P(U,T)$. 定义

$$\overline{g}(\eta) = \max_{|s|\leqslant\eta}(|g(s)| + |g'(s)|), \quad \forall \eta \geqslant 0.$$

注意到 $\overline{g}(\eta)$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续的和非减的. 由式 (6.7.37) 得

$$\|Sw\|_{X(T)} \leqslant U + UT + \frac{2+\ell}{4}[2U + 1 + \overline{g}(2U+1)]T^2. \tag{6.7.39}$$

如果

$$T \leqslant \min\left(1, \left[\frac{4}{(2+\ell)(2U+1+\overline{g}(2U+1))}\right]^{\frac{1}{2}}\right), \tag{6.7.40}$$

则 $\|Sw\|_{X(T)} \leqslant 2U+1$. 因此, 若条件 (6.7.40) 成立, 则 S 映 $P(U,T)$ 到 $P(U,T)$.

令 $T>0$ 和 $w_1, w_2 \in P(U,T)$ 是给定的, 我们有

$$\begin{aligned} Sw_1 - Sw_2 = &-\int_0^t (t-\tau)\{\varepsilon(w_1(x,\tau) - w_2(x,\tau)) + g(w_1(x,\tau)) - g(w_2(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\ell (t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon(w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)) + g(w_1(\xi,\tau)) \\ &- g(w_2(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

g 利用中值定理, 得

$$\|Sw_1 - Sw_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{2+\ell}{4}T^2[1+\overline{g}(2U+1)]\|w_1 - w_2\|_{X(T)}. \tag{6.7.41}$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \min\left(1, \left[\frac{4}{(2+\ell)(2U+1+\overline{g}(2U+1))}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[\frac{2}{(2+\ell)(1+\overline{g}(2U+1))}\right]^{\frac{1}{2}}\right), \tag{6.7.42}$$

则$\|Sw_1 - Sw_2\|_{X(T)} \leqslant \dfrac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_{X(T)}$. 所以 $S: P(U,T) \to P(U,T)$ 是严格压缩的. 由压缩映射原理推出, 对于适当选择的 $T>0$, S 有唯一的不动点 $v_\varepsilon(x,t) \in P(U,T)$, 它是问题 (6.7.35), (6.7.36) 的连续解. 易证对于每一个 $T'>0$, 问题 (6.7.35), (6.7.36) 最多有一解属于 $X(T')$.

令 $[0,T_0)$ 是 $v_\varepsilon \in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 即问题 (6.7.35), (6.7.36) 存在唯一的局部连续解 $v_\varepsilon \in C([0,T_0);C[0,\ell])$. 余下仅证明, 如果式 (6.7.38) 成立, 则 $T_0=\infty$. 设式 (6.7.38) 成立和 $T_0<\infty$. 对于任意的 $T'\in[0,T_0)$, 考虑积分方程

$$\begin{aligned}w_\varepsilon(x,t)=&v_\varepsilon(x,T')+v_{\varepsilon t}(x,T')t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon w_\varepsilon(x,\tau)+g(w_\varepsilon(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\int_0^\ell(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon w_\varepsilon(\xi,\tau)+g(w_\varepsilon(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{6.7.43}$$

和边值条件

$$w_\varepsilon(0,t)=w_\varepsilon(\ell,t)=0.\tag{6.7.44}$$

根据式 (6.7.38), $\|v_\varepsilon(\cdot,T')\|_{C[0,\ell]}+\|v_{\varepsilon t}(\cdot,T')\|_{C[0,\ell]}$ 在 $T'\in[0,T_0)$ 上是一致有界的, 允许我们选择 $T^*\in(0,T_0)$, 使得对于每一个 $T'\in[0,T_0)$ 积分方程 (6.7.43) 和边值条件 (6.7.44) 有唯一解 $w_\varepsilon(x,t)\in X(T^*)$. 由上面的方法导出如此的 T^* 的存在性. 特别地, 式 (6.7.42) 显示 T^* 的选择不依赖于 $T'\in[0,T_0)$. 置 $T'=T_0-\dfrac{T^*}{2}$, 令 w_ε 表示问题 (6.7.43), (6.7.44) 对应的解和由

$$\overline{v}_\varepsilon(x,t)=\begin{cases}v_\varepsilon(x,t), & t\in[0,T'],\\ w_\varepsilon(x,t-T'), & t\in\left[T',T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]\end{cases}$$

定义 $\overline{v}_\varepsilon(x,t):[0,\ell]\times\left[0,T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]\to\mathbb{R}$.

依构造 $\overline{v}_\varepsilon(x,t)$ 是问题 (6.7.43), (6.7.44) 在 $\left[0,T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]$ 上的解和根据局部解的唯一性, $\overline{v}_\varepsilon(x,t)$ 是 $v_\varepsilon(x,t)$ 的延拓. 这就违背了 $[0,T_0)$ 是最大时间区间. 因此如果式 (6.7.38) 成立, 则 $T_0=\infty$. □

下面证明积分方程 (6.7.35), (6.7.36) 整体连续解的存在性和唯一性. 为此, 我们作问题 (6.7.35), (6.7.36) 解的先验估计.

引理 6.7.2 设 $v_0,v_1\in C[0,\ell]$, $g(s)\in C(\mathbb{R})$ 和下列不等式

$$|g(s)|\leqslant AG(s)+B\tag{6.7.45}$$

成立, 其中 $G(s)=\displaystyle\int_0^s g(y)\mathrm{d}y$ 和 $A,B>0$ 是常数, 则问题 (6.7.35), (6.7.36) 的解 $v_\varepsilon(x,\ t)\ \in C([0,\ T];\ C[0,\ \ell])$ 有估计

$$\int_0^\ell|g(v_\varepsilon(x,t))|\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^\ell v_\varepsilon^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant M_1(T),\qquad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{6.7.46}$$

这里和以后 $M_i(T)$ 和 $C_i(T)$ $(i=1,2,\cdots)$ 表示依赖于 T, 但不依赖于 ε 的常数.

证明 在式 (6.7.35) 中以 $v(x,t)$ 代 $v_\varepsilon(x,t)$ 并对它对 t 求导数, 得

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon_t}(x,t) =& v_1(x) - \int_0^t \{\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) + g(v_\varepsilon(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^\ell K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) + g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.47}$$

式 (6.7.47) 两端同乘以 $\varepsilon v_\varepsilon(x,t)$, 乘积对 t 积分和注意到

$$\int_0^t \int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)\mathrm{d}s\right]^2 \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2,$$

则有

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{2}v_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2 + \varepsilon\int_0^t \int_0^\tau g(v_\varepsilon(x,s))v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ =&\frac{\varepsilon}{2}v_0^2 + \varepsilon v_1(x)\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau + \varepsilon^2\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\ell K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &+ \varepsilon\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\ell K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.48}$$

式 (6.7.47) 两端乘以 $g(v_\varepsilon(x,t))$ 和乘积对 t 积分, 可见

$$\begin{aligned} &G(v_\varepsilon(x,t)) + \frac{1}{2}\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]^2 + \varepsilon\int_0^t \int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ =&G(v_0(x)) + v_1(x)\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau \\ &+ \varepsilon\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\ell K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\ell K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.49}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^\tau g(v_\varepsilon(x,s))v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_0^\tau g(v_\varepsilon(x,\tau))v_\varepsilon(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ =&\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau \int_0^\tau v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.50}$$

将式 (6.7.48) 加到式 (6.7.49) 上, 并对和式在 $[0,\ell]$ 上对 x 积分, 得

$$\begin{aligned}
&2\int_0^\ell G(v_\varepsilon(x,t))\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^\ell v_\varepsilon^2(x,t)\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int_0^\ell\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}x\\
&+\int_0^\ell\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,t))\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}x\\
=&2\int_0^\ell G(v_0(x))\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^\ell v_0^2(x)\mathrm{d}x\\
&+2\int_0^\ell v_1(x)\int_0^t[\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\
&+2\varepsilon^2\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\ell K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\
&+2\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\ell K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\
&+2\varepsilon\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\ell K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\
&+2\varepsilon\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\ell K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\
&-2\varepsilon\int_0^\ell\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{6.7.51}$$

为了改写式 (6.7.51) 我们利用在式 (6.7.50) 中用的方法, 变换式 (6.7.51) 的一些项如下:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\ell K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\
=&\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\
&-\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)v_\varepsilon(\xi,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{6.7.52}$$

利用 $K(x,\xi)$ 关于 x 和 ξ 的对称性, 由式 (6.7.52) 推出

$$\begin{aligned}
&2\int_0^\ell\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\
=&\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{6.7.53}$$

类似地可得

$$2\int_0^\ell\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\mathrm{d}\tau\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x, \tag{6.7.54}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell\int_0^\ell\int_0^t\int_0^\tau K(x,\xi)[g(v_\varepsilon(\xi,s))v_\varepsilon(x,t)+v_\varepsilon(\xi,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\=&\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.7.55}$$

将式 (6.7.53) 和式 (6.7.54) 代入式 (6.7.51) 得

$$\begin{aligned}&2\int_0^\ell G(v_\varepsilon(x,t))\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^\ell v_\varepsilon^2(x,t)\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int_0^\ell\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}x\\&+\int_0^\ell\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}x\\=&2\int_0^\ell G(v_0(x))\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^\ell v_0^2(x)\mathrm{d}x+2\int_0^\ell v_1(x)\int_0^t[\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)\\&+g(v_\varepsilon(x,\tau))]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\&+\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\mathrm{d}\tau\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\&+2\varepsilon\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\&-2\varepsilon\int_0^\ell\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.7.56}$$

现在, 对式 (6.7.56) 的右端项作一系列估计. 利用 Cauchy 不等式、Hölder 不等式和条件 (6.7.45) 可知

$$\begin{aligned}&2\int_0^\ell v_1(x)\int_0^t\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\\leqslant&(\mathrm{e}^\ell+1)\int_0^\ell v_1^2(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{e}^\ell+1}\int_0^\ell\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{6.7.57}$$

$$\begin{aligned}&2\int_0^\ell v_1(x)\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\\leqslant&2(\mathrm{e}^\ell+1)\int_0^\ell v_1^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2(\mathrm{e}^\ell+1)}\int_0^\ell\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{6.7.58}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\int_0^\ell\int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\\leqslant&\frac{(\mathrm{e}^\ell-1)\varepsilon^2}{2(\mathrm{e}^\ell+1)}\int_0^\ell\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{6.7.59}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\ell \int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\mathrm{d}\tau \int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
\leqslant &\frac{\mathrm{e}^\ell-1}{2(\mathrm{e}^\ell+1)}\int_0^\ell \left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{6.7.60}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon\int_0^\ell \int_0^\ell K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\mathrm{d}\tau \int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x \\
\leqslant &\frac{(\mathrm{e}^\ell-1)}{2(\mathrm{e}^\ell+1)}\int_0^\ell \left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]^2 \mathrm{d}x \\
&+\frac{(\mathrm{e}^\ell-1)\varepsilon^2}{2(\mathrm{e}^\ell+1)}\int_0^\ell \left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{6.7.61}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\varepsilon\int_0^\ell \left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau \int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x \\
\leqslant &\frac{1}{2(\mathrm{e}^\ell+1)}\int_0^\ell \left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right]^2 \mathrm{d}x \\
&+2(\mathrm{e}^\ell+1)\varepsilon^2 T\int_0^\ell \int_0^t v_\varepsilon^2(x,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{6.7.62}
$$

将式 (6.7.57)~ 式 (6.7.62) 代入式 (6.7.56), 得

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^\ell G(v_\varepsilon(x,t))\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^\ell v_\varepsilon^2(x,t)\mathrm{d}x \\
\leqslant &2\int_0^\ell G(v_0(x))\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^\ell v_0^2(x)\mathrm{d}x+3(\mathrm{e}^\ell+1)\int_0^\ell v_1^2(x)\mathrm{d}x \\
&+2(\mathrm{e}^\ell+1)\varepsilon^2 T\int_0^t \int_0^\ell v_\varepsilon^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{6.7.63}
$$

由式 (6.7.63) 利用 Gronwall 不等式和不等式 (6.7.45) 推出式 (6.7.46). □

引理 6.7.3 在引理 6.7.2 的假定下, 问题 (6.7.35), (6.7.36) 的广义解有估计

$$
v_{\varepsilon t}^2+\varepsilon v_\varepsilon^2 \leqslant M_2(T),\quad 0\leqslant x\leqslant \ell,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{6.7.64}
$$

证明 (6.7.47) 对 t 求导有

$$
v_{\varepsilon tt}(x,t)+\varepsilon v_\varepsilon(x,t)+g(v_\varepsilon(x,t))=\int_0^\ell K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t)+g(v_\varepsilon(\xi,t))\}\mathrm{d}\xi. \tag{6.7.65}
$$

式 (6.7.65) 两端同乘以 $Av_{\varepsilon t}(x,t)$ 和利用条件 (6.7.45) 和估计 (6.7.46), 可见

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Av_{\varepsilon t}^2(x,t)+\varepsilon Av_\varepsilon^2(x,t)+2(AG(v_\varepsilon(x,t))+B)] \\
=&2A\int_0^\ell K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t)+g(v_\varepsilon(\xi,t))\}\mathrm{d}\xi v_{\varepsilon t}(x,t)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant A\left\{\sqrt{\varepsilon\ell}\left[\int_0^\ell \varepsilon v_\varepsilon^2(\xi,t)\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}+\int_0^\ell |g(v_\varepsilon(\xi,t))|\mathrm{d}\xi\right\}|v_{\varepsilon t}(x,t)|$$
$$\leqslant C_1(T)|v_{\varepsilon t}(x,t)|. \tag{6.7.66}$$

式 (6.7.66) 对 t 积分, 得

$$\begin{aligned}&Av_{\varepsilon t}^2(x,t)+A\varepsilon v_\varepsilon^2(x,t)+2[AG(v_\varepsilon(x,t)+B]\\\leqslant&Av_1^2(x)+A\varepsilon v_0^2(x)+2[AG(v_0(x))+B]+C_2(T)\\&+\int_0^T Av_{\varepsilon t}^2(x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{6.7.67}$$

由式 (6.7.67) 和 Gronwall 不等式推出估计 (6.7.64). □

定理 6.7.1 设 $v_0,v_1\in C[0,\ell]$ 满足边值条件 (6.7.18) 和 $g\in C^1(\mathbb{R})$ 满足条件 (6.7.45), 则问题 (6.7.35), (6.7.36)存在唯一整体广义解$v_\varepsilon\in C([0,T];C[0,\ell])(\forall T>0)$.

证明 根据引理 6.7.1 只需证明条件 (6.7.38) 成立. 事实上,

$$v_\varepsilon^2(x,t)=\left[\int_0^t v_{\varepsilon\tau}(x,\tau)\mathrm{d}\tau+v_0(x)\right]^2\leqslant 2T\int_0^t v_{\varepsilon\tau}^2(x,\tau)\mathrm{d}\tau+2v_0^2(x). \tag{6.7.68}$$

由估计 (6.7.64) 和式 (6.7.68) 有

$$v_\varepsilon^2(x,t)\leqslant M_3(T),\quad 0\leqslant x\leqslant \ell,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{6.7.69}$$

又由估计 (6.7.64) 和式 (6.7.69) 得

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]}+\|v_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]}\leqslant M_4(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

因此

$$\sup_{0\leqslant t<T_0}\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]}+\sup_{0\leqslant t<T_0}\|v_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]}<\infty.$$ □

为了证明问题 (6.7.35), (6.7.36) 整体古典解的存在性, 我们将研究问题 (6.7.35), (6.7.36) 整体广义解的正则性.

引理 6.7.4 设定理 6.7.1 的条件成立, $v_0,v_1\in C^k[0,\ell]$ 和 $g\in C^{k+m}(\mathbb{R})$, 其中 $k\geqslant 1$, $m\geqslant 0$ 均为任意整数, 则问题 (6.7.35), (6.7.36) 的广义解 $v_\varepsilon(x,t)\in C^{m+2}([0,T];C^{k-1}[0,\ell])(\forall T>0)$.

证明 利用数学归纳法证明. 当 $m=1$ 时, 在式 (6.7.35) 中用 $v_\varepsilon(x,t)$ 代替 $v(x,t)$, 并对 x 求导此方程, 得

$$\begin{aligned}v_{\varepsilon x}(x,t)=&v_{0x}(x)+v_{1x}(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon v_{\varepsilon x}(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))_x\}\mathrm{d}x\\&+\int_0^t\int_0^\ell(t-\tau)K_x(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau)+g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{6.7.70}$$

因此, 注意到式 (6.7.69) 可知

$$\|v_{\varepsilon x}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} \leqslant \|v_{0x}\|_{C[0,\ell]} + T\|v_{1x}\|_{C[0,\ell]} + C_3(T)\int_0^t \|v_{\varepsilon x}(\cdot,\tau)\|_{C[0,\ell]}\mathrm{d}\tau + C_4(T).$$

由 Gronwall 不等式推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} \leqslant M_5(T). \tag{6.7.71}$$

当 $m=2$ 时, 式 (6.7.70) 对 x 求导和应用 $K(x,\xi)=K_{xx}(x,\xi)$ $(x\neq\xi)$, 有

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon xx}(x,t) =& v_{0xx}(x) + v_{1xx}(x)t - \int_0^t (t-\tau)\{\varepsilon v_{\varepsilon x}(x,\tau) + g(v_\varepsilon(x,\tau))_{xx}\}\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^t\int_0^\ell (t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) + g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.72}$$

从式 (6.7.72) 导出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon xx}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} \leqslant M_6(T). \tag{6.7.73}$$

现在假定, 当 $m=k-1$ 时, 估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x^{k-1}}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} \leqslant M_7(T) \tag{6.7.74}$$

成立. 可以证明当 $m=k$ 时, 估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x^{k}}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} \leqslant M_8(T) \tag{6.7.75}$$

也成立.

当 $k=2j-1$ $(j=1,2,\cdots)$ 时, 即 k 是一奇数, 式 (6.7.70) 对 x 求导 $(2j-2)$ 次, 有

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon x^{2j-1}}(x,t) =& v_{0x^{2j-1}}(x) + v_{1x^{2j-1}}t - \int_0^t (t-\tau)\sum_{i=1,3,\cdots,2j-1}[\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) \\ &+ g(v_\varepsilon(x,\tau))]_{x^i}\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\ell (t-\tau)K_x(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) \\ &+ g(v_\varepsilon(\xi,\tau))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.76}$$

当 $k=2j$ $(j=1,2,\cdots)$ 时, 即 k 是一偶数, 式 (6.7.70) 对 x 求导 $(2j-1)$ 次, 得

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon x^{2j}}(x,t) =& v_{0x^{2j}}(x) + v_{1x^{2j}}(x)t - \int_0^t (t-\tau)\sum_{i=0,2,\cdots,2j}[\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) \\ &+ g(v_\varepsilon(x,\tau))]_{x^i}\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\ell (t-\tau)K(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) \\ &+ g(v_\varepsilon(\xi,\tau))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.77}$$

由式 (6.7.76) 和式 (6.7.77) 推出

$$\begin{aligned}\|v_{\varepsilon x^k}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} \leqslant &\|v_{0x^k}\|_{C[0,\ell]} + T\|v_{1x^k}\|_{C[0,\ell]} \\ &+ C_5(T)\int_0^t \|v_{\varepsilon x^k}(\cdot,\tau)\|_{C[0,\ell]}\mathrm{d}\tau + C_6(T).\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得式 (6.7.75). 又由式 (6.7.75) 知

$$v_\varepsilon(x,t) \in C([0,T];C^{k-1}[0,\ell]).$$

在式 (6.7.77) 中令 $k-1=2j$ $(j=0,1,\cdots)$. 此结果对 t 求导, 得

$$\begin{aligned}v_{\varepsilon x^{2j}t}(x,t) =& v_{1x^{2j}} - \int_0^t \sum_{i=0,2,\cdots,2j} [\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) + g(v_\varepsilon(x,\tau))]_{x^i}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\ell K(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) + g(v_\varepsilon(\xi,\tau))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\tag{6.7.78}$$

由式 (6.7.78) 可见 $v_{\varepsilon x^{2j}t}(x,t) \in C([0,T];C[0,\ell])$. 式 (6.7.78) 对 t 求导, 有

$$\begin{aligned}v_{\varepsilon x^{2j}t^2}(x,t) =& - \sum_{i=0,2,\cdots,2j} [\varepsilon v_\varepsilon(x,t) + g(v_\varepsilon(x,t))]_{x^i} \\ &+ \int_0^\ell K(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t) + g(v_\varepsilon(\xi,t))]\mathrm{d}\xi. \end{aligned}\tag{6.7.79}$$

由式 (6.7.79) 知 $v_{\varepsilon x^{2j}t^2}(x,t) \in C([0,t];C[0,\ell])$.

当 $k-1=2j-1$ $(j=1,2,\cdots)$ 时, 应用前面同样的方法得

$$v_{\varepsilon x^{2j-1}t^2}(x,t) \in C([0,t];C[0,\ell]).$$

应用数学归纳法可证

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x^{k-1}t^{m+2}}(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]} \leqslant M_9(T). \tag{6.7.80}$$

□

定理 6.7.2 设 $v_0, v_1 \in C^3[0,\ell]$ 满足边值条件 (6.7.18) 和 $g \in C^3(\mathbb{R})$ 满足条件 (6.7.45), 则问题 (6.7.35), (6.7.36) 的整体广义解 $v_\varepsilon(x,t)$ 是下列问题

$$v_{tt} - \varepsilon v_{xx} - v_{xxtt} = g(v)_{xx}, \tag{6.7.81}$$

$$v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \tag{6.7.82}$$

$$v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x) \tag{6.7.83}$$

的整体古典解.

证明 定理 6.7.2 的假定和引理 6.7.4 的结论指出 $v_\varepsilon(x,t)\in C^3([0,\infty);C^2[0,\ell])$. 因为 $v_\varepsilon(x,t)$ 是问题 (6.7.35), (6.7.36) 的整体广义解, $v_\varepsilon(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x,t) =& v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau \\ &+\int_0^t\int_0^\ell(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau)+g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.7.84}$$

$$v_\varepsilon(0,t)=v_\varepsilon(\ell,t)=0. \tag{6.7.85}$$

由式 (6.7.84) 和式 (6.7.85) 易知, $v_\varepsilon(x,t)$ 满足初边值条件 (6.7.82) 和 (6.7.83). 现在证明 $v_\varepsilon(x,t)$ 满足方程 (6.7.81). 方程 (6.7.84) 对 t 求导两次, 得

$$v_{\varepsilon tt}(x,t)=-\{\varepsilon v_\varepsilon(x,t)+g(v_\varepsilon(x,t))\}+\int_0^\ell K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t)+g(v_\varepsilon(\xi,t))\}\,\mathrm{d}\xi. \tag{6.7.86}$$

方程 (6.7.86) 对 x 求导两次, 有

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon xxtt}(x,t)=&-\{\varepsilon v_{\varepsilon xx}(x,t)+g(v_\varepsilon(x,t))_{xx}\}-\{\varepsilon v_\varepsilon(x,t) \\ &+g(v_\varepsilon(x,t))\}+\int_0^\ell K_{xx}(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t)+g(v_\varepsilon(\xi,t))\}\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{6.7.87}$$

注意到 $K(x,\xi)=K_{xx}(x,\xi)\ (x\neq\xi)$ 和从方程 (6.7.86) 减去方程 (6.7.87), 看出 $v_\varepsilon(x,t)$ 满足方程 (6.7.81). 解的唯一性是显然的. □

定理 6.7.3 设 $v_0,v_1\in C^2[0,\ell]$ 满足边值条件 (6.7.18) 和 $g\in C^2(\mathbb{R})$ 满足条件 (6.7.45), 则问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 有唯一的整体广义解 $v(x,t)\in C([0,T];C[0,\ell])(\forall T>0)$.

证明 在定理 6.7.3 的条件下, 由引理 6.7.4 推出问题 (6.7.35), (6.7.36) 的整体广义解 $v_\varepsilon(x,t)\in C^2([0,T];C^1[0,\ell])$. 由估计 (6.7.64), (6.7.69) 和 (6.7.71) 看出 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$, $\{v_{\varepsilon x}(x,t)\}$ 和 $\{v_{\varepsilon t}(x,t)\}$ 在 $C([0,T];C[0,\ell])$ 中关于 ε 是一致有界的. 根据 Ascoli-Arzelá 定理可以从 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$, 使得存在一函数 $v(x,t)\in C([0,T];C[0,\ell])$ 和当 $\varepsilon\to0$ 时, 子序列 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 在 $[0,\ell]\times[0,T]$ 上一致收敛于 $v(x,t)$. 因为 $g(s)$ 是一连续函数, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $g(v_\varepsilon(x,t))$ 一致收敛于 $g(v(x,t))$. 当 $\varepsilon\to0$ 时, 具有边值条件 (6.7.85) 的积分方程 (6.7.84) 一致收敛于具有边值条件 (6.7.33) 的积分方程 (6.7.31). 因此 $v(x,t)$ 是问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 的整体广义解. 解的唯一性是显然的. □

定理 6.7.4 设 $v_0,v_1\in C^4[0,\ell]$ 满足边值条件 (6.7.8) 和 $g\in C^5(\mathbb{R})$ 满足条件 (6.7.45), 则问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 存在唯一整体古典解 $v(x,t)\in C^2([0,T];C^2[0,\ell])\ (\forall T>0)$.

证明 在定理 6.7.4 的条件下, 由引理 6.7.4 推出问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 的整体广义解 $v_\varepsilon(x,t) \in C^3([0,T];C^3[0,\ell])(\forall T > 0)$. 由估计 (6.7.80) 可知, 序列 $\{v_{\varepsilon x^i t^j}(x,t)\}$ $(i,j = 0,1,2,3)$ 在 $C([0,T];C[0,\ell])$ 中关于 ε 是一致有界的. 根据 Ascoli-Arzelá 定理可以从 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$, 使得存在一函数 $v(x,t) \in C([0,T];C[0,\ell])$ 和当 $\varepsilon \to 0$ 时, 子序列 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 在 $[0,\ell] \times [0,T]$ 上一致收敛于 $v(x,t)$. 对应的导数子序列 $\{ v_{\varepsilon x}(x, t) \}$, $\{ v_{\varepsilon t}(x, t) \}$, $\{ v_{\varepsilon xx}(x, t) \}$, $\{ v_{\varepsilon tt}(x, t) \}$ 和 $\{ v_{\varepsilon xxtt}(x, t) \}$ 在 $[0,\ell]\times[0,T]$ 上也分别一致收敛于 $v_x(x,t), v_t(x,t)$, $v_{xx}(x,t), v_{tt}(x,t)$ 和 $v_{xxtt}(x,t)$. 将 $v_\varepsilon(x,t)$ 代入问题 (6.7.81)-(6.7.83), 并令 $\varepsilon \to 0$, 得到 $v(x,t)$ 是问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 的整个古典解. 唯一性是显然的. □

6.7.3 问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的整体解

定理 6.7.5 设 $u_0, u_1 \in C[0,\ell]$ 满足边值条件 (6.7.18), $v_0, v_1 \in C^2[0,\ell]$ 满足边值条件 (6.7.19), $g \in C^2(\mathbb{R})$ 满足条件 (6.7.45) 和 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 则问题 (6.7.16)-(6.7.21) 存在唯一整体广义解 $(u,v) \in C([0,T];C[0,\ell])(\forall T > 0)$.

证明 在定理 6.7.5 的条件下, 根据定理 6.7.3 知问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 有唯一的整体广义解 $v(x,t) \in C([0,T];C[0,\ell])$. 将此解 $v(x,t)$ 代入积分方程 (6.7.31) 得到下列问题:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& u_0(x) + u_1(x)t - \int_0^t (t-\tau)\{Du(x,t) + f(v(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^\ell (t-\tau)K(x,\xi)\{Du(\xi,\tau) + f(v(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{6.7.88}$$

$$u(0) = u(\ell) = 0. \tag{6.7.89}$$

积分方程 (6.7.88) 关于 $u(x,t)$ 是一线性积分方程. 应用证明具有边值条件 (6.7.34) 的积分方程 (6.7.32) 存在整体广义解的同样方法, 能得到问题 (6.7.16), (6.7.18), (6.7.20) 的整体广义解 $u \in C([0,T];C[0,\ell])$. 于是 $(u,v) \in C([0,T];C[0,\ell])$ 是问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的整体广义解.

现在证明问题 (6.7.16)-(6.7.21) 解的唯一性. 设 $(u(x,t), v(x,t))$ 和 $(\overline{u}(x,t), \overline{v}(x,t))$ 是问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的两个解, 则 $w(x,t) = u(x,t) - \overline{u}(x,t)$, $w_1(x,t) = v(x,t) - \overline{v}(x,t)$ 满足下列问题:

$$\begin{aligned} w(x,t) =& -\int_0^t (t-\tau)\{Dw(x,\tau) + f(v(x,\tau)) - f(\overline{v}(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^\ell (t-\tau)K(x,\xi)\{Dw(\xi,\tau) + f(v(\xi,\tau)) - f(\overline{v}(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{6.7.90}$$

$$w_1(x,t) = -\int_0^t (t-\tau)\{g(v(x,\tau)) - g(\overline{v}(x,\tau))\}\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^\ell (t-\tau)K(x,\xi)\{g(v(\xi,\tau))-g(\overline{v}(\xi,\tau))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{6.7.91}$$

对于 f 和 g 应用中值定理由式 (6.7.90) 和式 (6.7.91) 推得

$$\|w(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]}+\|w_1(\cdot,t)\|_{C[0,\ell]}\leqslant \overline{C}(T)\int_0^t\{\|w(\cdot,\tau)\|_{C[0,\ell]}+\|w_1(\cdot,\tau)\|_{C[0,\ell]}\}\mathrm{d}\tau. \tag{6.7.92}$$

解的唯一性得证. □

定理 6.7.6 设 $u_0,u_1\in C^2[0,\ell]$ 满足边值条件 (6.7.18), $v_0,v_1\in C^4[0,\ell]$ 满足条件 (6.7.19), $g\in C^5(\mathbb{R})$ 满足条件 (6.7.45) 和 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 则问题 (6.7.16)-(6.7.21) 有唯一的整体古典解 $(u,v)\in C^2([0,T];C^2[0,\ell])(\forall T>0)$.

证明 在定理 6.7.6 的条件下, 根据定理 6.7.4 我们知道问题 (6.7.17), (6.7.19), (6.7.21) 有唯一的整体古典解 $v\in C^2([0,T];C^2[0,\ell])$. 将此解 $v(x,t)$ 代入积分方程 (6.7.31), 得到问题 (6.7.88), (6.7.89), 其中 $v\in C^2([0,T];C^2[0,\ell])$. 积分方程 (6.7.88) 关于 $u(x,t)$ 是一线性积分方程. 应用证明定理 6.7.2 的同样方法, 能够得到问题 (6.7.16), (6.7.18), (6.7.20) 的整体古典解 $u\in C^2([0,T];C^2[0,\ell])$. 所以 $(u,v)\in C^2([0,T];C^2[0,\ell])$ 是问题 (6.7.16)-(6.7.21) 的整体古典解. □

本章主要参考了文献 [46], [48], [50], [54], [55], [59], [65]. 与本章内容有密切关系的文章详见文献 [66]~[74].

第 7 章　离散函数空间的插值公式和应用

我们知道索伯列夫空间的嵌入定理和插值定理对于研究偏微分方程和数值分析起着重要的作用. 自然期望对于离散函数空间也有类似的插值定理, 答案是肯定的. 所以这些结果对于研究偏微分方程和有限差分方法也起着重要的作用. 在本章我们介绍这方面的内容, 并作为有限差分方法的应用证明一广义 Schrödinger 型方程组初边值问题广义解的存在性和唯一性. 更多内容参见文献 [75].

7.1　一个指标的离散函数

7.1.1　离散函数的插值公式

长度为 $l>0$ 的有限区间 $[0,l]$ 被点 $x_j=jh\ (j=0,1,\cdots,J)$ 分割为小段, 其中 $Jh=l$; J 是一正整数和 h 是步长. 离散函数 $u_h=\{u_j|j=0,1,\cdots,J\}$ 定义在格点 (网点) $x_j(j=0,1,\cdots,J)$ 上. 以

$$
\begin{aligned}
&\Delta_+u_j=u_{j+1}-u_j,\quad j=0,1,\cdots,J-1,\\
&\Delta_-u_j=u_j-u_{j-1},\quad j=1,2,\cdots,J
\end{aligned}
$$

分别表示一阶差分, 前者称为向前差, 后者称为向后差. 二阶差分为

$$
\begin{aligned}
&\Delta_+^2u_j=\Delta_+(u_{j+1}-u_j)=u_{j+2}-2u_{j+1}+u_j,\quad j=0,1,\cdots,J-2,\\
&\Delta_+\Delta_-u_j=\Delta_+(u_j-u_{j-1})=u_{j+1}-2u_j+u_{j-1},\quad j=1,\cdots,J-1,\\
&\Delta_-^2u_j=\Delta_-(u_j-u_{j-1})=u_j-2u_{j-1}+u_{j-2},\quad j=2,3,\cdots,J.
\end{aligned}
$$

三阶差分为

$$
\Delta_+^2\Delta_-u_j=u_{j+2}-3u_{j+1}+3u_j-u_{j-1},\quad j=1,2,\cdots,J-2,
$$

等等.

一阶差商值 $\dfrac{\Delta_+u_j}{h}(j=0,1,\cdots,J-1)$ 的集合是一离散函数

$$
\delta u_h=\left\{\frac{\Delta_+u_j}{h}\,\middle|\, j=0,1,\cdots,J-1\right\}.
$$

显然

$$
\delta u_h=\left\{\frac{\Delta_-u_j}{h}\,\middle|\, j=1,2,\cdots,J\right\}.
$$

对于二阶差商有

$$\delta^2 u_h = \left\{ \frac{\Delta_+^2 u_j}{h^2} \,\middle|\, j = 0, 1, \cdots, J-2 \right\}$$
$$= \left\{ \frac{\Delta_+ \Delta_- u_j}{h^2} \,\middle|\, j = 1, 2, \cdots, J-1 \right\}$$
$$= \left\{ \frac{\Delta_-^2 u_j}{h^2} \,\middle|\, j = 2, 3, \cdots, J \right\}.$$

类似地, 对于原离散函数 u_h 对应的 $k \geqslant 0$ 阶差商有离散函数 $\delta^k u_h$.

两个离散函数 $u_h = \{u_j |\ j = 0, 1, \cdots, J\}$ 与 $v_h = \{v_j |\ j = 0, 1, \cdots, J\}$ 的数量积定义为

$$(u, v)_h = \sum_{j=0}^{J} u_j v_j h.$$

对于离散函数 u_h 和它对应的 $k \geqslant 0$ 阶差商的离散函数的范数定义为

$$\|\delta^k u_h\|_p = \left(\sum_{j=0}^{J-k} \left| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right|^p h \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

和

$$\|\delta^k u_h\|_\infty = \max_{j=0,1,\cdots,J-k} \left| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right|,$$

其中 k 是任意非负整数和 p 是一实数. 显然

$$\|\delta^k u_h\|_p = \left(\sum_{j=l}^{J-k+l} \left| \frac{\Delta_+^{k-l} \Delta_-^l u_j}{h^k} \right|^p h \right)^{\frac{1}{p}}$$

和

$$\|\delta^k u_h\|_\infty = \max_{j=l,\cdots,J-k+l} \left| \frac{\Delta_+^{k-l} \Delta_-^l u_j}{h^k} \right|,$$

其中 $k \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$ 和 l 是一整数, $0 \leqslant l \leqslant k$.

下面我们讨论离散函数 $u_h = \{u_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 在有限区间 $[0, l]$ 上差商范数的插值关系.

用直接计算的方法容易证明以下引理.

引理 7.1.1　对于任意两个离散函数 $u_h = \{u_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 和 $v_h = \{v_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 有恒等式

$$\sum_{j=0}^{J-1} u_j \Delta_+ v_j = -\sum_{j=1}^{J} v_j \Delta_- u_j - u_0 v_0 + u_J v_J \tag{7.1.1}$$

和

$$\sum_{j=1}^{J-1} u_j \Delta_+ \Delta_- v_j = -\sum_{j=0}^{J-1} (\Delta_+ u_j)(\Delta_+ v_j) - u_0 \Delta_+ v_0 + u_J \Delta_- v_J. \tag{7.1.2}$$

引理 7.1.2 对于任意离散函数 $u_h = \{u_j |\ j = 0, 1, \cdots, J\}$, 成立

$$\|u_h\|_\infty \leqslant K_1 \|u_h\|_2^{\frac{1}{2}} \left(\|\delta u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.1.3}$$

其中 l 是有限区间的长度和 K_1 是一个不依赖于离散函数 u_h 和步长 h 的常数.

证明 对于任意的 $m,\ s = 0, 1, \cdots, J$, 且 $m > s$, 利用离散型的 Hölder 不等式和离散型的 Minkowski 不等式, 有

$$\begin{aligned}
u_m^2 - u_s^2 &= (u_m^2 - u_{m-1}^2) + (u_{m-1}^2 - u_{m-2}^2) + \cdots + (u_{s+1}^2 - u_s^2) \\
&= \sum_{j=s}^{m-1} (u_{j+1} + u_j) \Big(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} h \Big) \\
&= \sum_{j=s}^{m-1} (u_{j+1} + u_j) \frac{\Delta_+ u_j}{h} h \\
&\leqslant \left(\sum_{j=s}^{m-1} |u_{j+1} + u_j|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=s}^{m-1} \Big| \frac{\Delta_+ u_j}{h} \Big|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{j=0}^{J-1} |u_{j+1} + u_j|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{J-1} \Big| \frac{\Delta_+ u_j}{h} \Big|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2 \|u_h\|_2 \|\delta u_h\|_2.
\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

如果对所有的 $j = 0, 1, \cdots, J,\ |u_j| \geqslant a \geqslant 0$, 则

$$\|u_h\|_2^2 \geqslant (J+1) h a^2 \geqslant l a^2,$$

所以存在一个 u_s, 使得

$$|u_s| \leqslant \frac{1}{\sqrt{l}} \|u_h\|_2. \tag{7.1.5}$$

事实上, 如果不然, 对于任意的 $u_s,\ s = 0, 1, \cdots, J$, 使得

$$|u_s| > \frac{\|u_h\|_2}{\sqrt{l}},$$

则

$$\sum_{s=0}^{J} |u_s|^2 h > \sum_{s=0}^{J} \frac{\|u_h\|_2^2}{l} h > \frac{(J+1)h}{l} \|u_h\|_2^2.$$

于是

$$\|u_h\|_2^2 > \frac{l+h}{l}\|u_h\|_2^2.$$

由此推出

$$0 > \frac{h}{l}\|u_h\|_2^2$$

这个矛盾, 证明了式 (7.1.5) 成立.

取 u_s 这样的值, 对任意的 $m = 0, 1, \cdots, J$, 由式 (7.1.4) 和式 (7.1.5) 推出

$$\begin{aligned}
|u_m|^2 &\leqslant 2\|u_h\|_2\|\delta u_h\|_2 + u_s^2 \\
&\leqslant 2\|u_h\|_2\|\delta u_h\|_2 + \frac{1}{l}\|u_h\|_2^2 \\
&\leqslant 2\|u_h\|_2\left(\|\delta u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l}\right).
\end{aligned}$$

上式开方得

$$|u_m| \leqslant \sqrt{2}\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所以式 (7.1.3) 成立. □

引理 7.1.3 对于任意离散函数 $u_h = \{u_j |\ j = 0, 1, \cdots, J\}$, 成立

$$\|\delta u_h\|_2 \leqslant K_2\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^2 u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.1.6}$$

其中常数 K_2 不依赖于 u_h.

证明 由引理 7.1.1 第二个恒等式 (7.1.2)(在式 (7.1.2) 中移项, 以 u_j 代替 v_j) 得出

$$\sum_{j=0}^{J-1}(\Delta_+ u_j)^2 = -\sum_{j=1}^{J-1} u_j(\Delta_+\Delta_- u_j) - u_0\Delta_+ u_0 + u_J\Delta_- u_J,$$

则有

$$\sum_{j=0}^{J-1}\frac{(\Delta_+ u_j)^2 h}{h^2} = -\sum_{j=1}^{J-1} u_j\frac{(\Delta_+\Delta_- u_j)}{h^2}h - u_0\frac{\Delta_+ u_0}{h} + u_J\frac{\Delta_- u_J}{h}.$$

从而

$$\|\delta u_h\|_2^2 \leqslant \|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_2 + 2\|u_h\|_\infty\|\delta u_h\|_\infty. \tag{7.1.7}$$

由引理 7.1.2 可知

$$\|u_h\|_\infty \leqslant K_1\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\delta u_h\|_\infty \leqslant K_1\|\delta u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|\delta u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

把这两个不等式代入式 (7.1.7) 得

$$\begin{aligned}\|\delta u_h\|_2^2 \leqslant &\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_2+2K_1^2\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\\ &\times\left(\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|\delta u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{7.1.8}$$

而

$$\begin{aligned}&\left(\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l}\right)^2\\ =&\|\delta u_h\|_2^2+2\|\delta u_h\|_2\frac{\|u_h\|_2}{l}+\frac{\|u_h\|_2^2}{l^2}\\ \leqslant&\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_2+\|\delta u_h\|_2^2+\frac{2\|u_h\|_2^2}{l^2}\\ &+2K_1^2\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|\delta u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant&2\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_2+2\frac{\|u_h\|_2^2}{l^2}\\ &+4K_1^2\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|\delta u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant&2\|u_h\|_2\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l^2}\right)+4K_1^2\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(2\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l}\right)\\ &\times\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l^2}+\frac{\|\delta u_h\|_2}{l}-\frac{\|u_h\|_2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant&2\|u_h\|_2\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l^2}\right)+8K_1^2\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l}\right)\\ &\times\left\{\left(\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l^2}\right)+\frac{1}{l}\left(\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

若简记

$$\|\delta u_h\|_*=\|\delta u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l},\quad \|\delta^2 u_h\|_*=\|\delta^2 u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l^2},$$

则有

$$\|\delta u_h\|_*^2\leqslant 2\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_*+C_1\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta u_h\|_*\|\delta^2 u_h\|_*^{\frac{1}{2}}+C_1\frac{1}{\sqrt{l}}\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta u_h\|_*^{\frac{3}{2}},\tag{7.1.9}$$

其中常数 C_1 不依赖于离散函数 u_h 和步长 h.

由带 ε 的 Cauchy 不等式导出

$$
\begin{aligned}
C_1\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta u_h\|_*\|\delta^2 u_h\|_*^{\frac{1}{2}} &\leqslant \frac{1}{4}\|\delta u_h\|_*^2 + C_1^2\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_*, \\
C_1\frac{1}{\sqrt{l}}\|u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta u_h\|_*^{\frac{3}{2}} &\leqslant \frac{1}{8}\|\delta u_h\|_*^2 + 2C_1^2\frac{\|u_h\|_2}{l}\|\delta u_h\|_* \\
&\leqslant \frac{1}{8}\|\delta u_h\|_*^2 + \frac{1}{8}\|\delta u_h\|_*^2 + 8C_1^4\frac{\|u_h\|_2^2}{l^2} \\
&\leqslant \frac{1}{4}\|\delta u_h\|_*^2 + 8C_1^4\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_*.
\end{aligned}
$$

将以上两式代入式 (7.1.9) 得

$$\|\delta u_h\|_*^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\delta u_h\|_*^2 + (C_1^2 + 2 + 8C_1^4)\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_*,$$

从而

$$\|\delta u_h\|_*^2 \leqslant C_2\|u_h\|_2\|\delta^2 u_h\|_*,$$

其中 $C_2 = K_2^2$. □

定理 7.1.1 对于定义在有限区间 $[0,l]$ 上的任意离散函数 $u_h = \{u_j |\ j = 0,1,\cdots,J\}$ 有估计式

$$\|\delta^k u_h\|_2 \leqslant K_3\|u_h\|_2^{1-\frac{k}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k}{n}}, \tag{7.1.10}$$

其中 $0 \leqslant k \leqslant n$ 和 K_3 是不依赖于 u_h 和 h 的常数.

证明 用归纳法证明式 (7.1.10). 引理 7.1.3 是式 (7.1.10) 当 $n=2$, $k=1$ 的情况. 设式 (7.1.10) 对 $n=m$ 时成立, 现在证明对 $n=m+1$ 式 (7.1.10) 成立. 对于离散函数 $\delta^{m-1}u_h = \left\{\dfrac{\Delta_+^{m-1}u_j}{h^{m-1}} |\ j=0,1,\cdots,J-m+1\right\}$, 公式 (7.1.6) 变为

$$\|\delta^m u_h\|_2 \leqslant K_2\|\delta^{m-1}u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^{m+1}u_h\|_2 + \frac{\|\delta^{m-1}u_h\|_2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

或

$$\|\delta^m u_h\|_2 \leqslant K_2\|\delta^{m-1}u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\|\delta^{m+1}u_h\|_2^{\frac{1}{2}} + \frac{K_2}{l}\|\delta^{m-1}u_h\|_2.$$

由归纳法假定, 有

$$\|\delta^{m-1}u_h\|_2 \leqslant C_3\|u_h\|_2^{\frac{1}{m}}\|\delta^m u_h\|_*^{1-\frac{1}{m}},$$

其中 $\|\delta^m u_h\|_* = \|\delta^m u_h\|_2 + \dfrac{\|u_h\|_2}{l^m}$. 将此关系式代入上式, 则

$$\|\delta^m u_h\|_2 \leqslant K_2\sqrt{C_3}\|u_h\|_2^{\frac{1}{2m}}\|\delta^m u_h\|_*^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}\|\delta^{m+1}u_h\|_2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{l}K_2C_3\|u_h\|_2^{\frac{1}{m}}\|\delta^m u_h\|_*^{1-\frac{1}{m}}.$$

由 Young 不等式可见

$$K_2\sqrt{C_3}\|u_h\|_2^{\frac{1}{2m}}\|\delta^m u_h\|_*^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}\|\delta^{m+1}u_h\|_2^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{4}\|\delta^m u_h\|_* + C_4\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\|\delta^{m+1}u_h\|_*^{\frac{m}{m+1}};$$

$$\frac{1}{l}K_2C_3\|u_h\|_2^{\frac{1}{m}}\|\delta^m u_h\|_*^{1-\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{4}\|\delta^m u_h\|_* + C_5\frac{1}{l^m}\|u_h\|_2.$$

因此有

$$\begin{aligned}\|\delta^m u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^m} =& \|\delta^m u_h\|_* \leqslant \frac{1}{2}\|\delta^m u_h\|_* \\ &+ C_4\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\|\delta^{m+1}u_h\|_*^{\frac{m}{m+1}} + C_6\frac{1}{l^m}\|u_h\|_2.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|\delta^m u_h\|_2 &\leqslant \|\delta^m u_h\|_* \\ &\leqslant 2C_4\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\|\delta^{m+1}u_h\|_*^{\frac{m}{m+1}} + C_7\frac{1}{l^m}\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\|u_h\|_2^{\frac{m}{m+1}} \\ &= 2C_4\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\|\delta^{m+1}u_h\|_*^{\frac{m}{m+1}} + C_7\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\left(\frac{\|u_h\|_2}{l^{m+1}}\right)^{\frac{m}{m+1}} \\ &\leqslant C_8\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\|\delta^{m+1}u_h\|_*^{\frac{m}{m+1}}.\end{aligned} \tag{7.1.11}$$

由归纳法假定与估计式 (7.1.11), 对于 $1 \leqslant k < m$ 得

$$\begin{aligned}\|\delta^k u_h\|_2 &\leqslant C_9\|u_h\|_2^{1-\frac{k}{m}}\|\delta^m u_h\|_*^{\frac{k}{m}} \\ &\leqslant C_9C_8^{\frac{k}{m}}\|u_h\|_2^{1-\frac{k}{m}}\left\{\|u_h\|_2^{\frac{1}{m+1}}\|\delta^{m+1}u_h\|_*^{\frac{m}{m+1}}\right\}^{\frac{k}{m}} \\ &\leqslant C_9C_8^{\frac{k}{m}}\|u_h\|_2^{1-\frac{k}{m+1}}\|\delta^{m+1}u_h\|_*^{\frac{k}{m+1}}.\end{aligned}$$

由归纳法步骤, 式 (7.1.10) 得证. □

定理 7.1.2 对于在有限区间 $[0,l]$ 上的任意离散函数 $u_h = \{u_j|\ j = 0,1,\cdots,J\}$, 有

$$\|\delta^k u_h\|_\infty \leqslant K_4\|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}, \tag{7.1.12}$$

其中 $0 \leqslant k < n$ 和 K_4 是一个不依赖于 u_h 的常数.

证明 对于离散函数 $\delta^k u_h = \left\{\frac{\Delta_+^k u_j}{h^k}\middle| j = 0,1,\cdots,J-k\right\}$, 则公式 (7.1.3) 变为

$$\|\delta^k u_h\|_\infty \leqslant K_1\|\delta^k u_h\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^{k+1}u_h\|_2 + \frac{\|\delta^k u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由定理 7.1.1, 成立

$$\|\delta^k u_h\|_2 \leqslant K_3\|u_h\|_2^{1-\frac{k}{n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{k}{n}}$$

和

$$\|\delta^{k+1}u_h\|_2 \leqslant K_3\|u_h\|_2^{1-\frac{k+1}{n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{k+1}{n}}.$$

把这两个关系式代入上式得

$$\begin{aligned}
\|\delta^k u_h\|_\infty &\leqslant K_1K_3\|u_h\|_2^{1-\frac{2k+1}{2n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{2k+1}{2n}} + K_1K_3\frac{1}{\sqrt{l}}\|u_h\|_2^{1-\frac{k}{n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{k}{n}} \\
&\leqslant \overline{C}\|u_h\|_2^{1-\frac{2k+1}{2n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{k}{n}}\left\{\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{\sqrt{l}}\|u_h\|_2^{\frac{1}{2n}}\right\} \\
&\leqslant \overline{C}\|u_h\|_2^{1-\frac{2k+1}{2n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{k}{n}}\left\{\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{1}{2n}} + \left(\frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\} \\
&\leqslant \overline{C}\|u_h\|_2^{1-\frac{2k+1}{2n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{k}{n}}\{\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{1}{2n}} + \|\delta^n u_h\|_*^{\frac{1}{2n}}\} \\
&\leqslant C_{10}\|u_h\|_2^{1-\frac{2k+1}{2n}}\|\delta^n u_h\|_*^{\frac{2k+1}{2n}}.
\end{aligned}$$

□

定理 7.1.3 对于在有限区间 $[0,l]$ 上的任意离散函数 $u_h = \{u_j|\ j=0,1,\cdots,J\}$ 成立

$$\|\delta^k u_h\|_p \leqslant K_5\|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}}, \tag{7.1.13}$$

其中 $2\leqslant p\leqslant\infty$, $0\leqslant k<n$ 和 K_5 是不依赖于 u_h 的常数.

证明 因为

$$\|\delta^k u_h\|_p^p = \left(\sum_{j=0}^{J-k}\left|\frac{\Delta_+^k u_j}{h^k}\right|^p h\right),$$

所以

$$\|\delta^k u_h\|_p^p \leqslant \|\delta^k u_h\|_\infty^{p-2}\|\delta^k u_h\|_2^2. \tag{7.1.14}$$

将

$$\|\delta^k u_h\|_2 \leqslant K_3\|u_h\|_2^{1-\frac{k}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k}{n}}$$

和

$$\|\delta^k u_h\|_\infty \leqslant K_4\|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}$$

代入式 (7.1.14) 得

$$
\begin{aligned}
\|\delta^k u_h\|_p^p \leqslant & K_3^2 \|u_h\|_2^{2(1-\frac{k}{n})} \left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{2k}{n}} \\
& \times K_4^{p-2} \|u_h\|_2^{\left(1-\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)(p-2)} \left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)(p-2)} \\
= & K_3^2 K_4^{p-2} \|u_h\|_2^{\left(1-\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)p+\frac{1}{n}} \left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}p-\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

上式开 p 次方推出

$$
\|\delta^k u_h\|_p \leqslant K_5 \|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}} \left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}},
$$

其中 $p \geqslant 2$. □

7.1.2 关于离散函数指数为 α 的 Hölder 系数的不等式

用

$$
H_\alpha[u_h] = \max_{m,s=0,1,\cdots,J} \frac{|u_m - u_s|}{|x_m - x_s|^\alpha}
$$

表示对应于普通函数指数为 α 的 Hölder 系数的离散函数 $u_h = \{u_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 指数为 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 的 Hölder 系数. 对于 $k \geqslant 0$ 阶差商 $\delta^k u_h$, 对应的指数为 α 的 Hölder 系数有如下的表示式

$$
H_\alpha[\delta^k u_h] = \max_{m,s=0,1,\cdots,J-k} \frac{|\Delta_+^k (u_m - u_s)|}{h^k |x_m - x_s|^\alpha},
$$

其中 $|x_m - x_s| = |m - s|h$.

定理 7.1.4 对于任意的离散函数 $u_h = \{u_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$, 存在

$$
H_{1-\frac{1}{r}}[\delta^k u_h] \leqslant \|\delta^{k+1} u_h\|_r, \tag{7.1.15}
$$

其中 $k \geqslant 0$ 是一非负整数和 $r > 1$ 是实数.

证明 对于任意的 $m, s = 0, 1, \cdots, J$ 和 $m > s$ 有

$$
u_m - u_s = \sum_{j=s}^{m-1} \frac{\Delta_+ u_j}{h} h, \tag{7.1.16}
$$

因此利用带权的离散型 Hölder 不等式成立

$$
|u_m - u_s| \leqslant \left(\sum_{j=s}^{m-1} |\frac{\Delta_+ u_j}{h}|^r h\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=s}^{m-1} h\right)^{1-\frac{1}{r}} \leqslant \|\delta u_h\|_r |x_m - x_s|^{1-\frac{1}{r}}.
$$

所以对于 $k=0$ 的式 (7.1.15) 成立. 同理可证对于任意的 $k>0$, 由式 (7.1.16) 知

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta_+^k u_m}{h^k}-\frac{\Delta_+^k u_s}{h^k}\right| &= \left|\sum_{j=s}^{m-(k+1)}\frac{\Delta_+^{k+1}u_j}{h^{k+1}}h\right| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=s}^{m-(k+1)}\left|\frac{\Delta_+^{k+1}u_j}{h^{k+1}}\right|^r h\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{j=s}^{m-(k+1)}h\right)^{1-\frac{1}{r}} \\ &\leqslant \|\delta^{k+1}u_h\|_r|x_m-x_s|^{1-\frac{1}{r}},\end{aligned}$$

所以对于任意的 $k\geqslant 0$, 式 (7.1.15) 成立. □

推论 7.1.1 对于任意的离散函数 $u_h=\{u_j|j=0,1,\cdots,J\}$, 有

$$\|u_h\|_\infty \leqslant \|\delta u_h\|_1+\frac{\|u_h\|_1}{l}. \tag{7.1.17}$$

证明 当 $r=1$ 时, 从上面的讨论得

$$|u_m|=|u_m-u_s+u_s|\leqslant|u_m-u_s|+|u_s|\leqslant|u_s|+\|\delta u_h\|_1.$$

因为

$$\frac{\|u_h\|_1}{l}=\frac{1}{l}\sum_{j=0}^{J}|u_j|h\geqslant\min_{j=0,1,\cdots,J}|u_j|,$$

所以选择这样的 $|u_s|$ 使得

$$|u_s|\leqslant\frac{1}{l}\|u_h\|_1,$$

则对于任意的 $m=0,1,\cdots,J$,

$$|u_m|\leqslant\|\delta u_h\|_1+\frac{\|u_h\|_1}{l}.$$

最后得

$$\|u_h\|_\infty\leqslant\|\delta u_h\|_1+\frac{\|u_h\|_1}{l}.$$

□

7.1.3 一个离散函数的不等式

本小节我们证明一个离散函数的不等式.

定理 7.1.5 设离散函数 $w_h=\{w_k|k=0,1,\cdots,N\}$(本章中 N 也是自然数, 不代表 $\mathbb{R}^N$ 中的维数), $N\Delta t=T$, 满足不等式

$$w_n\leqslant A+\sum_{k=1}^{n}B_k w_k\Delta t \qquad (n=0,1,\cdots,N), \tag{7.1.18}$$

其中 A 和 B_k $(k=1,2,\cdots,N)$ 是非负常数. 则

$$\|w_h\|_\infty \leqslant A\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{N} B_k\Delta t}, \tag{7.1.19}$$

其中 Δt 充分小, 使得 $\Delta t\left(\max\limits_{k=1,2,\cdots,N} B_k\right) \leqslant \frac{1}{2}$.

证明 从式 (7.1.18) 推出

$$\begin{aligned}
&w_0 \leqslant A\,,\\
&w_1 \leqslant \frac{A}{1-B_1\Delta t}\,,\\
&w_2 \leqslant \frac{A}{(1-B_1\Delta t)(1-B_2\Delta t)}\,.
\end{aligned}$$

假定对于 $k=0,1,\cdots,n-1$, 有

$$w_k \leqslant \frac{A}{\prod\limits_{j=1}^{k}(1-B_j\Delta t)}.$$

于是从式 (7.1.18) 得

$$(1-B_n\Delta t)w_n \leqslant A+\sum_{k=1}^{n-1} B_k w_k\Delta t \leqslant A+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{AB_k\Delta t}{\prod\limits_{j=1}^{k}(1-B_j\Delta t)}\,.$$

这样对 $n=0,1,\cdots,N$ 给出

$$w_n \leqslant \frac{A}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-B_j\Delta t)}.$$

假定 Δt 充分小, 使得 $B_j\Delta t \leqslant \frac{1}{2}(j=1,2,\cdots,N)$, 则

$$\frac{1}{1-B_j\Delta t}=1+\frac{B_j\Delta t}{1-B_j\Delta t}\leqslant 1+2B_j\Delta t \quad (j=1,2,\cdots,N).$$

于是

$$w_n \leqslant A\prod_{j=1}^{n}(1+2B_j\Delta t)\leqslant A\mathrm{e}^{2\sum_{j=1}^{N} B_j\Delta t}, \quad n=1,2,\cdots,N.$$

所以

$$\|w_h\|_\infty \leqslant A\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{N} B_k\Delta t}. \qquad \square$$

7.1.4　有限维空间连续映射的不动点定理

在第 6 章中我们引入和应用了 Leray-Schauder 不动点定理. 为了下面证明非线性代数方程组解的存在性, 现在引入有限维空间连续映射的不动点定理.

设 $\mathbb{R}^m$ 为 m 维 Euclid 空间和 $L_\lambda: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ 是 m 维空间 $\mathbb{R}^m$ 到自身的连续映射, 则对于 $z \in \mathbb{R}^m$, $L_\lambda(z) = v \in \mathbb{R}^m$, 其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是一参数.

定理 7.1.6　如果定义在有限维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 上的非线性方程组

$$v = L_\lambda(v), \tag{7.1.20}$$

满足下列条件:

(1) 函数 $L_\lambda(v)$ 对于任意的 $v \in \mathbb{R}^m$ 和 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是连续的,

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 存在一不动点 $v_0 \in \mathbb{R}^m$, 使得 $L_\lambda(v_0) = v_0$,

(3) 方程组 (7.1.20) 所有可能的解关于参数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是一致有界的,

则对于任意的 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 方程组 (7.1.20) 至少有一解 $v \in \mathbb{R}^m$, 因此对于 $\lambda = 1$, 即非线性方程组

$$v = L_1(v) \tag{7.1.21}$$

至少有一解 $v \in \mathbb{R}^m$.

7.2　广义 Schrödinger 型方程组初边值问题的有限差分法

非线性 Schrödinger 方程

$$u_t - \mathrm{i}u_{xx} + \beta|u|^p u = 0 \tag{7.2.1}$$

和复值函数 u 和 v 的非线性 Schrödinger 方程组

$$\begin{aligned} &u_t - \mathrm{i}u_{xx} + u(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) = 0, \\ &v_t - \mathrm{i}v_{xx} + v(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) = 0, \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

常常出现在物理问题的研究中. 这些方程和方程组可以看成实值函数方程组

$$u_t = Au_{xx} + f(u) \tag{7.2.3}$$

的特殊情况, 其中 $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots, u_m(x,t))$ 是 m 维未知向量值函数, A 是 $m \times m$ 非负定非奇异常数矩阵和 $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \cdots, f_m(u))$ 是向量变量 $u \in \mathbb{R}^m$ 的 m 维向量值函数. 方程组 (7.2.3) 可以称为广义 Schrödinger 型方程组.

下面用有限差分方法解广义 Schrödinger 型方程组 (7.2.3) 在矩形区域 $Q_T = \{0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上的初边值问题. 假定边值条件 (*) 取下列边值条件之一:
第一边值条件

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0; \tag{7.2.4}$$

第二边值条件

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0; \tag{7.2.5}$$

混合边值条件

$$u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \tag{7.2.6}$$

或

$$u_x(0,t) = u(\ell,t) = 0. \tag{7.2.7}$$

初值条件是

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{7.2.8}$$

其中 $\varphi(x)$ 是满足适当边值条件 (*) 的 m 维向量值的初值函数. 我们用 (*) 表示边值条件 (7.2.4), (7.2.5), (7.2.6) 或 (7.2.7) 中任一给定的条件.

用平行直线 $x = x_j$ $(j = 0, 1, \cdots, J)$ 和 $t = t^n$ $(n = 0, 1, \cdots, N)$ 剖分矩形区域 Q_T 为小网格, 其中 $x_j = jh$, $t^n = n\Delta t$, $Jh = \ell$, $N\Delta t = T$ $(j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N)$. 用 $v_j^n (j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N)$ 表示格点 (x_j, t^n) 上的离散函数.

对于 $j = 0, 1, \cdots, J-1$ 和 $n = 0, 1, \cdots, N-1$ 构造有限差分组

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = A\frac{1}{h^2}\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \tag*{(7.2.3)$_h$}$$

其中 $\Delta_+ v_j = v_{j+1} - v_j$, $\Delta_- v_j = v_j - v_{j-1}$ 和 $f_j^n = f(v_j^n)$ $(j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N)$. 有限差分边值条件如下:

$$v_0^n = v_J^n = 0; \tag*{(7.2.4)$_h$}$$

$$v_1^n - v_0^n = v_J^n - v_{J-1}^n = 0; \tag*{(7.2.5)$_h$}$$

$$v_0^n = v_J^n - v_{J-1}^n = 0; \tag*{(7.2.6)$_h$}$$

$$v_1^n - v_0^n = v_J^n = 0, \tag*{(7.2.7)$_h$}$$

其中 $n = 1, 2, \cdots, N$. 对应的离散初值条件是

$$v_j^0 = \varphi_j, \quad j = 1, \cdots, J-1, \tag*{(7.2.8)$_h$}$$

其中 $\varphi_j = \varphi(x_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, J)$. 因此根据离散函数 v_j^0 $(j = 0, 1, \cdots, J)$ 的定义也满足函数的离散边值条件 $(*)_h$, 即满足边值条件 $(7.2.4)_h$, $(7.2.5)_h$, $(7.2.6)_h$ 和 $(7.2.7)_h$.

现在对广义 Schrödinger 型方程组 (7.2.3) 和初值向量值函数 $\varphi(x)$ 作如下假定:

(Ⅰ) A 是 $m \times m$ 非负定和非奇异常数矩阵;

(Ⅱ) 用 (u, v) 表示两个向量 u 和 v 的数量积和 $|u|^2 = (u, u)$. 向量变量 $u \in \mathbb{R}^m$ 的 m 维向量值函数 $f(u)$ 满足条件

$$(u - v, f(u) - f(v)) \leqslant b|u - v|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^m, \tag{7.2.9}$$

其中 b 是一常数.

(III) m 维向量值初值函数 $\varphi(x)$ 的分量在 $[0, \ell]$ 上是二次连续可导的. 记 $\varphi(x) \in C^2[0, \ell]$, 且 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, l]$ 的端点满足适当的边值条件 $(*)$.

7.2.1　有限差分方程组 $(7.2.3)_h$ 和有限差分边值条件 $(*)_h$ 解的存在性和唯一性

有限差分方程组 $(7.2.3)_h$ 和有限差分边值条件 $(*)_h$ 可以考虑为未知向量 v_j^{n+1} $(j = 0, 1, 2, \cdots, J)$ 的非线性方程组, 其中 v_j^n $(j = 0, 1, \cdots, J)$ 是已知向量. 现在证明非线性方程组 $(7.2.3)_h$ 和 $(*)_h$ 解 $v_j^{n+1} (j = 0, 1, \cdots, J)$ 的存在性.

引理 7.2.1　设 $m \times m$ 系数矩阵 A 和 m 维向量值函数 $f(u)$ 分别满足假定 (I) 和 (II). 当 Δt 充分小时, 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(*)_h$ 和 $(7.2.8)_h$ 有唯一解 $v_j^n (j = 0, 1, \cdots, J; n = 1, 2, \cdots, N)$.

证明　对于任意 m 维向量 $z_j (j = 0, 1, \cdots, J)$, 我们构造 m 维向量 V_j $(j = 0, 1, \cdots, J)$ 如下

$$V_j = v_j^n + \lambda A \frac{\Delta t}{h^2} \Delta_+ \Delta_- z_j + \lambda \Delta t f(z_j), \quad j = 1, 2, \cdots, J - 1, \tag{7.2.10}$$

和 V_0 以及 V_J 由边界条件 $(*)_h$ 决定, 其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是一参数. 这就定义了 $m(J + 1)$ 维欧氏空间到自己的映射 $V = T_\lambda z$, 其中 $V = \{V_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 和 $z = \{z_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$.

为了证明非线性方程组 $(7.2.3)_h$ 和 $(*)_h$ 解的存在性, 根据定理 7.1.6 只需证明带参数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 的映射的所有可能不动点是一致有界的.

作向量 V_j 与向量方程

$$V_j = v_j^n + \lambda A \frac{\Delta t}{h^2} \Delta_+ \Delta_- V_j + \lambda \Delta t f(V_j) \tag{7.2.11}$$

的数量积和对所得结果关于 $j=1,2,\cdots,J-1$ 求和, 得

$$\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2-\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^n,V_j)=\frac{\lambda\Delta t}{h^2}\sum_{j=1}^{J-1}(V_j,A\Delta_+\Delta_-V_j)+\lambda\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}(V_j,f(V_j)).\qquad(7.2.12)$$

从引理 7.1.1 中的公式 (7.1.2) 可以验证

$$\sum_{j=1}^{J-1}(V_j,A\Delta_+\Delta_-V_j)=-\sum_{j=1}^{J-1}(\Delta_+V_j,A\Delta_+V_j)-(V_0,A(V_1-V_0))+(V_J,A(V_J-V_{J-1})).$$

利用系数矩阵 A 的非负定性和 V_j 满足适当的有限差分边值条件 $(*)_h$, 则

$$\sum_{j=1}^{J-1}(V_j,A\Delta_+\Delta_-V_j)=-\sum_{j=1}^{J-1}(\Delta_+V_j,A\Delta_+V_j)\leqslant 0.$$

利用假定 (II), 式 (7.2.12) 右端的最后一项有估计

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J-1}(V_j,f(V_j))&\leqslant\sum_{j=1}^{J-1}(V_j-0,f(V_j)-f(0))+\sum_{j=1}^{J-1}(V_j,f(0))\\&\leqslant b\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2+\delta\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2+\frac{J-1}{4\delta}|f(0)|^2\\&=(b+\delta)\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2+\frac{J-1}{4\delta}|f(0)|^2.\end{aligned}$$

式 (7.2.12) 左端第二项有估计

$$\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^n,V_j)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J-1}|v_j^n|^2,$$

其中 $\delta>0$. 因此将上面三个不等式代入式 (7.2.12), 得到

$$(1-2\lambda(b+\delta)\Delta t)\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2\leqslant\sum_{j=1}^{J-1}|v_j^n|^2+\lambda\Delta t\frac{J-1}{2\delta}|f(0)|^2.$$

假定 Δt 满足不等式 $1-2b\Delta t>0$. 我们可以取 $\delta>0$ 如此小, 使得 $1-2(b+\delta)\Delta t>0$. 所以 $\sum_{j=1}^{J-1}|V_j|^2$ 关于参数 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 是一致有界的. 这样, 非线性方程组 $(7.2.3)_h$ 和 $(*)_h$ 的解存在.

下证唯一性. 设 $\{V_j\}$ 和 $\{\overline{V}_j\}$ 是非线性方程组 $(7.2.3)_h$ 和 $(*)_h$ 的两个解, 则有

$$V_j - v_j^n = A\frac{\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_- V_j + \Delta t f(V_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, J-1)$$

和

$$\overline{V}_j - v_j^n = A\frac{\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_- \overline{V}_j + \Delta t f(\overline{V}_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, J-1).$$

上面第一个方程组减去第二个方程组, 得

$$V_j - \overline{V}_j = A\frac{\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_-(V_j - \overline{V}_j) + \Delta t(f(V_j) - f(\overline{V}_j)) \quad (j = 1, 2, \cdots, J-1).$$

上式向量方程与 $V_j - \overline{V}_j$ 作数量积后, 并对 $j = 1, 2, \cdots, J-1$ 求和, 推出

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J-1}|V_j - \overline{V}_j|^2 =& \frac{\Delta t}{h^2}\sum_{j=1}^{J-1}(V_j - \overline{V}_j, A\Delta_+\Delta_-(V_j - \overline{V}_j)) \\ &+ \Delta t\sum_{j=1}^{J-1}(V_j - \overline{V}_j, f(V_j) - f(\overline{V})_j).\end{aligned}$$

因为 $\{V_j\}$ 和 $\{\overline{V}_j\}$ 都满足边值条件 $(*)_h$ 和 $f(u)$ 满足条件 (7.2.9), 上面的等式可用下面的不等式代替

$$(1 - b\Delta t)\sum_{j=1}^{J-1}|V_j - \overline{V}_j|^2 \leqslant 0,$$

所以在 $1 - b\Delta t > 0$ 的条件下, $\sum_{j=1}^{J-1}|V_j - \overline{V}_j|^2 = 0$. □

7.2.2 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$ 在适当的有限差分边值条件 $(*)_h$ 和离散的初值条件 $(7.2.8)_h$ 下解的先验估计

下面作具有适当边值条件 $(*)_h$ 和离散的初值条件 $(7.2.8)_h$ 的有限差分组 $(7.2.3)_h$ 解的一系列估计.

引理 7.2.2 设假定 (I) 和 (II) 成立, $\varphi \in C[0, \ell]$. 当 Δt 充分小使得 $1 - 4b\Delta t > 0$ 时, 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(*)_h$ 和 $(7.2.8)_h$ 的解 $v_j^n (j = 0, 1, \cdots, J; n = 1, 2, \cdots, N)$ 有估计

$$\max_{n=0,1,\cdots,N}\|v_h^n\|_2 \leqslant K\{\|\varphi_h\|_2 + |f(0)|\}, \tag{7.2.13}$$

其中 K 是不依赖于步长 h 和 Δt 的常数.

证明 作有限差分方程组 $(7.2.3)_h$ 与向量 v_j^{n+1} 的数量积, 结果对 $j=1,2,\cdots,J-1$ 求和, 则对于 $n=0,1,\cdots,N-1$ 有

$$\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^{n+1},v_j^{n+1}-v_j^n)h=\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}\left(v_j^{n+1},A\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}\right)h+\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^{n+1},f_j^{n+1})h. \tag{7.2.14}$$

由于假定 (I) 和有限差分边值条件 $(*)_h$, 应用引理 7.1.1 中的公式 (7.1.2), 得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J-1}\left(v_j^{n+1},A\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}\right)h=&-\sum_{j=0}^{J-1}\left(\frac{\Delta_+v_j^{n+1}}{h},A\frac{\Delta_+v_j^{n+1}}{h}\right)h\\&-\left(v_0^{n+1},A\frac{\Delta_+v_0^{n+1}}{h}\right)h+\left(v_J^{n+1},A\frac{\Delta_-v_J^{n+1}}{h}\right)h\leqslant 0.\end{aligned}$$

由假定 (II) 推知

$$\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^{n+1},f_j^{n+1})h\leqslant(b+\delta)\sum_{j=1}^{J-1}|v_j^{n+1}|^2h+\frac{1}{4\delta}\ell|f(0)|^2,$$

其中 $\delta>0$. 由式 (7.2.14) 和上式可导出

$$\sum_{j=1}^{J-1}|v_j^{n+1}|^2h-\sum_{j=1}^{J-1}|v_j^n|^2h\leqslant 2(b+\delta)\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}|v_j^{n+1}|^2h+\frac{\Delta t\ell}{2\delta}|f(0)|^2$$

或改写为

$$\|v^{n+1}\|_2^2\leqslant\frac{\|v^n\|_2^2+\dfrac{\Delta t\ell}{2\delta}|f(0)|^2}{1-2(b+\delta)\Delta t}.$$

从这个迭代关系, 当 Δt 充分小时, 容易得估计

$$\begin{aligned}\|v_j^n\|_2^2&\leqslant\frac{\|v_h^{n-1}\|_2^2+\dfrac{\Delta t\ell}{2\delta}|f(0)|^2}{1-2(b+\delta)\Delta t}\\&\leqslant\frac{\|v_h^{n-2}\|_2^2+\dfrac{\Delta t\ell}{2\delta}|f(0)|^2[1+(1-2(b+\delta)\Delta t)]}{[1-2(b+\delta)\Delta t]^2}\\&\leqslant\frac{\|v_h^{n-3}\|_2^2+\dfrac{\Delta t\ell}{2\delta}|f(0)|^2\{1+[1+(1-2(b+\delta)\Delta t)](1-2(b+\delta)\Delta t)^2\}}{[1-2(b+\delta)\Delta t]^3}\\&\leqslant\cdots\leqslant[1-2(b+\delta)\Delta t]^{-n}\left\{\|\varphi_h\|_2^2+\frac{\ell|f(0)|^2}{2\delta(b+\delta)}\right\}.\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

因为 $1-4b\Delta t>0$, 所以可知

$$
\begin{aligned}
[1-2(b+\delta)\Delta t]^{-1} &= 1+2(b+\delta)\Delta t+\frac{[2(b+\delta)\Delta t]^2}{(1-4b\Delta t)+2(b-\delta)\Delta t} \\
&\leqslant 1+2(b+\delta)\Delta t+\frac{[2(b+\delta)\Delta t]^2}{2(b-\delta)\Delta t}.
\end{aligned}
$$

因此取 $\delta>|b|$, 不论常数 b 是正是负, 都有 $[1-2(b+\delta)\Delta t]^{-1}<1+2(b+\delta)\Delta t$. 于是由式 (7.2.15) 推出

$$
\|v_h^n\|_2^2 \leqslant \mathrm{e}^{2(b+\delta)T}\left\{\|\varphi_h\|_2^2+\frac{\ell|f(0)|^2}{2\delta(b+\delta)}\right\}.
$$

由此知式 (7.2.13) 成立. □

下面估计 $\|\delta v_h^n\|_2$.

引理 7.2.3 在假定 (I), (II) 和 $\varphi(x)\in C^1[0,\ell]$ 的条件下, 对应于广义 Schrödinger 型方程组 (7.2.3) 的第二初边值问题 (7.2.5) 的有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(7.2.5)_h$ 和 $(7.2.8)_h$ 的近似解 v_j^n $(j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N)$ 有估计

$$
\max_{n=0,1,\cdots,N}\|\delta v_h^n\|_2\leqslant K_2, \tag{7.2.16}
$$

其中 K_2 是不依赖于步长 h 和 Δt 的常数.

证明 作向量 $\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}\dfrac{\Delta t}{h^2}h$ 与有限差分方程组 $(7.2.3)_h$ 的数量积, 其结果对 $j=1,2,\cdots,J-1$ 求和, 得等式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2},v_j^{n+1}-v_j^n\right)h \\
=&\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2},A\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}\right)h \\
&+\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2},f_j^{n+1}\right)h,\quad n=1,2,\cdots,N-1.
\end{aligned} \tag{7.2.17}
$$

对于式 (7.2.17) 的左端有

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2},v_j^{n+1}-v_j^n\right)h =& -\sum_{j=0}^{J-1}\left(\frac{\Delta_+v_j^{n+1}}{h},\frac{\Delta_+v_j^{n+1}}{h}-\frac{\Delta_+v_j^n}{h}\right)h \\
&-\left(\frac{\Delta_+v_0^{n+1}}{h},v_0^{n+1}-v_0^n\right)+\left(\frac{\Delta_-v_J^{n+1}}{h},v_J^{n+1}-v_J^n\right), \\
&n=1,2,\cdots,N-1.
\end{aligned} \tag{7.2.18}
$$

因为 $\{v_j^{n+1}\}$ 和 $\{v_j^n\}$ 二者都满足有限差分边值条件 $(*)_h$, 式 (7.2.18) 右端两项为零, 所以有

$$\sum_{j=1}^{J-1}\Big(\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}, v_j^{n+1}-v_j^n\Big)h \leqslant -\frac{1}{2}\Big(\|\delta v_h^{n+1}\|_2^2 - \|\delta v_h^n\|_2^2\Big). \tag{7.2.19}$$

由于系数 A 是非负定的, 式 (7.2.17) 右端的第一项是非负的. 式 (7.2.17) 右端的第二项可以写为

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{J-1}\Big(\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}, f_j^{n+1}\Big)h\\ =&-\sum_{j=0}^{J-1}\Big(\frac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}, \frac{\Delta_+ f_j^{n+1}}{h}\Big)h\\ &-\Big(\frac{\Delta_+ v_0^{n+1}}{h}, f_0^{n+1}\Big)+\Big(\frac{\Delta_- v_J^{n+1}}{h}, f_J^{n+1}\Big),\quad n=1,2,\cdots,N-1,\end{aligned} \tag{7.2.20}$$

其中 $f_0^{n+1}=f(v_0^{n+1})$ 和 $f_J^{n+1}=f(v_J^{n+1})$. 应用假定 (II)

$$\sum_{j=0}^{J-1}\Big(\frac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}, \frac{\Delta_+ f_j^{n+1}}{h}\Big)h \leqslant b\|\delta v_h^{n+1}\|_2^2.$$

对于第二边值条件 (7.2.5) 和对应的有限差分边值条件 $(7.2.5)_h$, 对于 $n=0,1,\cdots,N$, 有 $\Delta_+ v_0^n = \Delta_- v_J^n = 0$. 因此式 (7.2.20) 的最后两式等于零. 于是式 (7.2.20) 变为

$$-\sum_{j=0}^{J-1}\Big(\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}, f_j^{n+1}\Big)h \leqslant b\|\delta v_h^{n+1}\|_2^2. \tag{7.2.21}$$

对于第一边值条件 (7.2.4), 混合边值条件 (7.2.6) 或 (7.2.7) 和对应有限差分边值条件 $(7.2.4)_h$, $(7.2.6)_h$ 或 $(7.2.7)_h$, 如果方程组 (7.2.3) 是齐的, 即 $f(0)$ 是零向量, 则式 (7.2.21) 也是正确的. 最后, 由式 (7.2.17), 式 (7.2.19) 和式 (7.2.21) 得

$$\|\delta v_h^{n+1}\|_2^2 - \|\delta v_h^n\|_2^2 \leqslant 2b\Delta t\|\delta v_h^{n+1}\|_2^2. \tag{7.2.22}$$

由此推出式 (7.2.16) 成立. □

利用证明引理 7.2.3 的方法, 可证以下引理.

引理 7.2.4 设引理 7.2.3 的条件成立. 又设方程组 (7.2.3) 是齐次的, 即 $f(0)=0$, 则对于对应的广义 Schrödinger 方程组 (7.2.3) 的第一初边值问题 (7.2.4), (7.2.8) 和混合初边值问题 (7.2.6), (7.2.8) 或 (7.2.7), (7.2.8) 的有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(7.2.4)_h$, $(7.2.8)_h$; $(7.2.3)_h$, $(7.2.6)_h$, $(7.2.8)_h$ 或 $(7.2.3)_h$, $(7.2.7)_h$, $(7.2.8)_h$ 的解关于步长 h 和 Δt 有一致估计 (7.2.16).

现在估计 $\left\|\dfrac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t}\right\|_2$.

引理 7.2.5　设假定 (I), (II) 和 (III) 成立. 对于有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(*)_h$ 和方程组 $(7.2.8)_h$ 的离散向量解 $\{v_j^n|\ j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N\}$ 有估计

$$\max_{n=0,1,\cdots,N-1}\left\|\frac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t}\right\|_2\leqslant K_3, \tag{7.2.23}$$

其中常数 K_3 不依赖于 h 和 Δt.

证明　由有限差分组 $(7.2.3)_h$ 知, 在网点 (x_j,t^{n+1}) 和 (x_j,t^n) 上, 对于 $n=0,1,\cdots,N-1$ 有

$$\begin{aligned}\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}&=A\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}+f_j^{n+1},\\ \frac{v_j^n-v_j^{n-1}}{\Delta t}&=A\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^n}{h^2}+f_j^n.\end{aligned}$$

于是商 $z_j^{n+1}=\dfrac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}$ $(j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N-1)$ 满足下列差分方程组

$$\frac{z_j^{n+1}-z_j^n}{\Delta t}=A\frac{\Delta_+\Delta_-z_j^{n+1}}{h^2}+\frac{f_j^{n+1}-f_j^n}{\Delta t}(j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1). \tag{7.2.24}$$

令 v_j^{-1} $(j=1,2,\cdots,J-1)$ 由下列等式定义

$$z_j^0=\frac{\overline{\varphi}_j-v_j^{-1}}{\Delta t}=A\frac{\Delta_+\Delta_-\overline{\varphi}_j}{h^2}+f(\overline{\varphi}_j),\quad j=1,2,\cdots,J-1, \tag{7.2.25}$$

其中 $\overline{\varphi}_j=\varphi_j$ $(j=1,2,\cdots,J-1)$, $\overline{\varphi}_0$ 和 $\overline{\varphi}_J$ 是由有限差分近似边值条件 $(*)_h$ 确定. 值 v_0^{-1} 和 v_J^{-1} 由假定 $\{v_j^{-1}|\ j=0,1,\cdots,J\}$ 满足有限差分边值条件 $(*)_h$ 给定. 因此方程组 (7.2.24) 对于 $n=0$ 成立. 显然 $\{z_j^n|j=0,1,\cdots,J;n=1,2,\cdots,N\}$ 满足有限差分边值条件 $(*)_h$.

作向量方程 (7.2.24) 和向量 $z_j^{n+1}h\Delta t$ 的数量积, 其结果对 $j=1,2,\cdots,J-1$ 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J-1}(z_j^{n+1},z_j^{n+1}-z_j^n)h=&\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}\left(z_j^{n+1},A\frac{\Delta_+\Delta_-z_j^{n+1}}{h^2}\right)h\\&+\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}\left(z_j^{n+1},\frac{f_j^{n+1}-f_j^n}{\Delta t}\right)h,\end{aligned} \tag{7.2.26}$$

其中 $n=0,1,\cdots,N-1$. 利用假定 (II) 有

$$\sum_{j=1}^{J-1}\left(z_j^{n+1},\frac{f_j^{n+1}-f_j^n}{\Delta t}\right)h\leqslant b\sum_{j=1}^{J-1}|z_j^{n+1}|^2h. \tag{7.2.27}$$

利用系数矩阵 A 是非负定的, 离散向量函数 $z_j^n(j=0,1,\cdots,J;n=1,2,\cdots,N)$ 满足适当的有限差分边值条件 $(*)_h$ 和引理 7.1.1, 由式 (7.2.26), 式 (7.2.27) 推出对于 $n=1,2,\cdots,N-1$,

$$\sum_{j=1}^{J-1}|z_j^{n+1}|^2h-\sum_{j=1}^{J-1}|z_j^n|^2h\leqslant 2b\Delta t\sum_{j=1}^{J-1}|z_j^{n+1}|^2h,$$

因此对于 $n=1,2,\cdots,N-1$ 有

$$\|z_h^{n+1}\|_2^2\leqslant(1-2b\Delta t)^{-\frac{n+1}{2}}\|z_h^0\|_2. \qquad \square$$

引理 7.2.6 在引理 7.2.5 的条件下成立估计

$$\max_{n=0,1,\cdots,N}\|\delta^2v_h^n\|_2\leqslant K_4, \tag{7.2.28}$$

其中常数 K_4 不依赖于 h 和 Δt.

证明 因为 A 是非奇异常数矩阵, 所以逆矩阵 A^{-1} 存在. 注意到估计 (7.2.13) 和式 (7.2.23), 从方程组 $(7.2.3)_h$ 马上推出估计 (7.2.28). $\square$

下面继续给出有限差分组解的一些最大模估计.

引理 7.2.7 在引理 7.2.3 和引理 7.2.4 的条件下, 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(*)_h$ 和 $(7.2.8)_h$ 的离散向量解 $v_\Delta=\{v_j^n|j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N\}$ 有下列估计

$$\max_{\substack{j=0,1,\cdots,J\\n=0,1,\cdots,N}}|v_j^n|\leqslant K_5; \tag{7.2.29}$$

$$\max_{n=0,1,\cdots,N}|v_m^n-v_s^n|\leqslant K_6|x_m-x_s|; \tag{7.2.30}$$

$$\max_{n=0,1,\cdots,N}|\Delta_+v_m^n-\Delta_+v_s^n|\leqslant K_7h|x_m-x_s|^{\frac12}; \tag{7.2.31}$$

$$\max_{j=0,1,\cdots,J}|v_j^m-v_j^s|\leqslant K_8|t^m-t^s|^{\frac34} \tag{7.2.32}$$

和

$$\max_{j=0,1,\cdots,J-1}|\Delta_+v_j^m-\Delta_+v_j^s|\leqslant K_9h|t^m-t^s|^{\frac14}, \tag{7.2.33}$$

其中 $m,s=0,1,\cdots,J$ 或 $m,s=0,1,\cdots,N$ 和 $K_i\ (i=5,6,7,8,9)$ 是不依赖于 h 和 Δt 的常数.

证明 从引理 7.1.2 的证明中知道, 对于任意的离散函数 v_j $(j=0,1,\cdots,J; n=0,1,\cdots,N)$ 我们有

$$(v_m^n)^2-(v_s^n)^2=\sum_{j=s}^{m-1}(v_{j+1}^n+v_j^n)\frac{\Delta_j v_j^n}{h}h\leqslant 2\|v_h^n\|_2\|\delta v_h^n\|_2.$$

类似于引理 7.1.2 由上式出发可证

$$\max_{j=0,1,\cdots,J}|v_j^n|\leqslant\sqrt{2}\|v_h^n\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta v_h^n\|_2+\frac{\|v_h^n\|_2}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}=K_5. \quad (7.2.34)$$

于是式 (7.2.9) 得证.

在一般关系 (7.2.34) 中用 $\dfrac{\Delta_+ v_j^n}{h}$ $(j=0,1,\cdots,J-1)$ 代替 v_j^n 可得

$$\max_{n=0,1,\cdots,N}\left|\frac{\Delta_+ v_j^n}{h}\right|\leqslant\max_{n=0,1,\cdots,N}\sqrt{2}\|\delta v_h^n\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^2 v_h^n\|_2+\frac{\|\delta v_h^n\|_2}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}=K_6. \quad (7.2.35)$$

以上 K_5 和 K_6 是不依赖于 h 和 Δt 的常数. 由式 (7.2.35) 直接推出式 (7.2.30) 成立.

不等式

$$\left|\frac{\Delta_+ v_m^n}{h}-\frac{\Delta_+ v_s^n}{h}\right|\leqslant\left|\sum_{j=s}^{m-1}\frac{\Delta_+^2 v_j^n}{h^2}h\right|\leqslant|x_m-x_s|^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=s}^{m-1}\left|\frac{\Delta_+^2 v_j^n}{h^2}\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}}$$

给出估计 (7.2.31).

下面证明式 (7.2.32). 因为离散函数 $\{v_j^m-v_j^s\}(j=0,1,\cdots,J)$ 满足离散边值条件 $(*)_h$, 对于 $v_j^m-v_j^s$ 由引理 7.1.1 中的关系式 (7.1.2) 推出

$$\sum_{j=1}^{J-1}(v_j^m-v_j^s)\Delta_+\Delta_-(v_j^m-v_j^s)=-\sum_{s=0}^{J-1}[\Delta_+(v_j^m-v_j^s)]^2.$$

因此有

$$\|\delta(v_j^m-v_j^s)\|_2^2\leqslant\|v_h^m-v_h^s\|_2\|\delta^2(v_h^m-v_h^s)\|_2. \quad (7.2.36)$$

类似于式 (7.2.34) 的推导可得

$$|v_j^m-v_j^s|\leqslant\sqrt{2}\|v_h^m-v_h^s\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta(v_h^m-v_h^s)\|_2+\frac{\|v_h^m-v_h^s\|_2}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.2.37)$$

将式 (7.3.36) 代入式 (7.2.37), 对于 $j=0,1,\cdots,J$ 可见

$$|v_j^m-v_j^s|\leqslant\sqrt{2}\|v_h^m-v_h^s\|_2^{\frac{3}{4}}\left(\|\delta^2(v_h^m-v_h^s)\|_2^{\frac{1}{4}}+\frac{\|v_h^m-v_h^s\|_2^{\frac{1}{4}}}{\ell^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (7.2.38)$$

对于式 (7.2.38) 右端的因子当 $m-1-s>0$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\|v_h^m - v_h^s\|_2^2 =& \sum_{j=0}^{J} |v_j^m - v_j^s|^2 h = \sum_{j=0}^{J} \left| \sum_{n=s}^{m-1} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \Delta t \right|^2 h \\
\leqslant & |t^m - t^s| \left(\sum_{n=s}^{m-1} \left\| \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right\|_2^2 \Delta t \right) \\
\leqslant & (m-1-s)|t^m - t^s|^2 \left(\max_{n=0,1,\cdots,N-1} \left\| \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right\|_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{7.2.39}
$$

和

$$
\|\delta^2(v_h^m - v_h^s)\|_2^{\frac{1}{4}} + \frac{\|v_h^m - v_h^s\|_2^{\frac{1}{4}}}{\ell^{\frac{1}{2}}} \leqslant (\|\delta^2 v_h^m\|_2 + \|\delta^2 v_h^s\|_2)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{\|v_h^m\|_2}{\ell^{\frac{1}{2}}} + \frac{\|v_h^m\|_2}{\ell^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{7.2.40}
$$

将式 (7.2.39) 和式 (7.2.40) 代入式 (7.2.38), 并注意到式 (7.2.13), 式 (7.2.23) 和式 (7.2.28), 即得式 (7.2.32).

现在估计引理的最后一个估计式 (7.2.33). 类似于式 (7.2.35) 的估计可得

$$
\left| \frac{\Delta_+(v_j^m - v_j^s)}{h} \right| \leqslant \sqrt{2} \|\delta(v_h^m - v_h^s)\|_2^{\frac{1}{2}} \left[\|\delta^2(v_h^m - v_h^s)\|_2 + \frac{\|\delta(v_h^m - v_h^s)\|_2}{\ell} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.2.41}
$$

把式 (7.2.36) 代入式 (7.2.41) 有

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta_+ v_j^m - \Delta_+ v_j^s}{h} \right| \leqslant & \sqrt{2} \|v_h^m - v_h^s\|_2^{\frac{1}{4}} \|\delta^2(v_h^m - v_h^s)\|_2^{\frac{1}{4}} \\
& \times \left\{ \|\delta^2(v_h^m - v_h^s)\|_2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\ell}} \|v_h^m - v_h^s\|_2^{\frac{1}{4}} \|\delta^2(v_h^m - v_h^s)\|_2^{\frac{1}{4}} \right\} \\
\leqslant & \sqrt{2} \|v_h^m - v_h^s\|_2^{\frac{1}{4}} \left\{ \|\delta^2(v_h^m - v_h^s)\|_2^{\frac{3}{4}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{\ell}} \|v_h^m - v_h^s\|_2^{\frac{1}{4}} \|\delta^2(v_h^m - v_h^s)\|_2^{\frac{1}{2}} \right\} \\
\leqslant & \sqrt{2} \Delta t^{\frac{1}{4}} \left\| \frac{v_h^m - v_h^s}{\Delta t} \right\|_2^{\frac{1}{4}} \left\{ [\|\delta^2 v_h^m\|_2 + \|\delta^2 v_h^s\|_2]^{\frac{3}{4}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{\ell}} [\|\delta^2 v_h^m\|_2 + \|\delta^2 v_h^s\|_2] + \frac{1}{\sqrt{\ell}} [\|v_h^m\|_2 + \| v_h^m\|_2]^{\frac{1}{2}} \right\}.
\end{aligned}
$$

由上式可导出式 (7.2.33) 成立. □

7.2.3 当 $h^2 + \Delta t^2 \to 0$ 时, 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(*)_h$, $(7.2.8)_h$ 的离散向量解 $v_\Delta = \{v_j^n | j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N\}$ 的收敛性

对于 m 维离散向量函数 $v_\Delta = \{v_j^n | j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N\}$, 我们构造定义在矩形域 Q_T 上 m 维块块常值向量函数集合.

对于 $(x,t) \in Q_j^n = \{jh < x \leqslant (j+1)h; n\Delta t < t \leqslant (n+1)\Delta t\}(j = 0,1,\cdots,J-1; n = 0,1,\cdots,N-1)$, 令 $v_{h\Delta t}(x,t) = v_j^{n+1}$ 和 $\overline{v}_{h\Delta t}(x,t) = \dfrac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}$, 则 $v_{h\Delta t}(x,t)$ 和 $\overline{v}_{h\Delta t}(x,t)$ 在矩形域 $Q_T = \{0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上都是 m 维块块常值向量函数. 类似地, 对于 $(x,t) \in Q_j^n(j = 0,1,\cdots,J-1; n = 0,1,\cdots,N-1)$ 令, $\overline{\overline{v}}_{h\Delta t}(x,t) = \dfrac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}$ 和对于 $(x,t) \in Q_0^n(n = 0,1,\cdots,N-1)$, $\overline{\overline{v}}_{h\Delta t}(x,t) = \dfrac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}$. 我们还对于 $j = 0,1,\cdots,J-1$ 和 $n = 0,1,\cdots,N-1$ 在 Q_j^n 上定义 $\widetilde{v}_{h\Delta t}(x,t) = \dfrac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}$.

直接从引理 7.2.2~引理 7.2.6 得到这些 m 维块块常值向量函数 $v_{h\Delta t}(x,t)$, $\overline{v}_{h\Delta t}(x,t)$, $\overline{\overline{v}}_{h\Delta t}(x,t)$ 和 $\widetilde{v}_{h\Delta t}(x,t)$ 有下列估计

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{h\Delta t}(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overline{v}_{h\Delta t}(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overline{\overline{v}}_{h\Delta t}(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)}\\ &+ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\widetilde{v}_{h\Delta t}(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)} \leqslant K_{10},\end{aligned} \tag{7.2.42}$$

其中 K_{10} 是一不依赖于步长 h 和 Δt 的常数.

我们可以选择序列 $\{h_i, \Delta t_i\}$, 使得当 $i \to \infty$ 时, $h_i^2 + \Delta t_i^2 \to 0$. 于是存在 m 维向量函数 $u(x,t)$, $\overline{u}(x,t)$, $\overline{\overline{u}}(x,t)$ 和 $\widetilde{u}(x,t) \in L^2(Q_T)$, 使得当 $h_i^2 + \Delta t_i^2 \to 0$ 时, 序列 $\{v_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$, $\{\overline{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$, $\{\overline{\overline{v}}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 和 $\{\widetilde{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 分别在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛于 $u(x,t)$, $\overline{u}(x,t)$, $\overline{\overline{u}}(x,t)$ 和 $\widetilde{u}(x,t)$.

对于任意给定的 $1 \leqslant p < \infty$, 序列 $\{v_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 在函数空间 $L^p((0,T); L^2(0,\ell))$ 中是一致有界的, 因此可以从 $\{v_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{v_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$, 使得存在一 m 维向量函数 $w(x,t) \in L^p((0,T); L^2(0,\ell))$ 且当 $h_i^2 + \Delta t_i^2 \to 0$ 时, 这子序列在 $L^p((0,T); L^2(0,\ell))$ 中弱收敛于 $w(x,t)$. 对于任意光滑试函数 $\Phi(x,t)$ 成立

$$\int\int_{Q_T} \Phi(x,t)[u(x,t) - w(x,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

这表示 $u(x,t) = w(x,t)$. 所以对于任意的 $1 \leqslant p < \infty$, $u(x,t) \in L^p((0,T); L^2(0,\ell))$. 因为序列的弱极限函数的范数不超过序列函数范数的下极限, 所以 m 维向量函数 $u(x,t)$ 的范数在函数空间 $L^p((0,T); L^2(0,\ell))$ 中关于 $1 \leqslant p < \infty$ 是一致有界的. 由此推出 $u(x,t)$ 属于函数空间 $L^\infty((0,T); L^2(0,\ell))$. 用类似的方法可以证明对于 m 维极限向量函数 $\overline{u}(x,t)$, $\overline{\overline{u}}(x,t)$ 和 $\widetilde{u}(x,t)$ 也是正确的, 即 $\overline{u}(x,t)$, $\overline{\overline{u}}(x,t)$ 和 $\widetilde{u}(x,t)$ 也是函数空间 $L^\infty((0,T); L^2(0,\ell))$ 中的元素, 则有

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overline{u}(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overline{\overline{u}}(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)}\\ &+ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\widetilde{u}(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)} \leqslant K_{10}.\end{aligned}$$

现在要证明 $\overline{u}(x,t)=u_x(x,t)$, $\widetilde{u}(x,t)=u_t(x,t)$ 和 $\overline{\overline{u}}(x,t)=u_{xx}(x,t)$.

令 $\Phi(x,t)$ 是在矩形开域 $\{0<x<\ell, 0<t<T\}$ 上具有有限支集的光滑函数. 对于 $j=0,1,\cdots,J$ 和 $n=0,1,\cdots,N$ 定义 $\Phi_j^n=\Phi(x_j,t^n)$. 定义块块常值函数 $\Phi_{h\Delta t}(x,t)$, $\widetilde{\Phi}_{h\Delta t}(x,t)$ 和 $\overline{\Phi}_{h\Delta t}(x,t)$ 如下: 在 $Q_j^n(j=0,1,\cdots,J-1;n=0,1,\cdots,N-1)$ 中

$$\Phi_{h\Delta t}(x,t)=\Phi_j^{n+1},\quad \overline{\Phi}_{h\Delta t}(x,t)=\frac{\Delta_+\Phi_j^{n+1}}{h}\ \text{和}\ \widetilde{\Phi}_{h\Delta t}(x,t)=\frac{\Phi_j^{n+1}-\Phi_j^n}{\Delta t}.$$

显然, 当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 块块常值函数 $\Phi_{h\Delta t}(x,t)$, $\overline{\Phi}_{h\Delta t}(x,t)$ 和 $\widetilde{\Phi}_{h\Delta t}(x,t)$ 分别在矩形区域 Q_T 上一致收敛于 $\Phi(x,t)$, $\Phi_x(x,t)$ 和 $\Phi_t(x,t)$. 容易写出下面的关系式

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Phi_j^{n+1}\frac{v_{j+1}^{n+1}-v_j^{n+1}}{h}+\frac{\Phi_{j+1}^{n+1}-\Phi_j^{n+1}}{h}v_{j+1}^{n+1}\right)h\Delta t\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{J-1}(\Phi_{j+1}^{n+1}v_{j+1}^{n+1}-\Phi_j^{n+1}v_j^{n+1})\Delta t=0.\end{aligned}$$

上式可用下面的积分等式替换

$$\int\int_{Q_T}[\Phi_{h\Delta t}(x,t)\overline{v}_{h\Delta t}(x,t)+\overline{\Phi}_{h\Delta t}(x,t)v_{h\Delta t}(x,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

注意到 $\{v_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 和 $\{\overline{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 分别弱收敛于 $u(x,t)$ 和 $\overline{u}(x,t)$, 所以当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 对于任意光滑试函数 $\Phi(x,t)$ 得

$$\int\int_{Q_T}[\Phi(x,t)\overline{u}(x,t)+\Phi_x(x,t)u(x,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

这意味着 m 维向量函数 $\overline{u}(x,t)$ 是 m 维向量函数 $u(x,t)$ 关于 x 的广义导数, 即 $\overline{u}(x,t)=u_x(x,t)$. 从类似的等式

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Phi_j^n\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}+\frac{\Phi_j^{n+1}-\Phi_j^n}{\Delta t}v_j^{n+1}\right)h\Delta t=0$$

和

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{J-1}\left(\Phi_j^n\frac{v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n}{h^2}+\frac{\Phi_{j+1}^n-\Phi_j^n}{h}\frac{v_{j+1}^n-v_j^n}{h}\right)h\Delta t=0,$$

推出积分

$$\int\int_{Q_T}[\Phi(x,t)\widetilde{u}(x,t)+\Phi_t(x,t)u(x,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

和

$$\int\int_{Q_T}[\Phi(x,t)\overline{\overline{u}}(x,t)+\Phi_x(x,t)\overline{u}(x,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

由此得到 $\widetilde{u}(x,t)=u_t(x,t)$ 和 $\overline{\overline{u}}(x,t)=u_{xx}(x,t)$.

现在通过在每一小矩形网格 Q_j^n $(j=0,1,\cdots,J-1;n=0,1,\cdots,N-1)$ 的四个角点上的离散函数值的双线性扩张分别构造对应于离散向量函数 $v_j^n(j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N)$ 和 $\dfrac{\Delta_+v_j^n}{h}$ $(j=0,1,\cdots,J-1;n=0,1,\cdots,N-1)$ 的 m 维向量函数 $v_{h\Delta t}^*(x,t)$ 和 $\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)$ 如下: 对于 $(x,t)\in Q_j^n$ $(j=0,1,\cdots,J-1;n=0,1,\cdots,N-1)$ 定义

$$\begin{aligned}v_{h\Delta t}^*(x,t)=&\frac{(x-x_j)(t-t^n)}{h\Delta t}v_{j+1}^{n+1}+\frac{(x_{j+1}-x)(t^{n+1}-t)}{h\Delta t}v_j^n\\&+\frac{(x-x_j)(t^{n+1}-t)}{h\Delta t}v_{j+1}^n+\frac{(x_{j+1}-x)(t-t^n)}{h\Delta t}v_j^{n+1}.\end{aligned}$$

还对于 $(x,t)\in Q_j^n$ $(j=0,1,\cdots,J-2;n=0,1,\cdots,N-1)$ 定义

$$\begin{aligned}\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)=&\frac{(x-x_j)(t-t^n)}{h\Delta t}\frac{\Delta_+v_{j+1}^{n+1}}{h}+\frac{(x_{j+1}-x)(t^{n+1}-t)}{h\Delta t}\frac{\Delta_+v_j^n}{h}\\&+\frac{(x-x_j)(t^{n+1}-t)}{h\Delta t}\frac{\Delta_+v_{j+1}^n}{h}+\frac{(x_{j+1}-x)(t-t^n)}{h\Delta t}\frac{\Delta_+v_j^{n+1}}{h}\end{aligned}$$

和对于 $(x,t)\in Q_{J-1}^n(n=0,1,\cdots,N-1)$ 定义

$$\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)=\frac{t-t^n}{\Delta t}\frac{\Delta_-v_J^{n+1}}{h}+\frac{t^{n+1}-t}{\Delta t}\frac{\Delta_-v_J^n}{h}.$$

引理 7.2.8　在引理 7.2.7 的条件下, 在矩形网格上定义的离散向量函数 $\{v_j^n\}$ 和 $\left\{\dfrac{\Delta_+v_j^n}{h}\right\}$ 的双线性扩张构成的 m 维向量函数 $v_{h\Delta t}^*(x,t)$ 和 $\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)$ 分别满足以下估计关系

$$|v_{h\Delta t}^*(x',t)-v_{h\Delta t}^*(x,t)|\leqslant K_{11}|x'-x|,\tag{7.2.43}$$

$$|v_{h\Delta t}^*(x,t')-v_{h\Delta t}^*(x,t)|\leqslant K_{12}|t'-t|^{\frac{3}{4}},\tag{7.2.44}$$

$$|\overline{v}_{h\Delta t}^*(x',t)-\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)|\leqslant K_{13}|x'-x|^{\frac{1}{2}}\tag{7.2.45}$$

和对于 Q_{J-1}^n

$$|\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t')-\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)|\leqslant K_{14}|t'-t|^{\frac{1}{4}},\tag{7.2.46}$$

其中 $x,x'\in[0,\ell];t,t'\in[0,T]$ 和 K_i $(i=11,12,13,14)$ 是不依赖于 h 和 Δt 的常数.

证明 令 $(m-1)h \leqslant x < mh < x' \leqslant (m+1)h$ 和 $n\Delta t \leqslant t \leqslant (n+1)\Delta t$, 则

$$
\begin{aligned}
v_{h\Delta t}^*(x',t) - v_{h\Delta t}^*(x,t) =& \frac{t-t^n}{\Delta t}\Big\{(x'-x)\frac{v_{m+1}^{n+1}-v_n^{n+1}}{h}\Big\} \\
&+ \frac{t^{n+1}-t}{\Delta t}\Big\{(x'-x)\frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h}\Big\}.
\end{aligned}
$$

于是由引理 7.2.7 推出

$$
|v_{h\Delta t}^*(x',t) - v_{h\Delta t}^*(x,t)| \leqslant K_6|x'-x|\Big\{\Big|\frac{t-t^n}{\Delta t}\Big| + \Big|\frac{t^{n+1}-t}{\Delta t}\Big|\Big\} \leqslant K_{11}|x'-x|,
$$

即式 (7.2.43) 成立. 下证式 (7.2.44).

令 $(m-1)\Delta t \leqslant t < m\Delta t < t' \leqslant (m+1)\Delta t$ 和 $jh \leqslant x \leqslant (j+1)h$, 则

$$
\begin{aligned}
v_{h\Delta t}^*(x,t') - v_{h\Delta t}^*(x,t) =& \frac{x-x_j}{h}\Big\{\frac{t'-t}{\Delta t}(v_{j+1}^{m+1} - v_{j+1}^m)\Big\} \\
&+ \frac{x_{j+1}-x}{h}\Big\{\frac{t'-t}{\Delta t}(v_j^{m+1} - v_j^m)\Big\}.
\end{aligned}
$$

利用引理 7.2.7 得

$$
\begin{aligned}
|v_{h\Delta t}^*(x,t') - v_{h\Delta t}^*(x,t)| \leqslant& 2K_8\Big\{\frac{|t'-t|}{\Delta t}\Delta t^{\frac{3}{4}}\Big\} \\
=& 2K_8|t'-t|^{\frac{3}{4}}\Big(\frac{|t'-t|}{\Delta t}\Big)^{\frac{1}{4}} \leqslant K_{12}|t'-t|^{\frac{3}{4}}.
\end{aligned}
$$

令 $(m-1)h < x \leqslant mh < x' \leqslant (m+1)h$ 和 $n\Delta t \leqslant t \leqslant (n+1)\Delta t$, 则

$$
\begin{aligned}
\overline{v}_{h\Delta t}^*(x',t) - \overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t) =& \frac{t-t^n}{\Delta t}\Big\{(x'-x)\frac{\Delta_+ v_{m+1}^{n+1} - \Delta_+ v_m^{n+1}}{h^2}\Big\} \\
&+ \frac{t^{n+1}-t}{\Delta t}\Big\{(x'-x)\frac{\Delta_+ v_{m+1}^n - \Delta_+ v_m^n}{h^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
|\overline{v}_{h\Delta t}^*(x',t) - \overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)| \leqslant& 2K_7|x'-x|h^{-\frac{1}{2}} \\
=& 2K_7|x'-x|^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{|x'-x|}{h}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_{13}|x'-x|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

最后证明估计 (7.2.46). 令 $(m-1)\Delta t \leqslant t < m\Delta t < t' \leqslant (m+1)\Delta t$, 于是

$$
\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t') - \overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t) = \frac{t'-t}{\Delta t}\Big(\frac{\Delta_- v_J^{m+1} - \Delta_- v_J^m}{h}\Big).
$$

从而

$$
\begin{aligned}
|\overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t') - \overline{v}_{h\Delta t}^*(x,t)| \leqslant& 2K_9\frac{|t'-t|}{\Delta t}\Delta t^{\frac{1}{4}} \\
=& 2K_9|t'-t|^{\frac{1}{4}}\Big(\frac{|t'-t|}{\Delta t}\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant K_{14}|t'-t|^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$

□

引理 7.2.8 说明集合 $\{v^*_{h\Delta t}(x,t)\}$ 和 $\{\overline{v}^*_{h\Delta t}(x,t)\}$ 分别在 Hölder 空间 $C^{0,1,\frac{3}{4}}(Q_T)$ 和 $C^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(Q_T)$ 中一致有界和对于 h 和 Δt Hölder 连续. 所以集合 $\{v^*_{h\Delta t}(x,t)\}$ 和 $\{\overline{v}^*_{h\Delta t}(x,t)\}$ 在矩形域 Q_T 上一致有界和等度连续. 因此当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 序列 $\{v^*_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 和 $\{\overline{v}^*_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 在 Q_T 上分别一致收敛于 m 维向量函数 $u^*(x,t)$ 和 $\overline{u}^*(x,t)$.

由 $\{v_{h\Delta t}(x,t)\}$, $\{\overline{v}_{h\Delta t}(x,t)\}$, $\{v^*_{h\Delta t}(x,t)\}$ 和 $\{\overline{v}^*_{h\Delta t}(x,t)\}$ 的构造知, 对于 $(x,t)\in Q_T$ 有

$$\begin{aligned}v^*_{h\Delta t}(x,t)-v_{h\Delta t}(x,t)=&\frac{(x-x_j)(t-t^n)}{h\Delta t}(v_{j+1}^{n+1}-v_j^{n+1})\\&+\frac{(x-x_j)(t^{n+1}-t)}{h\Delta t}(v_{j+1}^{n}-v_j^{n+1})\\&+\frac{(x_{j+1}-x)(t^{n+1}-t)}{h\Delta t}(v_j^n-v_j^{n+1}).\end{aligned}$$

由引理 7.2.7 中估计式 (7.2.30) 和 (7.2.32) 及上式对于 $(x,t)\in Q_T$ 成立

$$|v^*_{h\Delta t}(x,t)-v_{h\Delta t}(x,t)|\leqslant K_{15}(h+\Delta t^{\frac{3}{4}}). \tag{7.2.47}$$

类似可得

$$|\overline{v}^*_{h\Delta t}(x,t)-\overline{v}_{h\Delta t}(x,t)|\leqslant K_{16}(h^{\frac{1}{2}}+\Delta t^{\frac{1}{4}}). \tag{7.2.48}$$

以上指出 $u^*(x,t)=u(x,t)$ 和 $\overline{u}^*(x,t)=u_x(x,t)$ 以及序列 $\{v_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 和 $\{\overline{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 分别在矩形域 Q_T 上也一致分别收敛于 $u(x,t)$ 和 $u_x(x,t)$ 且 $u(x,t)\in C^{0,1,\frac{3}{4},}(Q_T)$ 和 $u_x(x,t)\in C^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(Q_T)$.

这些序列的一致收敛指出 m 维向量函数 $u(x,t)$ 在古典意义下在 Q_T 的侧边满足边值条件 (*) 和在 Q_T 的底部满足初值条件 (7.2.8).

现在证明 $u(x,t)$ 是 Schrödinger 型方程组 (7.2.3) 的初边值问题 (*), (7.2.8) 的整体广义解. 考虑等式

$$\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{n=0}^{N-1}\Phi_j^{n+1}\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}=\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{n=0}^{N-1}\Phi_j^{n+1}A\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}+\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{n=0}^{N-1}\Phi_j^{n+1}f_j^{n+1}.$$

令在 $Q_j^n(j=0,1,\cdots,J-1;n=0,1,\cdots,N-1)$ 上 $F_{h\Delta t}(x,t)=f_j^{n+1}\triangleq f(v_j^{n+1})$. 于是在矩形域 Q_T 上建立了 m 维块块常值向量函数 $F_{h\Delta t}(x,t)$. 因此有以下积分关系

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T}\Phi_{h\Delta t}(x,t)\widetilde{v}_{h\Delta t}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\=&\iint_{Q_T}\Phi_{h\Delta t}(x,t)A\overline{\overline{v}}_{h\Delta t}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}\Phi_{h\Delta t}(x,t)F_{h\Delta t}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因为当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, $\{\Phi_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 在 Q_T 上一致收敛于 $\Phi(x,t)$, $\{\widetilde{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 和 $\{\overline{\overline{v}}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中分别弱收敛于 $u_t(x,t)$ 和 $u_{xx}(x,t)$ 以及 $\{F_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 在 Q_T 上一致收敛于 $f(u(x,t))$, 所以当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 对于在矩形开域 $\{0<x<\ell, 0<t<T\}$ 中有有限支集的任意光滑试函数 $\Phi(x,t)$ 有积分关系

$$\int\int_{Q_T}\Phi(x,t)[u_t(x,t)-Au_{xx}(x,t)-f(u(x,t))]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{7.2.49}$$

式 (7.2.49) 表示 m 维向量函数 $u(x,t)$ 在广义意义下满足 Schrödinger 型方程组 (7.2.3). 所以 $u(x,t)$ 是 Schrödinger 型方程组 (7.2.3) 的初边值问题 (∗), (7.2.8) 的整体广义解, 这就完成了上述问题的存在性证明.

下证解的唯一性. 设 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是方程组 (7.2.3) 的初边值问题 (∗), (7.2.8) 的两个广义解, 则对于任意的试函数 $\Phi(x,t)\in L^2(Q_T)$ $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ 满足等式

$$\int\int_{Q_\tau}\Phi(x,t)[w_t-Aw_{xx}-f(u)+f(v)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$

其中 $0<\tau\leqslant T$. 取一 m 维向量函数 $w(x,t)$ 为试函数 $\Phi(x,t)$, 由上式得

$$\int\int_{Q_T}(w(x,t),w_t-Aw_{xx}-f(u)+f(v))\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

所以有

$$\|w(\cdot,\tau)\|_{L^2(0,\ell)}^2\leqslant 2b\int_0^\tau\|w(\cdot,t)\|_{L^2(0,\ell)}^2\mathrm{d}t,$$

其中 $w(x,0)=0$ 和 $0<\tau\leqslant T$, 则几乎处处 $w(x,t)=0$, 即在 Q_T 上几乎处处 $u(x,t)=v(x,t)$.

因为 Schrödinger 型方程组 (7.2.3) 的初边值问题 (∗), (7.2.8) 的广义解 $u(x,t)$ 是唯一的, 所以当 $h^2+\Delta t^2\to 0$ 时, 上述收敛性成立. 于是有下面的收敛性定理.

定理 7.2.1 设假定 (I), (II) 和 (III) 成立, 则当 $h^2+\Delta t^2\to 0$ 时, 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(7.2.5)_h$, $(7.2.8)_h$ 的 m 维离散向量解 $v_\Delta=\{v_j^n|j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N\}$ 收敛于一 m 维向量函数 $u(x,t)\in Z\triangleq L^\infty((0,T);W^{2,2}(0,\ell))\bigcap W^{1,\infty}((0,T);L^2(0,\ell))$. $u(x,t)$ 是 Schrödinger 型方程组 (7.2.3) 的第二初边值问题 (7.2.5), (7.2.8) 的唯一整体广义解.

定理 7.2.2 设假定 (I), (II) 和 (III) 成立和方程组 (7.2.3) 是齐次的, 即 $f(0)=0$. 当 $h^2+\Delta t^2\to 0$ 时, 有限差分方程组 $(7.2.3)_h$, $(7.2.4)_h$, $(7.2.8)_h$; $(7.2.3)_h$, $(7.2.6)_h$, $(7.2.8)_h$ 和 $(7.2.3)_h$, $(7.2.7)_h$, $(7.2.8)_h$ 的 m 维离散向量解 $v_\Delta=\{v_j^n|j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N\}$ 分别收敛于一 m 维向量函数 $u(x,t)\in Z$. 它们分别是齐次 Schrödinger 方程组 (7.2.3) 的第一初边值问题 (7.2.4), (7.2.8) 以及混合初边值问题 (7.2.6), (7.2.8) 和 (7.2.7), (7.2.8) 的唯一整体广义解.

因此可以把有限差分方程组的离散向量解 v_Δ 认为是 Schrödinger 型方程组适当边值问题 m 维整体广义解 $u(x,t)$ 的近似. 应该强调离散解在下列意义下收敛: $\{v_j^n\}$ 和 $\left\{\dfrac{\Delta + v_j^n}{h}\right\}$ 在 Q_T 上分别一致收敛于 $u(x,t)$ 和 $u_x(x,t)$; $\left\{\dfrac{\Delta_+\Delta_- v_j^n}{h^2}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}\right\}$ 分别在 $L^p((0,T);L^2(0,l))(1 \leqslant p < \infty)$ 中弱收敛于 $u_{xx}(x,t)$ 和 $u_t(x,t)$.

本章主要参考了文献 [75].

第 8 章　分数阶索伯列夫空间

前面已经讨论了非负整数阶的索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$, 即 m 为非负整数时的 $W^{m,p}(\Omega)$, 而且 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开集. 本章讨论 m 取非负实数且 $p=2$ 的空间 $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 和 $W^{m,p}(\Omega)$ 及其性质. 为此我们先介绍速降函数和缓增广义函数及其 Fourier 变换.

8.1　速降函数、缓增广义函数

8.1.1　速降函数

定义 8.1.1　设定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的函数 $\varphi(x)$ 满足如下条件:

(1) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(2) 对于任意 N 重指数 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$ 和 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)$ 成立

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x)=0, \tag{8.1.1}$$

其中 $x^\beta=x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_N^{\beta_N}$, 则称 $\varphi(x)$ 为速降函数. 这种函数全体组成的空间为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, 简记为 $\mathscr{S}$.

由于任意两个速降函数的线性组合仍为速降函数, 所以 $\mathscr{S}$ 是一线性空间.

定理 8.1.1　速降函数的条件 (2) 与下列两条件之一等价:

(1) 对于任意 N 重指数 α,β, 函数 $x^\beta D^\alpha\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上有界;

(2) 对于任意 N 重指数 α 和任意正整数 k, 函数 $(1+|x|^2)^k D^\alpha\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上有界.

证明　由于 $\lim\limits_{|x|\to\infty} x^\beta D^\alpha\varphi(x)=0$, 推知 $x^\beta D^\alpha\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上有界. 反之, 若对于任意 N 重指数 α,β, 函数 $x^\beta D^\alpha\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上有界, 则在 $|x|\neq 0$ 处可写成

$$x^\beta D^\alpha\varphi(x)=\frac{1}{|x|^2}\sum_{i=1}^N x_i^2 x^\beta D^\alpha\varphi(x),$$

再由 $x_i^2x^\beta D^\alpha\varphi(x)$ 的有界性可得

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\beta D^\alpha\varphi(x)=0.$$

注意到 $|x|>1$ 时,

$$|x|^{2k}<(1+|x|^2)^k<2^k|x|^{2k},$$

所以 $(1+|x|^2)^kD^\alpha\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上有界与 $x^\beta D^\alpha\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上有界是等价的. □

$\mathscr{S}$ 是不空的. 例如,

(1) 显然 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中的函数都是速降函数, 易见有以下的包含关系:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\subset\mathscr{S}\subset C^\infty(\mathbb{R}^N);$$

(2) $\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}\in\mathscr{S}$, 其中 $a>0$ 为常数. 事实上, 对于任意 N 重指数 α,β, 函数 $x^\beta D^\alpha\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ 都是形如 $cx^\gamma D^\alpha\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ 项的和, 其中 c 是常数, γ 是 N 重指数, 所以当 $|x|\to\infty$ 时, $\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ 比 x 的任意次幂都更快地趋于零, 所以 $\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ 在无穷远处是速降的, 即 $\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ 是速降函数.

按照速降函数的定义可知, 如果 $\varphi\in\mathscr{S}$, 则对于任意 N 重指数 α 和对于任意非负整数 k, 都有常数 $C>0$, 使得

$$|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant C(1+|x|^2)^{-k},\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

由此可见 $\varphi(x)$ 以及它的各阶导数在无穷远处趋于零的速度比 $|x|$ 的任意次负幂都快, 也就是说, 它们在无穷远处急速下降到零, 所以称 $\varphi(x)$ 为速降函数.

定义 8.1.2 设 A 是 $\mathscr{S}$ 中部分元素组成的集合, 称 A 是 $\mathscr{S}$ 中的有界集合, 如果对于任意给定的 N 重指数 α 和 β, 有

$$|x^\beta D^\alpha\varphi(x)|\leqslant K(\alpha,\beta),\quad\forall\,\varphi\in A,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $K(\alpha,\beta)$ 是只依赖于 α 和 β 的常数.

为了定义 $\mathscr{S}$ 中的收敛性, 先在 $\mathscr{S}$ 中定义可数多个半范数 $P_{\alpha,\beta}(\varphi)$: 设 $\varphi\in\mathscr{S}$, α 和 β 是任意 N 重指数, 令

$$P_{\alpha,\beta}(\varphi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha\varphi(x)|.$$

定义 8.1.3 设序列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset\mathscr{S}$. 如果对于任意 N 重指数 α 和 β 成立

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha\varphi_n(x)|=0,$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在空间 $\mathscr{S}$ 中收敛到零. 记为 $\varphi_n(x)\to0$ (在 $\mathscr{S}$ 中). 如果 $\varphi\in\mathscr{S}$, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset\mathscr{S}$, 对于任意 N 重指数 α 和 β 成立

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(\varphi_n(x)-\varphi(x))|=0,$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在空间 $\mathscr{S}$ 中收敛到 $\varphi(x)$. 记为 $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ (在 $\mathscr{S}$ 中).

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 $\mathscr{S}$ 中的基本序列, 如果对于任意 N 重指数 α 和 β 成立

$$\lim_{n,m\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(\varphi_n(x)-\varphi_m(x))|=0.$$

定理 8.1.2 $\mathscr{S}$ 中的基本序列必是收敛序列, 从而 $\mathscr{S}$(以它的收敛性) 是完备的.

证明 如果 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{S}$ 中的基本序列, 于是对于任意紧集 $B\subset\mathbb{R}^N$ 和 N 重指数 α, $\{D^\alpha\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 B 上是一致有界的. 由 Ascoli-Arzelá 定理推出 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于极限函数 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, 所以导数在紧集上是一致收敛的.

对于任意紧集 B 和任意 N 重指数 α,β 有

$$\sup_{x\in B}|x^\beta D^\alpha\varphi(x)|=\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in B}|x^\beta D^\alpha\varphi_n(x)|\right)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha\varphi_n(x)|\right).$$

因为上式右端不依赖于 B, 我们得知 $\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha\varphi(x)|$ 是有界的, 所以 $\varphi\in\mathscr{S}$.

最后

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B}|x^\beta D^\alpha(\varphi_m(x)-\varphi(x))|&=\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in B}|x^\beta D^\alpha(\varphi_m(x)-\varphi_n(x))|\right)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(\varphi_m(x)-\varphi_n(x))|\right).\end{aligned}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N_0, 当 $m,n\geqslant N_0$ 时, $\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(\varphi_m(x)-\varphi_n(x))|<\varepsilon$. 于是对于 $m>N_0$ 时, $\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(\varphi_m(x)-\varphi(x))|<\varepsilon$. 这就证明了 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$. □

定理 8.1.3 设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 若 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 则 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$.

证明 因为 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 所以存在 $K\subset\subset\mathbb{R}^N$, 使得对一切 n 成立 $\operatorname{supp}\varphi_n\subset K$, $\operatorname{supp}\varphi\subset K$ 和对于任一 N 重指数 α, 函数序列 $D^\alpha\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 K 上一致收敛于 $D^\alpha\varphi(x)$. 从而对于任意 N 重指数 α 和 β 有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(\varphi_n(x)-\varphi(x))|=\max_{x\in K}|x^\beta D^\alpha(\varphi_n(x)-\varphi(x))|.$$

由于 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 故可得定理结论. □

定理 8.1.4 设 $1\leqslant p<\infty$, 则 $\mathscr{S}\subset L^p(\mathbb{R}^N)$.

证明 设 $\varphi\in\mathscr{S}$. 于是

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi(x)|^p\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^N}\left|(1+|x|^2)^{-(N+1)}(1+|x|^2)^{(N+1)}\varphi(x)\right|^p\mathrm{d}x\\&\leqslant\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|(1+|x|^2)^{(N+1)}\varphi(x)\right|\right\}^p\int_{\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^{-(N+1)p}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为上式右端是一有限数, 所以 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^N)$. □

定理 8.1.5 空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在空间 $\mathscr{S}$ 中稠密.

证明 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathscr{S}$ 中任一元素. 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中找一函数 $\psi(x)$, 使得满足当 $|x| \leqslant 1$ 时, $\psi(x)=1$. 对于任意 $\varepsilon>0$, 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\psi(\varepsilon x)\varphi(x)$, 显然 $\varphi_\varepsilon(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 且当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ 时,

$$\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x)=(\psi(\varepsilon x)-1)\varphi(x)=0.$$

对于任意两个固定的 N 重指数 α 和 β, 利用 Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x))| = \sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha[(\psi(\varepsilon x)-1)\varphi(x)]| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|x^\beta \sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma(\psi(\varepsilon x)-1)D^{\alpha-\gamma}\varphi(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{0<\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|D^\gamma(\psi(\varepsilon x)-1)|\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^{\alpha-\gamma}\varphi(x)| \\
&\quad + \sup_{x\in\mathbb{R}^N}|(\psi(\varepsilon x)-1)x^\beta D^\alpha\varphi(x)|.
\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

如果 $\gamma>0$, 则成立

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|D^\gamma(\psi(\varepsilon x)-1)| \leqslant \varepsilon^{|\gamma|}\sup_{s\in\mathbb{R}^N}|D^\gamma\varphi(s)|. \tag{8.1.3}$$

如果 $\gamma=0$, 则成立

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|(\psi(\varepsilon x)-1)x^\beta D^\alpha\varphi(x)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\frac{\psi(\varepsilon x)-1}{1+|x|}(1+|x|)x^\beta D^\alpha\varphi(x)\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1+\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\psi(\varepsilon x)|\right)\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|(1+|x|)x^\beta D^\alpha\varphi(x)|.
\end{aligned}\tag{8.1.4}$$

由式 (8.1.3) 和式 (8.1.4) 知, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 式 (8.1.2) 的右端趋于零. 所以 $\varphi_\varepsilon(x)$ 在 φ 中收敛于 $\varphi(x)$. □

定理 8.1.6 设 $1 \leqslant p < \infty$, 则 $\mathscr{S}$ 空间在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中稠密.

证明 因为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ 和 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 推出 $\mathscr{S}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 的稠密子集: $\bar{\mathscr{S}}=L^p(\mathbb{R}^N)$. □

8.1.2 缓增广义函数

定义 8.1.4 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函称为 $\mathscr{S}$ 上的广义函数, 又称为缓增广义函数.

定义 8.1.5 全体缓增广义函数组成的空间称为缓增广义函数空间, 记为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, 简记为 $\mathscr{S}'$.

定义 8.1.6 (1) 设序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}'$ 和 $l \in \mathscr{S}'$, 如果对于每一个 $\varphi \in \mathscr{S}$ 成立

$$\lim_{n\to\infty} l_n\varphi = l\varphi,$$

就称缓增广义函数序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 l, 记为

$$\lim_{n\to\infty} l_n = l \quad (\text{在 } \mathscr{S}' \text{ 中}).$$

(2) 如果对于 $\mathscr{S}$ 中任一有界集合 A, 一致地成立

$$\lim_{u\to\infty} l_n\varphi = l\varphi, \quad \forall\varphi \in A,$$

则称序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于 l.

定理 8.1.7 $\mathscr{S}'$ 在定义 8.1.6(1) 的收敛意义下是完备的 (证明省略).

定义 8.1.7 设 $l \in \mathscr{S}'$ 和函数 $a(x)$ 满足

(1) 对于任意的 $\varphi \in \mathscr{S}$ 有 $a\varphi \in \mathscr{S}$;

(2) 如果 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 就有 $\{a(x)\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $a(x)\varphi(x)$, 则缓增广义函数 al 由下式确定.

$$al(\varphi) = l(a\varphi), \quad \forall\varphi \in \mathscr{S}.$$

定义 8.1.8 设 $l \in \mathscr{S}'$. 缓增广义函数 l 的导数 $D_j l$ 是一缓增广义函数, 且由下式确定.

$$D_j l(\varphi) = -l(D_j\varphi), \quad \forall\varphi \in \mathscr{S}.$$

容易证实上式右端确是 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函, 所以用上式定义缓增广义函数的导数是合理的.

例 8.1.1 δ 函数是缓增广义函数.

对于 $\varphi \in \mathscr{S}$, $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ 显然满足可加性. δ 也满足连续性. 事实上, 若 $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(x) = 0$ (在 $\mathscr{S}$ 中), 因对任意 N 重指数 β 和 α 有

$$|\delta(\varphi_i)| = |\varphi_i(0)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\beta D^\alpha \varphi_i(x)| \to 0 \quad (i \to \infty),$$

即 $\lim\limits_{i\to\infty} \delta(\varphi_i) = 0$, 所以 δ 连续, 故 $\delta \in \mathscr{S}'$.

定理 8.1.8 $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$.

证明 设 $l \in \mathscr{S}'$. 因为 $\mathscr{S} \supset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 所以可以把 l 看成 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ 上的泛函. 因此只需证明 l 是 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ 上的线性泛函即可. 事实上, l 满足可加性显然. 若

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ 和 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, 且 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 则由定理 8.1.3 知, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$. 由于 l 在 $\mathscr{S}$ 上的连续性推出 l 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ 上的连续性. 因此 l 是 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ 上的线性泛函. □

定理 8.1.9 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $L^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}'$.

证明 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. 下证

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S} \tag{8.1.5}$$

是 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函. 显然式 (8.1.5) 确定 $\mathscr{S}$ 上的一个泛函, 将其记为 l_f (有时把 l_f 就记为 f). 它满足可加性是明显的.

下面分三种情况证明此泛函是连续的.

(1) $1 < p < \infty$ 的情况. 设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$. 对于任意一个 $\tau > 0$ 成立

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi\|_\tau^\tau &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{(1+|x|^2)^{N+1}}(\varphi_n(x) - \varphi(x))(1+|x|^2)^{N+1}\right|^\tau \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left\{\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^{N+1}(\varphi_n(x)-\varphi(x))\right\}^\tau \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^{(N+1)\tau}}.\end{aligned} \tag{8.1.6}$$

当 $n \to \infty$ 时, 式 (8.1.6) 右端第一个因子趋于零, 第二个因子有界, 因此

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_\tau = 0, \tag{8.1.7}$$

其中 $\|\cdot\|_\tau$ $(1 \leqslant \tau \leqslant \infty)$ 表示 $L^\tau(\mathbb{R}^N)$ 中的范数. 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}|\langle l_f, \varphi_n\rangle - \langle l_f, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)(\varphi_n - \varphi(x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|\varphi_n - \varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

其中 p' 是 p 的共轭指数. 由上式和式 (8.1.7) 得

$$\lim_{n\to\infty} \langle l_f, \varphi_n\rangle = \langle l_f, \varphi\rangle,$$

故 l_f 是线性泛函, 即 $f \in \mathscr{S}'$.

(2) $p = 1$ 的情况. 因为

$$\begin{aligned}|\langle l_f, \varphi_n\rangle - \langle l_f, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)(\varphi_n - \varphi(x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi_n - \varphi| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 l_f 是线性泛函, 即 $f \in \mathscr{S}'$.

(3) $p=\infty$ 的情况. 因为

$$|\langle l_f, \varphi_n\rangle - \langle l_f, \varphi\rangle| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_n - \varphi| \mathrm{d}x,$$

根据式 (8.1.6) 可以知道, 当 $n\to\infty$ 时, 上式右端趋于零, 所以 l_f 是线性泛函, 即 $f\in\mathscr{S}'$.

容易验证, $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中的不同元素, 对应着 $\mathscr{S}'$ 中不同的缓增广义函数. □

定理 8.1.10 任一多项式确定一缓增广义函数.

证明 设 $P(x)$ 是任一多项式, 则

$$\langle P, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} P(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi\in\mathscr{S}$$

定义了 $\mathscr{S}$ 上的一个泛函. 满足可加性是显然的. 下面验证连续性. 设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}$, $\varphi\in\mathscr{S}$ 和 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 则对于 $m\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
&|\langle P,\varphi_n\rangle - \langle P,\varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} P(x)(\varphi_n - \varphi(x))\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{P(x)}{(1+|x|^2)^{N+m}}(1+|x|^2)^{N+m}(\varphi_n - \varphi(x))\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant& \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|P(x)(1+|x|^2)^{N+m}(\varphi_n(x)-\varphi(x))\right| \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^{N+m}} \to 0 \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$

所以 $P\in\mathscr{S}'$. □

定理 8.1.11 设 $f\in\mathscr{S}'$,

(1) 若 $P(x)$ 是一多项式, 则 $Pf\in\mathscr{S}'$;

(2) 若多项式 $P(x)>0$, 则 $\dfrac{f}{P}\in\mathscr{S}'$.

证明 (1) 设 $\varphi\in\mathscr{S}$, 先证 $P\varphi\in\mathscr{S}$. 对于任意 N 重指数 α, β, 利用 Leibniz 公式可知

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(P(x)\varphi(x))| = \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|x^\beta\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma P(x) D^{\alpha-\gamma}\varphi(x)\right| < \infty,$$

所以 $P\varphi\in\mathscr{S}$.

设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}$, 和 $\varphi\in\mathscr{S}$, 且 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 则利用

Leibniz 公式有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^\beta D^\alpha(P(x)\varphi_n(x)-P(x)\varphi(x))|\\=&\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|x^\beta\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma P(x)D^{\alpha-\gamma}(\varphi_n(x)-\varphi(x))\right|\\=&0.\end{aligned}$$

根据定义 8.1.7 可知 $Pf(\varphi)=f(P\varphi),\ \forall\ \varphi\in\mathscr{S}$, 所以 $Pf\in\mathscr{S}'$.

(2) 设 $\varphi\in\mathscr{S}$, 先证 $\dfrac{\varphi(x)}{P(x)}\in\mathscr{S}$. 对于任意 N 重指数 α 和 β, 有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|x^\beta D^\alpha\left(\frac{\varphi(x)}{P(x)}\right)\right|=\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|x^\beta\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\left(\frac{1}{P(x)}\right)D^{\alpha-\gamma}\varphi(x)\right|<\infty,$$

所以 $\dfrac{\varphi}{P}\in\mathscr{S}$.

设 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset\mathscr{S}$, 和 $\varphi\in\mathscr{S}$, 且 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|x^\beta D^\alpha\left(\frac{\varphi_n(x)-\varphi(x)}{P(x)}\right)\right|\\=&\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|x^\beta\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\left(\frac{1}{P(x)}\right)D^{\alpha-\gamma}(\varphi_n(x)-\varphi(x))\right|=0.\end{aligned}$$

根据定义 8.1.7 $\dfrac{1}{P}f(\varphi)=f\left(\dfrac{\varphi}{P}\right)$. 因此 $\dfrac{f}{P}\in\mathscr{S}'$. □

8.2 Fourier 变换

本节先讲 $\mathscr{S}$ 空间中函数和 $\mathscr{S}'$ 空间中函数的 Fourier 变换, 然后再讲 Lebesgue 空间中函数的 Fourier 变换.

8.2.1 $\mathscr{S}$ 空间中函数的 Fourier 变换

定义 8.2.1 设 $\varphi\in\mathscr{S}$, 我们称

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x \tag{8.2.1}$$

为 φ 的 Fourier 变换, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)$ 都属于 $\mathbb{R}^N$ 和 $x\cdot\xi=\displaystyle\sum_{i=1}^N x_i\xi_i$. 有时将式 (8.2.1) 记为 $\widehat{\varphi}=\mathscr{F}(\varphi)$, 可以把 $\mathscr{F}$ 看成算子.

由 $\mathscr{S}$ 空间中函数的定义知式 (8.2.1) 的积分总是存在的. 但是为了这个积分存在, 并不需要 $\varphi \in \mathscr{S}$, 而只要 $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 即可. 所以传统的 Fourier 变换的讲法也正是先讲 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 的变换的原因.

定理 8.2.1 设 $\varphi \in \mathscr{S}$ 和 α 是任一 N 重指数, 则成立

(1) $(-\mathrm{i}x)^\alpha \varphi(x)$ 的 Fourier 变换为 $D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$ 和 $-\mathrm{i}x_j \varphi(x)$ 的 Fourier 变换是 $D_j \widehat{\varphi}(\xi)$;

(2) $D_j \varphi(x)$ 的 Fourier 变换是 $\mathrm{i}\xi_j \widehat{\varphi}(\xi)$;

(3) 算子 $\mathscr{F}$ 把 $\mathscr{S}$ 连续线性地映入 $\mathscr{S}$ 内.

证明 (1) 设 α 是任一 N 重指数, 对式 (8.2.1) 两端求导, 于是

$$D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} (-\mathrm{i}x)^\alpha \varphi(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x. \tag{8.2.2}$$

积分号下求导成为可能, 是因为式 (8.2.2) 右端积分是一致收敛的. 又因为 α 是任意 N 重指数, 所以 $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. 由式 (8.2.2) 知 $(-\mathrm{i}x)^\alpha \varphi(x)$ 的 Fourier 变换为 $D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$. 在式 (8.2.2) 中取 $\alpha = (0, 0, \cdot, \cdot, \cdot, 0, 1, 0, \cdot, \cdot, \cdot, 0)$, 其中 1 为 α 的第 j 个分量, 则立得 $-\mathrm{i}x_j \varphi(x)$ 的 Fourier 变换是 $D_j \widehat{\varphi}(\xi)$.

(2) 利用分部积分法得

$$\begin{aligned}
\widehat{D_j\varphi}(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} D_j \varphi(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)(\mathrm{i}\xi_j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi_j \widehat{\varphi}(\xi).
\end{aligned}$$

(3) 因为 $\varphi \in \mathscr{S}$, 所以对于任意 N 重指数 β 有 $D^\beta[(-x)^\alpha \varphi(x)] \in \mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^N)$. 式 (8.2.2) 的右端进行分部积分 $|\beta|$ 次得

$$(\mathrm{i}\xi)^\beta D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} D^\beta[(-\mathrm{i}x)^\alpha \varphi(x)] \mathrm{d}x. \tag{8.2.3}$$

于是

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{i}\xi)^\beta D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant& \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}}{(1+|x|^2)^{N+1}} (1+|x|^2)^{N+1} D^\beta[(-\mathrm{i}x)^\alpha \varphi(x)] \mathrm{d}x \right| \\
\leqslant& \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| (1+|x|^2)^{N+1} D^\beta[(-\mathrm{i}x)^\alpha \varphi(x)] \right| \\
& \times \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^{N+1}}.
\end{aligned} \tag{8.2.4}$$

由于式 (8.2.4) 右端积分是有界的, 而且式 (8.2.4) 两端中的 α 和 β 是任意的 N 重指数, 所以 $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$.

为了证明算子 $\mathscr{F}$ 的连续性, 只需证明: 如果 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\varphi(x)$, 则 $\{\widehat{\varphi}_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\widehat{\varphi}(\xi)$. 这等价于证明: 如果 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于零, 则 $\{\widehat{\varphi}_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于零. 事实上, 由式 (8.2.4) 知

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\xi^\beta D^\alpha\widehat{\varphi}_n(\xi)|\leqslant K\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}|(1+|x|^2)^{N+1}D^\beta(x^\alpha\varphi_n(x))|, \tag{8.2.5}$$

其中 K 为常数. 由式 (8.2.5) 得到 $\mathscr{F}$ 的连续性证明. □

定理 8.2.2　算子 $\mathscr{F}$ 把 $\mathscr{S}$ 中的有界集合映入 $\mathscr{S}$ 中的有界集合.

证明　设 $A\subset\mathscr{S}$ 为有界集合. 由式 (8.2.4) 得

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\xi^\beta D^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)|\leqslant K_1\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}|(1+|x|^2)^{N+1}D^\beta(x^\alpha\varphi(x))|<\infty,\quad\forall\,\varphi\in A,$$

其中 K_1 为常数. □

在下面的定理证明中需要一个所谓的 Gauss 函数$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$ 的 Fourier 变换, 即 Gauss 函数的 Fourier 变换如下:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \tag{8.2.6}$$

事实上,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\prod_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_j\cdot\xi_j}\mathrm{e}^{-\frac{x_j^2}{2}}\mathrm{d}x_j.$$

所以只需对 $N=1$ 证明上式即可. 由 Cauchy 定理知

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

因此得式 (8.2.6). Gauss 函数是 Fourier 变换后唯一不变的函数.

定理 8.2.3　在 $\mathscr{S}$ 空间中成立 Fourier 逆变换式

$$\varphi(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{8.2.7}$$

证明　设 $\varphi\in\mathscr{S}$. 考察重积分

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\mathrm{d}y,$$

它不是绝对可积的, 所以不能改变积分次序.

任取一函数 $\psi\in\mathscr{S}$, 再来考察重积分

$$\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\mathrm{d}y,$$

它是绝对可积的, 故可以交换积分次序, 从而

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{2\pi})^N\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\mathrm{d}y\\
=&\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y-x)\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\\
=&(\sqrt{2\pi})^N\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\widehat{\psi}(y-x)\mathrm{d}y=(\sqrt{2\pi})^N\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}\tag{8.2.8}
$$

若用 $\psi(\varepsilon\xi)(\varepsilon>0)$ 代替式 (8.2.8) 中的 $\psi(\xi)$, 并利用

$$
\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\varepsilon\xi)&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\varepsilon x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\psi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\frac{\xi}{\varepsilon}}\varepsilon^{-N}\mathrm{d}y=\varepsilon^{-N}\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\varepsilon\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi&=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(\varepsilon y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^{-N}\widehat{\psi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\varphi(x+y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(y)\varphi(x+\varepsilon y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}\tag{8.2.9}
$$

由于 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}$, 所以 $\psi(\varepsilon\xi)$ 和 $\varphi(x+\varepsilon y)$ 都是有界函数, 且界与 ε 无关. 利用定理 2.1.6(Lebesgue 控制收敛定理), 在式 (8.2.9) 中令 $\varepsilon\to0$, 有

$$
\psi(0)\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi=\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(y)\mathrm{d}y.\tag{8.2.10}
$$

现在取 $\psi(x)$ 为 Gauss 函数 $\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$, 由于 $\psi(0)=1$ 和 $\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^N}\psi(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2}}\mathrm{d}y=(\sqrt{2\pi})^N$, 于是式 (8.2.10) 给出式 (8.2.7). □

若 $\varphi\in\mathscr{S}$, 由定理 8.2.3 知 φ 存在 Fourier 逆变换. 如果用 $\mathscr{F}^{-1}$ 表示 Fourier 逆变换, 则

$$
\mathscr{F}^{-1}\varphi(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi.
$$

由定理 8.2.1 (3) 和定理 8.2.3 推出

定理 8.2.4 算子 $\mathscr{F}$ 是把空间 $\mathscr{S}$ 映射到自身的拓扑同构.

定理 8.2.5(Parseval 等式) 若 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}$, 则成立

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(x)\psi(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\widehat{\psi}(x)\mathrm{d}x\tag{8.2.11}
$$

和

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\psi}(x)}\mathrm{d}x,\tag{8.2.12}
$$

其中 $\overline{\psi(x)}$ 表示 $\psi(x)$ 的共轭.

证明 式 (8.2.11) 是式 (8.2.8) 在 $x=0$ 的特殊形式. 令 $h=\overline{\widehat{\psi}}$, 利用定理 8.2.3 有

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{h}(\xi)} =&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\overline{\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\overline{h(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\psi(\xi),\end{aligned}$$

即

$$\overline{\psi(\xi)}=\widehat{h}(\xi). \tag{8.2.13}$$

将式 (8.2.11) 中的 $\psi(x)$ 用 $h(x)$ 代替, 可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(x)h(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\widehat{h}(x)\mathrm{d}x.$$

再把上式中的 $h(x)$ 和 $\widehat{h}(x)$ 分别用 $\overline{\widehat{\psi}(x)}$ 和 $\overline{\psi(x)}$ 代替得式 (8.2.12). □

继续介绍 $\mathscr{S}$ 空间中函数的 Fourier 变换几个重要性质之前, 先略述几个简单性质.

(1) Fourier 变换与平移.

记平移算子为 τ_h: $(\tau_h\varphi)(x)=\varphi(x-h)$, 就有

$$(\widehat{\tau_h\varphi})(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x-h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi). \tag{8.2.14}$$

$$\begin{aligned}\tau_h\widehat{\varphi}(\xi) =&\widehat{\varphi}(\xi-h)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot(\xi-h)}\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\cdot h}\widehat{\varphi}](\xi).\end{aligned} \tag{8.2.15}$$

(2) Fourier 变换与相似变换

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi(c\cdot)}(\xi) =&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(cx)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\\ =&|c|^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\frac{\xi}{c}}\mathrm{d}x=|c|^{-N}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{c}\right),\end{aligned} \tag{8.2.16}$$

其中 $c\neq 0$. 若 $\varphi(x)$ 是 k 阶 (正) 齐性函数, 则有

$$\varphi(cx)=c^k\varphi(x),\quad c>0,$$

上式与式 (8.2.16) 结合, 将有

$$c^k\widehat{\varphi}(\xi)=c^{-N}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{c}\right),$$

即

$$\widehat{\varphi}(c^{-1}\xi)=(c^{-1})^{-(k+N)}\widehat{\varphi}(\xi).$$

因此 $\widehat{\varphi}(\xi)$ 是 $(-N-k)$ 阶 (正) 齐性函数.

(3) Fourier 变换与反射

$$\mathscr{F}(\check{\varphi})(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\mathscr{F}^{-1}(\varphi),\tag{8.2.17}$$

$$\widehat{\check{\varphi}}(\xi)=\widehat{\varphi}(-\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\widehat{\check{\varphi}}(\xi)=\mathscr{F}^{-1}(\varphi),\tag{8.2.18}$$

其中函数 $\varphi(x)$ 的反射 (函数) $\check{\varphi}$ 为 $\check{\varphi}=\varphi(-x)$.

(4) 如果 $\varphi\in\mathscr{S}$, 则

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot x}\mathrm{d}y=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot(-x)}\mathrm{d}y=\varphi(-x).$$

于是

$$\check{\varphi}(x)=\widehat{\widehat{\varphi}}(x).\tag{8.2.19}$$

下面讨论 $\mathscr{S}$ 空间中函数卷积的 Fourier 变换.

定理 8.2.6 设 $f,\ g\in\mathscr{S}$, 则其卷积 $(f*g)(x)\in\mathscr{S}$, 而且

$$\widehat{(f*g)}(\xi)=(\sqrt{2\pi})^N\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\tag{8.2.20}$$

证明 由于 $f,\ g\in\mathscr{S}$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 卷积的积分号下的函数对 x 可以作任意多次导数, 所以 $(f*g)\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. 下证 $(f*g)\in\mathscr{S}$. 事实上, 利用 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}(\xi)&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}f(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot(x-y)}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y\\&=(\sqrt{2\pi})^N\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}\tag{8.2.21}$$

因为 $\widehat{f},\widehat{g}\in\mathscr{S}$, 所以对于任意 N 重指数 $\alpha,\ \beta$, 由 Leibniz 公式推出

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\xi^\beta D^\alpha[\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)]|=\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\left|\xi^\beta\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\widehat{f}(\xi)D^{\alpha-\gamma}\widehat{g}(\xi)\right|<\infty,$$

即 $\widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi)\in\mathscr{S}$, 于是 $(f*g)(x)\in\mathscr{S}$.

利用 $\mathscr{F}^{-1}:\mathscr{S}\mapsto\mathscr{S}$ 为拓扑同构, 将式 (8.2.21) 的运算反序进行知

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}\,\widehat{g})(x)=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{2N}}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi)g(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}g(y)\mathrm{d}y\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}(f*g)(x).
\end{aligned}$$

□

推论 8.2.1　若 $f,\ g\in\mathscr{S}$, 则

$$(\sqrt{2\pi})^N\widehat{(f\cdot g)}(\xi)=(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).$$

证明　令 $\overline{g(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}=h(x)$, 则由 Parseval 等式 (8.2.12) 有

$$\begin{aligned}
\widehat{(f\cdot g)}(\xi)=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(z)\overline{\widehat{h}(z)}\mathrm{d}z\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(z)\widehat{g}(\xi-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).
\end{aligned}$$

□

8.2.2　$\mathscr{S}'$ 空间中函数的 Fourier 变换

现在我们要用对偶性来定义 $\mathscr{S}'$ 中函数的 Fourier 变换. 它的基础是式 (8.2.11). 事实上, 若 $l,\varphi\in\mathscr{S}$, 则由式 (8.2.11) 知

$$\langle l,\widehat{\varphi}\rangle=\langle\widehat{l},\varphi\rangle. \tag{8.2.22}$$

但是 l 也是 $\mathscr{S}'$ 中的函数和 $\widehat{\varphi}$ 也是 $\mathscr{S}$ 中的函数, 因此令 l 不属于 $\mathscr{S}$ 而是一般的 $\mathscr{S}'$ 中的函数, 式 (8.2.22) 左端也是有意义的. 由于算子 $\mathscr{F}$ 把 φ 变为 $\widehat{\varphi}$ 是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 的拓扑同构, 所以当 $l\in\mathscr{S}'$ 时, $\langle l,\widehat{\varphi}\rangle$ 实际上是 $\varphi\in\mathscr{S}$ 的一个线性泛函, 记此线性泛函为 $\widehat{l}$, 于是有下面的定义.

定义 8.2.2 设 $l \in \mathscr{S}'$, 则对于任意的 $\varphi \in \mathscr{S}$, $\langle l, \widehat{\varphi}\rangle$ 定义 $\mathscr{S}$ 上一个线性泛函, 即一缓增广义函数, 记作 $\widehat{l} \in \mathscr{S}'$, 则 $\widehat{l}$ 称为 l 的 Fourier 变换, 因此

$$\langle \widehat{l}, \varphi\rangle = \langle l, \widehat{\varphi}\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S} \tag{8.2.23}$$

或写为

$$\widehat{l}\varphi = l\widehat{\varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

定理 8.2.7 算子 $\mathscr{F}$ 是把空间 $\mathscr{S}'$ 映射到自身的拓扑同构.

证明 设 $\mathscr{S}'$ 中的函数序列 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $l \in \mathscr{S}'$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle l_n, \varphi\rangle = \langle l, \varphi\rangle, \forall\, \varphi \in \mathscr{S}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\langle \widehat{l}_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle l_n, \widehat{\varphi}\rangle = \langle l, \widehat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{l}, \varphi\rangle,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{l}_n = \widehat{l}$ (在 $\mathscr{S}'$ 中). 因此 $\mathscr{F}$ 映 $\mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}'$ 是连续的, $\mathscr{F}$ 显然满足可加性, 所以 $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$ 是线性算子.

下面证明 $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$ 是线性算子. 任给一个 $l \in \mathscr{S}'$, 因为 $\mathscr{F} : \mathscr{S} \mapsto \mathscr{S}$ 是拓扑同构的, 对于 $\varphi \in \mathscr{S}$, $\langle l, \varphi\rangle$ 之值应由 $\widehat{\varphi}$ 决定, 而且是 $\{\widehat{\varphi}|\varphi \in \mathscr{S}\}$ 上的线性泛函: $\langle g, \widehat{\varphi}\rangle$, 但是 $\{\widehat{\varphi}|\varphi \in \mathscr{S}\} = \mathscr{S}$, 所以 $\langle g, \widehat{\varphi}\rangle$ 是 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函, 从而

$$\langle l, \varphi\rangle = \langle g, \widehat{\varphi}\rangle.$$

而由 $\mathscr{S}'$ 中函数的 Fourier 变换定义 $l = \widehat{g}$. 这样就证明了 $\mathscr{F}^{-1}$ 是有意义的, 且

$$\langle l, \varphi\rangle = \langle \mathscr{F}^{-1}l, \widehat{\varphi}\rangle.$$

显然 $\mathscr{F}^{-1}$ 满足可加性, 它的连续性也可由上式得出. □

定义 8.2.3 设 $l \in \mathscr{S}'$, 缓增广义函数 l 的反射定义为

$$\langle \check{l}, \varphi\rangle = \langle l, \check{\varphi}\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

下面讨论 $\mathscr{S}'$ 中函数的 Fourier 变换和反射.

定理 8.2.8 设 $l \in \mathscr{S}'$, 则成立

$$\widehat{\widehat{l}} = \check{l}, \tag{8.2.24}$$

$$\widehat{\check{l}} = \mathscr{F}^{-1}l, \quad \check{\widehat{l}} = \mathscr{F}^{-1}l. \tag{8.2.25}$$

证明 对于任意的 $\varphi \in \mathscr{S}$, 有

$$\langle \widehat{\widehat{l}}, \varphi\rangle = \langle l, \widehat{\widehat{\varphi}}\rangle = \langle l, \check{\varphi}\rangle = \langle \check{l}, \varphi\rangle.$$

因此, 式 (8.2.24) 成立.

对于任意的 $\varphi \in \mathscr{S}$, 由 $\mathscr{S}'$ 中函数的 Fourier 变换与反射的定义知

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\check{l}}, \varphi\rangle =&\langle l, \widecheck{\widehat{\varphi}}\rangle = \langle l, \widehat{\check{\varphi}}\rangle = \langle \widehat{l}, \check{\varphi}\rangle \\ =&\langle \widecheck{\widehat{l}}, \varphi\rangle = \langle l, \mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle \mathscr{F}^{-1} l, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

所以

$$\widehat{\check{l}} = \mathscr{F}^{-1} l, \quad \widecheck{\widehat{l}} = \mathscr{F}^{-1} l. \qquad \square$$

定理 8.2.9 设 $l \in \mathscr{S}'$, 则对于 l 的 Fourier 变换与平移成立

$$(\widehat{\tau_h l})(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot\xi}\widehat{l}(\xi), \tag{8.2.26}$$

$$\tau_h \widehat{l} = [\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot h} l}]. \tag{8.2.27}$$

证明 由 $\mathscr{S}'$ 中函数的 Fourier 变换定义推出

$$\langle \tau_h l, \widehat{\varphi}\rangle = \langle l, \tau_{-h}\widehat{\varphi}\rangle = \langle l, [\widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot h}\varphi}]\rangle = \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot h}\widehat{l}, \varphi\rangle,$$

因此, 式 (8.2.26) 成立.

$$\langle \tau_h \widehat{l}(\xi), \varphi(\xi)\rangle = \langle l(\xi), \widehat{\tau_{-h}\varphi}(\xi)\rangle = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\cdot h} l, \widehat{\varphi}\rangle,$$

所以式 (8.2.27) 成立. $\square$

定理 8.2.10 设 $l \in \mathscr{S}'$, 则成立

$$\widehat{D_{x_j} l} = \mathrm{i}\xi_j \widehat{l}, \quad \widehat{D^\alpha l} = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{l}, \quad D_j \widehat{l} = -\widehat{\mathrm{i}x_j l}, \quad D^\alpha \widehat{l} = [\widehat{(-\mathrm{i}x)^\alpha l}], \tag{8.2.28}$$

其中 α 是 N 重指数.

证明 对于任意的 $\varphi \in \mathscr{S}$, 则有

$$\begin{aligned}\langle -\mathrm{i}\xi_j \widehat{l}, \varphi\rangle =&\langle \widehat{l}, -\mathrm{i}\xi_j\varphi\rangle = \langle l, -\mathrm{i}\widehat{\xi_j\varphi}\rangle = \langle l, D_{x_j}\widehat{\varphi}\rangle \\ =&\langle -D_{x_j} l, \widehat{\varphi}\rangle = \langle -\widehat{D_{x_j} l}, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

故

$$\widehat{D_{x_j} l} = \mathrm{i}\xi_j \widehat{l}.$$

同理

$$\widehat{D^\alpha l} = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{l}.$$

因为

$$\begin{aligned}\langle D_j \widehat{l}, \varphi\rangle =& -\langle \widehat{l}, D_j\varphi\rangle = -\langle l, \widehat{D_j\varphi}\rangle \\ =& -\langle l, \mathrm{i}\xi_j\widehat{\varphi}\rangle = \langle -\mathrm{i}\xi_j l, \widehat{\varphi}\rangle,\end{aligned}$$

所以

$$-\mathrm{i}\widehat{x_j l} = D_j \widehat{l}.$$

同理

$$D^\alpha \widehat{l} = [\widehat{(-\mathrm{i}x)^\alpha l}]. \qquad \square$$

例 8.2.1 Dirac 函数 $\delta(x)$ 定义如下:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}.$$

容易证明, 上式右端定义了一个 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函. 所以 $\delta \in \mathscr{S}'$. 现在计算 $\widehat{\delta}$. 因为

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \right\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S},$$

所以 $\widehat{\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

例 8.2.2 计算 $\widehat{1}$. 因为

$$\begin{aligned}\langle \widehat{1}, \varphi \rangle =& \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot x} \mathrm{d}x \\ =& \sqrt{2\pi}\varphi(0) = \sqrt{2\pi}\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \sqrt{2\pi}\delta, \varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S},\end{aligned}$$

所以 $\widehat{1} = \sqrt{2\pi}\delta$.

关于 Parseval 等式, 应该注意, $\mathscr{S}'$ 空间的 Fourier 变换的定义用的是式 (8.2.23), 而 $\mathscr{S}$ 空间 Fourier 变换的定义用的是式 (8.2.1). 我们现在要证明的是式 (8.2.12) 在 $\mathscr{S}'$ 情形下的类推.

定理 8.2.11 设 $l \in \mathscr{S}'$, $g \in \mathscr{S}$, 则成立 Parseval 等式

$$\int_{\mathbb{R}^N} l(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{l}(x)\overline{\widehat{g}(x)} \mathrm{d}x. \tag{8.2.29}$$

证明 考虑

$$\int_{\mathbb{R}^N} l(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x = \langle l, \bar{g} \rangle, \quad l \in \mathscr{S}', \quad g \in \mathscr{S}.$$

因为

$$\bar{g} = \widehat{\mathscr{F}^{-1}}(\bar{g}) = \left[\widehat{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{g(\xi)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}\xi}\right] = \widehat{h},$$

其中

$$h = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{g(\xi)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}\xi,$$

所以

$$\int_{\mathbb{R}^N} l(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \langle l, \bar{g}\rangle = \langle l, \widehat{h}\rangle = \langle \widehat{l}, h\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{l}(x)h(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2.30}$$

但是又知

$$h(x) = \overline{\widehat{g}(x)}.$$

将上式代入式 (8.2.30), 即得 Parseval 等式 (8.2.29). □

根据前面讨论得知, 两个基本函数空间有以下关系: $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}$, 而与它们相应的广义函数空间的关系却是 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N) \supset \mathscr{S}'$. 所以缓增广义函数的卷积定义可以沿用定义 3.1.8, 并且也可以类似的讨论卷积的存在性.

关于缓增广义函数与速降函数的卷积, 有以下定理.

定理 8.2.12　设 $l \in \mathscr{S}'$, $g \in \mathscr{S}$ 则

$$(\widehat{l * g}) = (\sqrt{2\pi})^N \widehat{g}\widehat{l}, \tag{8.2.31}$$

$$\widehat{l} * \widehat{g} = (\sqrt{2\pi})^N (\widehat{g \cdot l}). \tag{8.2.32}$$

证明　根据定义 8.2.2 可得

$$\langle (\widehat{l * g}), \varphi\rangle = \langle l * g, \widehat{\varphi}\rangle = \langle l(x), \langle g(y), \widehat{\varphi}(x+y)\rangle\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}, \tag{8.2.33}$$

而

$$\begin{aligned}\langle g(y), \widehat{\varphi}(x+y)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{\varphi}(x+y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi - x)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi = (\breve{g} * \widehat{\varphi})(x) \\ &= (\sqrt{2\pi})^N (\widehat{\widehat{g} \cdot \varphi})(x).\end{aligned} \tag{8.2.34}$$

式 (8.2.34) 中最后的等式成立是根据推论 8.2.1 以及 $\breve{g} = \widehat{\widehat{g}}$. 将式 (8.2.34) 代入式 (8.2.33) 可知

$$\langle (\widehat{\widehat{l * g})}, \varphi\rangle = \langle l, (\sqrt{2\pi})^N (\widehat{\widehat{g} \cdot \varphi})\rangle = \langle \widehat{l}, (\sqrt{2\pi})^N \widehat{g} \cdot \varphi\rangle = \langle (\sqrt{2\pi})^N \widehat{l}\widehat{g}, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S},$$

即得式 (8.2.31). 式 (8.2.32) 可由式 (8.2.31) 导出. □

8.2.3 Lebesgue 空间中函数的 Fourier 变换

1. $L^1(\mathbb{R}^N)$ 函数的 Fourier 变换

定理 8.1.9 指出, 当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时, $L^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}'$. 因此, $\mathscr{S}'$ 中函数的 Fourier 变换的一般理论自然适用于 $L^p(\mathbb{R}^N)$. 但是在历史上却是先有 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^N)$

空间中函数的 Fourier 变换. 对于 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 空间中函数的 Fourier 变换有许多具体的而且是很有用的结果. 现在我们想说明这些经典的结果与 $\mathscr{S}'$ 理论是一致的. 为此, 先从 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中的 Fourier 变换开始.

设 $l \in L^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}'$, 则由 $\widehat{l} \in \mathscr{S}'$ 的定义和 Fubini 定理知, 对于 $\varphi \in \mathscr{S}$,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{l}, \varphi\rangle =&\langle l, \widehat{\varphi}\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} l(x)\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\ =&\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} l(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\\ =&\left\langle\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} l(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x, \varphi\right\rangle,\end{aligned}$$

所以有

$$\widehat{l}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} l(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x, \tag{8.2.35}$$

这正是 Fourier 变换的古典定义. 由此可见, $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中的函数作为 $\mathscr{S}'$ 中元素的 Fourier 变换与其古典意义下的 Fourier 变换是一致的.

现在讨论 $l \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 的 $\widehat{l}(\xi)$ 的性质. Fourier 变换 $\mathscr{F}: \mathscr{S} \mapsto \mathscr{S}$ 或 $\mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$ 均为拓扑同构的. 但对 $l \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{l}(\xi)$ 不一定可积, 而有以下性质.

定理 8.2.13 设 $l \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则 $\widehat{l}(\xi)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上连续, 而且当 $|\xi| \to \infty$ 时, $\widehat{l}(\xi) \to 0$.

证明 因为 $l \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 必存在正整数 $N_0 = N_0(\varepsilon)$, 使得

$$\int_{|x|\geqslant N_0}|l(x)|\mathrm{d}x < \frac{(\sqrt{2\pi})^N}{4}\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}|\widehat{l}(\xi+h)-\widehat{l}(\xi)| \leqslant&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{|x|\geqslant N_0}|l(x)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot(\xi+h)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}|\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{|x|\leqslant N_0}|l(x)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot(\xi+h)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}|\mathrm{d}x\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{|x|\leqslant N_0}|l(x)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot(\xi+h)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

但当 $|x| \leqslant N_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot(\xi+h)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}| \leqslant&|\cos[x\cdot(\xi+h)]-\cos(x\cdot\xi)|+|\sin[x\cdot(\xi+h)]-\sin(x\cdot\xi)|\\ \leqslant&2|x\cdot h| \leqslant 2N_0|h|.\end{aligned}$$

因此, 只要 $|h|$ 充分小时, 就得

$$|\widehat{l}(\xi+h)-\widehat{l}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}+2N_0|h|\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}|l(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

所以 $\widehat{l}(\xi)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上连续.

下面证明 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\widehat{l}(\xi)\to 0$. 我们仍有

$$
\begin{aligned}
|\widehat{l}(\xi)| \leqslant & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{|x|\geqslant N_0}|l(x)|\mathrm{d}x+\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\left|\int_{|x|\leqslant N_0} l(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right| \\
< & \frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\left|\int_{|x|\leqslant N_0} l(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

因为 $l\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 由于具有紧支集的阶梯函数全体在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 在 $|x|\leqslant N_0$ 处存在的一个阶梯函数

$$
l_\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^{k}A_j\chi_{E_j}
$$

满足 $\|l-l_\varepsilon\|_1<\dfrac{(\sqrt{2\pi})^N\varepsilon}{4}$, 其中 $A_j\ (j=1,2,\cdots,k)$ 为常数, χ_{E_j} 是 E_j 的特征函数, E_j 是 $|x|\leqslant N_0$ 中的小长方体 $\alpha_j^{(i)}\leqslant x_j\leqslant\beta_j^{(i)}(j=1,2,\cdots,N_0;i=1,2,\cdots,k)$, $E_i\bigcap E_j=\varnothing(i\neq j)$ 且 $\{x||x|\leqslant N_0\}=\bigcup\limits_{j=1}^{k}E_j$, 于是

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{|x|\leqslant N_0} l(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right| \leqslant & \left|\int_{|x|\leqslant N_0}|(l(x)-l_\varepsilon(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}|\mathrm{d}x+\int_{|x|\leqslant N_0} l_\varepsilon(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant & \frac{(\sqrt{2\pi})^N\varepsilon}{4}+\sum_{j=1}^{k}\left|A_j\int_{E_j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

但当 ξ 充分大时, 容易证明最后一个积分小于 $\dfrac{(\sqrt{2\pi})^N}{2}\varepsilon$. 因此当 ξ 充分大时, $|\widehat{l}(\xi)|<\varepsilon$. □

定理 8.2.13 的后一部分称为 Riemann-Lebesgue 引理.

定义 8.2.4　设 $f\in C(\mathbb{R}^N)$, 且满足条件

$$
\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0,
$$

这种函数的全体构成集合 $B(\mathbb{R}^N)$.

也可以说 $B(\mathbb{R}^N)$ 是在无穷远处的值等于零的有界连续函数全体. 由定理 8.2.13 知 $\mathscr{F}:L^1(\mathbb{R}^N)\mapsto B(\mathbb{R}^N)$. 但是这个映射并非满射. 尽管 $B(\mathbb{R}^N)\subset\mathscr{S}'$ 且有 Fourier 逆变换, 但其 Fourier 逆变换不一定是 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 函数, 所以在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中的 Fourier 变换反演定理可以表示为以下定理.

定理 8.2.14 设 $l, \widehat{l} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则有反演公式

$$l(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{l}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

证明 $\mathscr{S}'$ 的 Fourier 变换的反演可以用以下公式来表示, 在

$$\langle \widehat{l}, \varphi \rangle = \langle l, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}$$

中记 $\widehat{l} = g$, $\widehat{\varphi} = \psi$, 则 $l = \mathscr{F}^{-1} g$, $\varphi = \mathscr{F}^{-1}\psi$, 从而

$$\langle \mathscr{F}^{-1} g, \psi \rangle = \langle g, \mathscr{F}^{-1}\psi \rangle.$$

因为 $\mathscr{F} : \mathscr{S} \mapsto \mathscr{S}$ 和 $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$ 都是拓扑同构的, 所以上式对一切 $\psi \in \mathscr{S}, g \in \mathscr{S}'$ 成立. 由于对 $\psi \in \mathscr{S}$, 有

$$\mathscr{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi,$$

因此, 对于 $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 利用 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}^{-1} g, \psi \rangle =& \langle g, \mathscr{F}^{-1}\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi dx \\ =& \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) d\xi \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) e^{ix\cdot\xi} dx \\ =& \left\langle \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) e^{ix\cdot\xi} dx, \psi(\xi) \right\rangle.\end{aligned}$$

从而由上式得到

$$(\mathscr{F}^{-1} g)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) e^{ix\cdot\xi} d\xi,$$

亦即

$$l(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{l}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi. \qquad \square$$

$L^1(\mathbb{R}^N)$ 中函数的 Fourier 变换既然与 $\mathscr{S}'$ 中函数的 Fourier 变换是一致的, 则 8.2.2 小节中关于 $\mathscr{S}'$ 中的函数 Fourier 变换运算和性质的讨论在这里自然成立. 但是正如定理 8.2.14 所表明的, 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中讨论 Fourier 变换时多了一个 L^1 可积性的问题, 所以在这个框架内讨论其性质和运算时也就不能不带上一些特点. 利用分部积分法, 可以证明下面的定理.

定理 8.2.15 (1) 如果 $l(x)$ 和 $x^\alpha l(x)$(α 是 N 重指数且 $|\alpha| \leqslant m$) 均属于 $L^1(\mathbb{R}^N)$, 则 $D^\alpha \widehat{l}(\xi)$ 存在, 而且 $(-ix)^\alpha l(x)$ 的 Fourier 变换是 $D^\alpha \widehat{l}(\xi)$;

(2) 如果 $l(x)$ 和 $D^\alpha l(x)(|\alpha| \leqslant m)$ 均属于 $L^1(\mathbb{R}^N)$, 则 $D^\alpha l(x)$ 的 Fourier 变换是 $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{l}(\xi)$.

定理 8.2.16　设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则

(1) $\widehat{f * g}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^N \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$.

(2) 如果再设 $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则

$$\widehat{f} * \widehat{g}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^N \widehat{f \cdot g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

证明　(1) 由定理 2.1.15 (卷积 Young 不等式) 知, $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 均可作卷积, 而且 $h = f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. 利用 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot \xi} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot \xi} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y \cdot \xi} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^N} g(x-y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y) \cdot \xi} \mathrm{d}x \\
&= (\sqrt{2\pi})^N \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned} \tag{8.2.36}$$

(2) 在式 (8.2.36) 中用 i 代替 $-\mathrm{i}$ 对 $\mathscr{F}^{-1}$ 也是正确的. 因为 $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 应用 (1) 和定理 8.2.14 导出

$$\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi) = (\sqrt{2\pi})^N \mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)) = (\sqrt{2\pi})^N f(x) g(x), \quad \text{a.e..} \tag{8.2.37}$$

因为 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \bigcap C_B(\mathbb{R}^N)$, 所以 $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$. 对式 (8.2.37) 两端取 Fourier 变换, 有

$$\widehat{f} * \widehat{g}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^N \widehat{f \cdot g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

□

定理 8.2.17(乘法公式)　设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则 $f\widehat{g}, \widehat{f}g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 和

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)\widehat{g}(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f(x)} g(x) \mathrm{d}x. \tag{8.2.38}$$

证明　对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}^N$, 有

$$|\widehat{g}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)| \mathrm{d}x = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \|g\|_1,$$

所以 $\widehat{g}(\xi)$ 是有界的. 因此 $f\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. 类似可证 $\widehat{f}g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. 等式 (8.2.38) 利

用 Fubini 定理可以直接推出. 事实上, 因为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(\xi)g(x) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)\widehat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\widehat{f}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

2. $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中函数的 Fourier 变换

我们知道, $L^2(\mathbb{R}^N)$ 不仅含于 $\mathscr{S}'$ 内, 而且它又是一个 Hilbert 空间. 下面我们将在 Hilbert 空间的框架内讨论 Fourier 变换. 因为对于一个函数 $f(x)$, $\widehat{f}(\xi)$ 一般取复值, 所以将应用复 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}^N)$, 其中内积按以前的规定用 $(\cdot,\cdot)$ 表示. 例如,

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x. \tag{8.2.39}$$

因为 $\mathbb{R}^N$ 上的 L^2 函数与有界区域 Ω 上的 L^2 函数不同, 属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 的函数一般不属于 $L^1(\mathbb{R}^N)$, 所以不能用式 (8.2.35) 来定义 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\xi)$.

定理 8.2.18 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 则作为 $\mathscr{S}'$ 中的函数, 其 Fourier 变换 $\widehat{f}(\xi)$ 仍属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$, 而且

$$\widehat{f}(\xi) = \underset{N_0\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{|x|\leqslant N_0} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x, \tag{8.2.40}$$

其中 N_0 是正整数和 "l.i.m." 表示平均收敛的意思.

$\mathscr{F}: L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto L^2(\mathbb{R}^N)$ 是一个酉算子, 即一对一的等距变换

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

证明 由定理 8.1.9 知 $L^2(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}'$, 因此对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 可以定义 $\widehat{f} \in \mathscr{S}'$. 在 $\mathscr{S}$ 空间的 Parseval 等式 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}\mathrm{d}x$ 中, 令 $g = f \in \mathscr{S}$, 将有

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{8.2.41}$$

现在可以利用式 (8.2.41) 证明对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 必有 $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. 事实上, 因为 $\mathscr{S}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 所以对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 必存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f; L^2(\mathbb{R}^N)\| = 0.$$

由式 (8.2.41) 知, 函数序列 $\{\widehat{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 必在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 但对任一 $\varphi \in \mathscr{S}$, 成立

$$\langle f_n, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{f}_n, \varphi \rangle.$$

上式当 $n \to \infty$ 时, 取极限有 $\langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle g, \varphi \rangle$. 因此 $\widehat{f} = g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 而且式 (8.2.41) 对 $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 成立.

这样我们证明了 $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto L^2(\mathbb{R}^N)$ 是一个等距 (保持范数不变, 从而也保持内积不变) 变换. 这个变换是一对一的. 事实上, 可以用 $\mathscr{S}$ 中的关系

$$\langle \mathscr{F}^{-1} g, \psi \rangle = \langle g, \mathscr{F}^{-1} \psi \rangle,$$

仿照上面的方法将 $\mathscr{F}^{-1}$ 拓展为 $\mathscr{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto L^2(\mathbb{R}^N)$. 因此 $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$ 限制到 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上成为一酉算子, 即一对一的等距算子, 从而得知 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 函数的 Fourier 变换仍是 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 函数. 但是我们希望这个 Fourier 变换有更具体的表示式. 为此, 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 作 $|x| \leqslant N_0$ 的特征函数

$$\chi_{N_0}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant N_0, \\ 0, & |x| > N_0, \end{cases}$$

则 $\chi_{N_0} f = f_{N_0} \in L^1 \bigcap L^2$, 而且 $\|f_{N_0} - f; L^2(\mathbb{R}^N)\| \to 0$ $(N_0 \to \infty)$. 所以由上述 Fourier 变换的等距性, 当 $N_0 \to \infty$ 时有

$$\|\widehat{f}_{N_0} - \widehat{f}; L^2(\mathbb{R}^N)\| \to 0.$$

但是又因为 $f_{N_0} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 所以

$$\widehat{f}_{N_0}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{|x| \leqslant N_0} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot \xi} \mathrm{d}x.$$

$\widehat{f}(\xi)$ 既然是 $\widehat{f}_{N_0}(\xi)$ 的 L^2 极限, 自然有

$$\widehat{f}(\xi) = \underset{N_0 \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{|x| \leqslant N_0} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot \xi} \mathrm{d}x.$$

这个极限有时也写成 $\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot \xi} \mathrm{d}x.$ □

因为在 Hilbert 空间中有

$$(f, g) = \frac{1}{8}[\|f+g; L^2(\mathbb{R}^N)\|^2 - \mathrm{i}\|f+\mathrm{i}g; L^2(\mathbb{R}^N)\|^2 - \|f-g; L^2(\mathbb{R}^N)\|^2 + \mathrm{i}\|f-\mathrm{i}g; L^2(\mathbb{R}^N)\|^2],$$

所以在 Hilbert 空间中保持范数不变, 当然也包持内积不变. 因此有

定理 8.2.19 (Plancherel 定理) 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 则

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}),$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{8.2.42}$$

定理 8.2.20 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 则

$$(\widehat{f * g})(x) = (\sqrt{2\pi})^N \widehat{f}(x)\widehat{g}(x).$$

证明 易知 $\widehat{f}\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. 令 $\varphi(y) = \overline{g(x-y)}$, 则对 $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\xi) =& \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{g(x-y)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\mathrm{d}y \\ =& \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{g(z)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-z)\cdot\xi}\mathrm{d}z \\ =& \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\overline{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\xi}\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\overline{\widehat{g}(\xi)}.\end{aligned}$$

注意到 $\mathscr{F}: L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto L^2(\mathbb{R}^N)$ 是一个酉算子, 可知

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\overline{\varphi(y)}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi = (\sqrt{2\pi})^N \mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}\widehat{g})(x).\end{aligned}$$

□

定理 8.2.21 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 则

$$(\sqrt{2\pi})^N (\widehat{f \cdot g})(\xi) = (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi). \tag{8.2.43}$$

证明 令 ξ 固定. 若记

$$h(x) = \overline{g(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi},$$

有

$$\begin{aligned}\widehat{h}(z) &= \underset{N_0\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{|x|\leqslant N_0} (\overline{g(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\mathrm{d}x \\ &= \overline{\underset{N_0\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{|x|\leqslant N_0} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot(\xi-z)}\mathrm{d}x} \\ &= \overline{\widehat{g}(\xi - z)}.\end{aligned}$$

因为 $(f\cdot g)\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 根据定理 8.2.19 的式 (8.2.42), 便得

$$\begin{aligned}(\widehat{f\cdot g})(\xi)=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f\ \bar{h}\mathrm{d}x=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}\ \overline{\widehat{h}}\mathrm{d}z\\=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(z)\widehat{g}(\xi-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).\end{aligned}$$

□

定理 8.2.22　对于一切 $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$, 令 $\mathscr{F}^{-1}f=\mathscr{F}f(-x)$, 则 $\mathscr{F}^{-1}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 Fourier 逆变换.

证明　定理仅需证明

$$\mathscr{F}^{-1}\widehat{f}=f.\tag{8.2.44}$$

对任意的 $g\in L^2(\mathbb{R}^N)$, 考虑

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}^{-1}\widehat{f},g)&=\int_{\mathbb{R}^N}\mathscr{F}^{-1}\widehat{f}(x)\cdot\overline{g(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\widehat{f}(-x)\mathrm{d}x\overline{g}(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^N}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}\widehat{f}(x)\mathrm{d}x\overline{g}(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^N}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}\overline{g}(y)\mathrm{d}y\widehat{f}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\widehat{g}}(x)\widehat{f}(x)\mathrm{d}x=(\widehat{f},\widehat{g})=(f,g),\end{aligned}$$

于是式 (8.2.44) 成立. □

定理 8.2.23 (Hausdorff-Young 不等式[28])　若 $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, 则 $\widehat{f}\in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, 而且

$$\|\widehat{f};L^{p'}(\mathbb{R}^N)\|\leqslant(2\pi)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{2}{p'})}\|f;L^p(\mathbb{R}^N)\|.\tag{8.2.45}$$

证明　应用 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中函数的 Fourier 变换公式:

$$\widehat{f}(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x.$$

当 $p=1$ 时, $p'=\infty$, 则 $\|\widehat{f};\ L^\infty(\mathbb{R}^N)\|\leqslant(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\|f;\ L^1(\mathbb{R}^N)\|$, 式 (8.2.45) 成立.
当 $p=2$ 时, $p'=2$, 则 $\|\widehat{f};\ L^2(\mathbb{R}^N)\|=\|f;\ L^2(\mathbb{R}^N)\|$, 则式 (8.2.45) 成立.
现在令 $p_1=1,\ q_1=\infty; p_2=2,\ q_2=2$ 来应用定理 2.1.17 (Riesz-Thorin 定理),

则因 $\dfrac{1}{p_\theta}=\theta+\dfrac{1-\theta}{2}$, $\dfrac{1}{q_\theta}=\dfrac{1-\theta}{2}$ 自然有 $\dfrac{1}{p_\theta}+\dfrac{1}{q_\theta}=1$. 记 p_θ 为 p, 则 $q_\theta=p'$, 于是式 (8.2.45) 成立. □

注 8.2.1 定理 8.2.23 的结论式 (8.2.45) 中 $\|f;\ L^p(\mathbb{R}^N)\|$ 的系数, 随着应用 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中函数的 Fourier 变换公式的不同而不同. 例如, 我们在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中函数的 Fourier 变换公式取 $\widehat{f}(\xi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x$ 可得定理 8.2.23 的结论 $\|\widehat{f};L^{p'}(\mathbb{R}^N)\|\leqslant\|f;L^p(\mathbb{R}^N)\|$. 事实上, 因为对于 $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\|\widehat{f};\ L^\infty(\mathbb{R}^N)\|\leqslant\|f;\ L^1(\mathbb{R}^N)\|$ 和 $\|\widehat{f};\ L^2(\mathbb{R}^N)\|=\|f;\ L^2(\mathbb{R}^N)\|$, 利用定理 2.1.17 立得结论.

8.3 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$

在本节, 我们讨论分数阶空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, 其中 s 为任意实数, 且只限于 $p=2$ 的情形. 并简记 $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)=H^s(\mathbb{R}^N)$.

定义 8.3.1 设 $s=m$ 是非负整数, 定义空间

$$\widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)=\{\widehat{f}|f\in H^m(\mathbb{R}^N)\}.$$

由定理 8.2.18 知, $\mathscr{F}:L^2(\mathbb{R}^N)\mapsto L^2(\mathbb{R}^N)$ 是等距同构的, 所以 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 和 $\widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$ 中的元素是一一对应的.

现在说明上面定义的空间 $\widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$ 是合理的. 事实上, 设 α 是 N 重指数, 当 $f\in H^m(\mathbb{R}^N)$ 时, 弱导数 $D^\alpha f\in L^2(\mathbb{R}^N)(0\leqslant|\alpha|\leqslant m)$. 把 $f(x)$ 看成缓增广义函数时, 缓增广义函数 $f(x)$ 的导数 $D^\alpha f(x)$ 和弱导数 $D^\alpha f(x)$ 一致, 都属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$. 利用定理 8.2.18 和 Fourier 变换的性质得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}|D^\alpha f|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{D^\alpha f}|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^N}|\xi^\alpha\widehat{f}|^2\mathrm{d}\xi. \tag{8.3.1}$$

故

$$\|f;H^m(\mathbb{R}^N)\|^2=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbb{R}^N}|\xi^\alpha\widehat{f}|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2\right)|\widehat{f}|^2\mathrm{d}\xi. \tag{8.3.2}$$

容易证实成立不等式

$$K_1(1+|\xi|^2)^m\leqslant\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2\leqslant K_2(1+|\xi|^2)^m,\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^N, \tag{8.3.3}$$

其中 K_1, K_2 是正常数. 将式 (8.3.3) 代入式 (8.3.2) 知

$$K_1 \int_{\mathbb{R}^N} |(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant \|f; H^m(\mathbb{R}^N)\|^2 \leqslant K_2 \int_{\mathbb{R}^N} |(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi. \tag{8.3.4}$$

$\widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$ 中的元素 $f(\xi)$ 的范数由下式确定:

$$\|f; \widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)\| = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由式 (8.3.4) 知, 用上式定义 $\widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$ 中元素的范数是合理的, 即满足范数公理, 于是 $\widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$ 是赋范空间.

设 $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, 如果用

$$\|f\|_{(m)} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}$$

作为 $f(x)$ 的范数, 由式 (8.3.4) 知 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 中的两种范数 $\|f; H^m(\mathbb{R}^N)\|$ 与 $\|f\|_{(m)}$ 等价, 且 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 与 $\widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$ 等距同构.

等价的两种范数从数值上来讲是不同的, 但是当讨论与收敛性有关的问题时, 无论采用哪种范数, 得到的结果是相同的. 用 $\|f\|_{(m)}$ 作为空间 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 中元素 $f(x)$ 的范数有一个优点, 就是可以用它来导出空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$, 其中 s 不必限制为非负整数.

定义 8.3.2 $\forall s \in \mathbb{R}$, 规定

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) | (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中元素 $f(x)$ 的范数由下式确定

$$\|f\|_{(s)} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}; L^2(\mathbb{R}^N)\|.$$

定义 8.3.2 中的 s 可以取为负数. 当 s 为非负整数 m 时, 这个定义与以前的定义一致.

下面讨论 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 空间的一些性质.

定义 8.3.3 设 $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $g \in H^s(\mathbb{R}^N)$, 定义

$$(f, g)_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \mathrm{d}\xi \tag{8.3.5}$$

为空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 的内积.

定理 8.3.1 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 是一个 Hilbert 空间.

证明 只需证明空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 关于范数 $\|f\|_{(s)}$ 是完备的, 其中 $\|f\|_{(s)} = [(f,f)_{H^s(\mathbb{R}^N)}]^{\frac{1}{2}}$. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中的任一基本序列, 即

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_{(s)} = 0,$$

也就是说

$$\lim_{m,n\to\infty} \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}_m(\xi) - (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}_n(\xi); L^2(\mathbb{R}^N)\| = 0,$$

所以序列 $\{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的基本序列. 由 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 的完备性, 定理 8.2.18 和定理 8.2.7 可知, 存在 $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 使得 $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}_n(\xi)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $\widehat{v}(\xi)$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{v}(\xi); L^2(\mathbb{R}^N)\| = 0. \tag{8.3.6}$$

而

$$\widehat{v}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{v}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi),$$

其中 $\widehat{f}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{v}(\xi)$. 由定理 8.1.11 知 $\widehat{f} \in \mathscr{S}'$, 且 $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 所以 $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. 由式 (8.3.6) 推出当 $n\to\infty$ 时,

$$\|f_n - f\|_{(s)} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\widehat{f}_n - \widehat{f}); L^2(\mathbb{R}^N)\| = 0,$$

即空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 是完备的, 从而它是一个 Hilbert 空间. □

定理 8.3.2 如果 $s \geqslant t$, 则

$$\mathscr{S} \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathscr{S}',$$

且 $\mathscr{S}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中稠密.

证明 I. 证明 $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^N)$. 设 $s \geqslant t$, $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, 则成立

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi,$$

即

$$H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^N). \tag{8.3.7}$$

II. 证明 $\mathscr{S} \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$. 这种嵌入有两方面的含义: ① $\mathscr{S} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$, 这一点是显然的; ② 由 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $f(x)$ 推出 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中也收敛于 $f(x)$, 这一点相当于嵌入算子的连续性. 分两种情形证明这一结论.

(1) s 是一正整数 m 的情形. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $f(x)$, 则

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_{(s)}^2 &= \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbb{R}^N}|D^\alpha(f_n(x)-f(x))|^2\mathrm{d}x\\&=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|x|^2)^{2(N+1)}}(1+|x|^2)^{2(N+1)}|D^\alpha(f_n(x)-f(x))|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant K_1\sup_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|(1+|x|^2)^{N+1}D^\alpha(f_n(x)-f(x))|^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^{2(N+1)}}\\&\to 0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

即 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $f(x)$.

(2) s 为任一实数的情形. 找一个正整数 m, 使得 $m>s$, 从 (1) 导出

$$\mathscr{S}\hookrightarrow H^m(\mathbb{R}^N).\tag{8.3.8}$$

已知

$$H^m(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N).\tag{8.3.9}$$

综合式 (8.3.8) 和式 (8.3.9) 推出 $\mathscr{S}\hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$.

III. 证明 $H^s(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow\mathscr{S}'$. 空间 $H^s(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow\mathscr{S}'$ 的含义类似于 II 的说明: ① $H^s(\mathbb{R}^N)\subset\mathscr{S}'$, 这一点可由 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 的定义得知; ② 由 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $f(x)$ 推出 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}'$ 中强收敛于 $f(x)$. 事实上, 设 A 是 $\mathscr{S}$ 中的任一有界集, φ 是 A 中的任一元素, 记 $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$, 于是 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于零. 而利用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}|\langle g_n,\varphi\rangle| &= |\langle\check{\widehat{g}}_n,\varphi\rangle|=|\langle\widehat{g}_n,\check{\varphi}\rangle|=\left|\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{g}_n\check{\varphi}\,\mathrm{d}\xi\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{g}_n(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\check{\varphi}\,\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{g}_n\|_{(s)}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}}}\check{\varphi}|^2\mathrm{d}\xi\right]^{\frac12}\\&\leqslant\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{g}_n\|_{(s)}\sup_{\varphi\in A}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\left|(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}-\frac{s}{2}}\check{\varphi}\right|\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{N+1}}\mathrm{d}\xi\right]^{\frac12}.\end{aligned}$$

上式第二个因子是常数, 第三个因子有界, 而第一个因子在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于零. 也就推出 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}'$ 中强收敛于 $f(x)$.

IV. 证明 $\mathscr{S}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中稠密. 已知 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 且 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\subset\mathscr{S}$, 所以 $\mathscr{S}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中稠密. 如果 $f\in H^s(\mathbb{R}^N)$, 即 $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^N)$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\varphi\in\mathscr{S}$, 使得

$$\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)-\widehat{\varphi}(\xi);L^2(\mathbb{R}^N)\|<\varepsilon.\tag{8.3.10}$$

作函数 $\phi(x)$, 使得

$$\widehat{\phi}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}(\xi). \tag{8.3.11}$$

显然 $\phi\in\mathscr{S}$. 因为

$$\widehat{\varphi}=(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\phi}(\xi), \tag{8.3.12}$$

将式 (8.3.12) 代入式 (8.3.10) 有

$$\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)-(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\phi}(\xi);L^2(\mathbb{R}^N)\|<\varepsilon, \tag{8.3.13}$$

即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\phi\in\mathscr{S}$, 满足

$$\|f-\phi\|_{(s)}=\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\widehat{f}-\widehat{\phi});L^2(\mathbb{R}^N)\|<\varepsilon,$$

所以 $\mathscr{S}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中稠密. □

定理 8.3.3 如果 $s>\dfrac{N}{2}$, 则 $H^s(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow C_B(\mathbb{R}^N)$.

证明 因为 $s>\dfrac{N}{2}$, 所以 $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\in L^2(\mathbb{R}^N)$. 于是当 $f\in H^s(\mathbb{R}^N)$ 时,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\xi)|\mathrm{d}\xi&=\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^s}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\&<\infty.\end{aligned}$$

因此 $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 且

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi.$$

类似于定理 8.2.13 成立 $f\in C_B(\mathbb{R}^N)$. 由上式推得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|f(x)|&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\Big|\\&\leqslant K\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f};L^2(\mathbb{R}^N)\|\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}};L^2(\mathbb{R}^N)\|\\&\leqslant K\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}};L^2(\mathbb{R}^N)\|\|f\|_{(s)}\\&=K_1\|f\|_{(s)}.\end{aligned}$$

□

定理 8.3.4 设 $s>\dfrac{N}{2}+j$, j 为非负整数, 则成立

$$H^s(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow C_B^j(\mathbb{R}^N).$$

证明 设 $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, α 是 N 重指数, 则成立

$$D^\alpha f \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^N), \qquad \forall |\alpha| \leqslant j.$$

因为 $s-|\alpha| \geqslant s-j > \frac{N}{2}$, 所以根据定理 8.3.2 和定理 8.3.3 得到

$$H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{s-j}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_B(\mathbb{R}^N), \qquad \forall |\alpha| \leqslant j.$$

所以

$$D^\alpha f \in C_B(\mathbb{R}^N), \ \ \forall |\alpha| \leqslant j.$$

也就是说 $f \in C_B^j(\mathbb{R}^N)$. 由定理 8.3.3 和利用不等式 $|\xi^\alpha| \leqslant (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$ 导出

$$\begin{aligned}
\|f; C_B^j(\mathbb{R}^N)\| &= \sup_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|D^\alpha f(x)| \leqslant K \sup_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j}\|D^\alpha f\|_{(s-|\alpha|)} \\
&= K\sup_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-|\alpha|}{2}}\widehat{D^\alpha f}; L^2(\mathbb{R}^N)\| \\
&= K\sup_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-|\alpha|}{2}}\xi^\alpha \widehat{f}; L^2(\mathbb{R}^N)\| \\
&\leqslant K\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}; L^2(\mathbb{R}^N)\| = K\|f\|_{(s)},
\end{aligned}$$

即 $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_B^j(\mathbb{R}^N)$. □

定理 8.3.5 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 空间的对偶空间为 $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, 即

$$(H^s(\mathbb{R}^N)' = H^{-s}(\mathbb{R}^N).$$

证明 首先证 $(H^s(\mathbb{R}^N))' \subset H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, 即证对于任意的 $f \in (H^s(\mathbb{R}^N))'$ 导出 $f \in \mathscr{S}'$ 和 $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. 如果对于任意的 $f \in (H^s(\mathbb{R}^N))'$ 和对于任意的 $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$, 则 $f(\varphi) = \langle f, \varphi\rangle$ 是有意义的, 且成立

$$|f(\varphi)| \leqslant K\|\varphi\|_{(s)}. \tag{8.3.14}$$

还可以从 $f \in (H^s(\mathbb{R}^N))'$ 导出 $f \in \mathscr{S}'$. 事实上, 因为 $\mathscr{S} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$, 所以对于任意的 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{S}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于零, 推出 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中也收敛于零. 由式 (8.3.14) 知, 当 $n\to\infty$ 时, $f(\varphi_n)\to 0$. 因此 $f(\varphi)$ 作为 $\mathscr{S}$ 上的泛函满足连续性, 于是 $f \in \mathscr{S}'$, 且

$$|f(\varphi)| \leqslant K_1\|\varphi\|_{(s)}, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

由此得到

$$|\widehat{f}(\widehat{\varphi})| = |f(\widehat{\varphi})| \leqslant K_1\|\widehat{\varphi}\|_{(s)}. \tag{8.3.15}$$

当 $\varphi\in\mathscr{S}$ 时, 由于 $\widehat{\widehat{\varphi}}=\varphi(-x)$, 因而

$$\|\widehat{\widehat{\varphi}}\|_{(s)}=\|\varphi\|_{(s)}. \tag{8.3.16}$$

将式 (8.3.16) 代入式 (8.3.15) 导出

$$|\widehat{f}(\widehat{\varphi})|\leqslant K_1\|\varphi\|_{(s)},\qquad \forall\varphi\in\mathscr{S}. \tag{8.3.17}$$

由下式确定的函数 $\psi(x)\in\mathscr{S}$:

$$\widehat{\psi}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}(\xi),$$

则

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{(s)}&=\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\varphi};L^2(\mathbb{R}^N)\|=\|\widehat{\psi};L^2(\mathbb{R}^N)\|\\&=\|\psi;L^2(\mathbb{R}^N)\|.\end{aligned} \tag{8.3.18}$$

把式 (8.3.18) 代入式 (8.3.17) 有

$$|\widehat{f}(\widehat{\varphi})|\leqslant K_1\|\psi;L^2(\mathbb{R}^N)\|. \tag{8.3.19}$$

此外,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\widehat{\varphi})=&\widehat{f}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{\psi})=\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi\\=&((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f})(\widehat{\psi}).\end{aligned} \tag{8.3.20}$$

将式 (8.3.20) 代入式 (8.3.19) 得到

$$|((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f})(\widehat{\psi})|\leqslant K_1\|\psi;L^2(\mathbb{R}^N)\|,\quad\forall\psi\in\mathscr{S}. \tag{8.3.21}$$

因为 $\mathscr{S}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 所以 $\forall\widehat{\psi}\in L^2(\mathbb{R}^N)$, 存在 $\{\widehat{\varphi}_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}$, 使得当 $n\to\infty$ 时, 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中 $\widehat{\varphi}_n(\xi)\to\widehat{\psi}(\xi)$. 因此式 (8.3.21) 对 $\widehat{\varphi}_n(\xi)$ 成立. 由此可知 $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f}$ 满足连续性, 于是 $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上的线性泛函, 从而 $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^N)$, 即 $f\in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, 也就是

$$(H^s(\mathbb{R}^N))'\subset H^{-s}(\mathbb{R}^N). \tag{8.3.22}$$

其次证明 $H^{-s}(\mathbb{R}^N)\subset(H^s(\mathbb{R}^N))'$.

如果 $f\in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, 则 $f\in\mathscr{S}'$. 所以对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}$, 成立

$$\begin{aligned}f(\varphi)&=f(\widehat{\widehat{\widehat{\varphi}}}(-x))=\widehat{f}(\widehat{\widehat{\varphi}}(-\xi))\\&=\widehat{f}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\widehat{\varphi}}(-\xi))\\&=\int_{\mathbb{R}^N}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi))((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\widehat{\varphi}}(-\xi))\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式, 得到

$$|f(\varphi)| \leqslant \|f\|_{(-s)}\|\check{\varphi}\|_{(s)} = \|f\|_{(-s)}\|\varphi\|_{(s)}.$$

因为 $\mathscr{S}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 由上式得到 f 是 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 的线性泛函, 即 $f \in (H^s(\mathbb{R}^N))'$, 因此成立

$$H^{-s}(\mathbb{R}^N) \subset (H^s(\mathbb{R}^N))'. \tag{8.3.23}$$

由式 (8.3.22) 与式 (8.3.23) 知 $H^{-s}(\mathbb{R}^N) = (H^s(\mathbb{R}^N))'$. □

定理 8.3.6 设 $s = m + \dfrac{N}{2} + \lambda$, $\lambda \in (0,1)$, $m \in \mathbb{Z}_+$($\mathbb{Z}_+$ 为非负整数集), 则

$$H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\mathbb{R}^N),$$

且对于任意的 $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ 有

$$|D^\alpha f(x)| \to 0 \quad (|x| \to \infty), \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \quad |\alpha| \leqslant m.$$

证明 因为 $s > m + \dfrac{N}{2}$, 所以 $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_B^m(\mathbb{R}^N)$. 当 $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ 时, 由定理 8.3.3 的证明知 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 和

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{8.3.24}$$

我们知道在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 意义下的 Fourier 逆变换与 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 意义下的 Fourier 逆变换是一致的. 式 (8.3.24) 对 x 求导数, 有

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi.$$

当 $|\alpha| \leqslant m$ 时, 若 $|\xi| > 1$, 则有

$$|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\xi^\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}| \leqslant |\xi|^{-s+m} = |\xi|^{-\frac{N}{2}-\lambda}.$$

作变换 $|\xi| = r$, 于是

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|>1}(|\xi|^{-\frac{N}{2}-\lambda})^2\mathrm{d}\xi &= \int_{|\xi|>1}|\xi|^{-N-2\lambda}\mathrm{d}\xi \\ &= \omega_N\int_1^\infty r^{-N-2\lambda}r^{N-1}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\omega_N}{2\lambda}, \end{aligned}$$

其中 ω_N 为 N 维单位球面的面积. 显然 $\int_{|\xi|\leqslant 1}[(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\xi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}]^2\mathrm{d}\xi$ 是有限的, 故 $\xi^\alpha(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\in L^2(\mathbb{R}^N)$. 又 $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^N)$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\xi)\xi^\alpha|\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^N}|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\xi^\alpha|\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant \Big[\int_{\mathbb{R}^N}|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\int_{\mathbb{R}^N}|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\xi^\alpha|^2\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

所以当 $|\alpha|\leqslant m$ 时, $|\widehat{f}(\xi)\xi^\alpha|\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 于是 $D^\alpha f\in L^1(\mathbb{R}^N)$. 根据控制收敛定理积分号下求导数是合理的. 由于 $f\in C_B^m(\mathbb{R}^N)$, $D^\alpha f(x)(|\alpha|\leqslant m)$ 连续, 即 $f\in C_B^m(\mathbb{R}^N)$. 由 Riemann-Lebesgue 引理知, $\widehat{D^\alpha f}(\xi)\to 0(|\xi|\to 0)$. 因为 Fourier 变换将 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 等距同构地变为 $L^2(\mathbb{R}^N)$, 所以 $D^\alpha f(x)\to 0(|x|\to\infty)$. 再来考察 $D^\alpha f(x)$ 的 Hölder 连续性. 对于 $|\alpha|=m$, 有

$$D^\alpha f(x+y)-D^\alpha f(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi)\xi^\alpha \mathrm{i}^{|\alpha|}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot(x+y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x})\mathrm{d}\xi,$$

$$\begin{aligned}|D^\alpha f(x+y)-D^\alpha f(x)| &\leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\xi)\xi^\alpha||\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y}-1|\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\xi)||\xi|^{m+\frac{N}{2}+\lambda}\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y}-1|}{|\xi|^{\frac{N}{2}+\lambda}}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}|D^\alpha f(x+y)-D^\alpha f(x)| &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|)^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}(\xi)|\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y}-1|}{|\xi|^{\frac{N}{2}+\lambda}}\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant C\|f\|_{(s)}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y}-1|^2}{|\xi|^{N+2\lambda}}\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

现在证明

$$I(y)=I(y,N+2\lambda)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y}-1|^2}{|\xi|^{N+2\lambda}}\mathrm{d}\xi=C_1(N,\lambda)|y|^{2\lambda}. \tag{8.3.25}$$

事实上, 设 R 为 $\mathbb{R}^N$ 中的一个旋转, 则

$$\begin{aligned}I(Ry) &= \int_{\mathbb{R}^N}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot Ry}-1|^2|\xi|^{-N-2\lambda}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}R^T\xi\cdot y}-1|^2|\xi|^{-N-2\lambda}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi'\cdot y}-1|^2|\xi'|^{-N-2\lambda}\mathrm{d}\xi' \\ &= I(y),\end{aligned}$$

其中 R^{T} 为 R 的转置, 即 $I(y)$ 的值在旋转下不变. 设 R 把 y 旋转到 y_1 轴上. 记 $e=(1,0,\cdots,0)$, 则

$$I(y)=I(|y|e)=\int_{\mathbb{R}^N}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot|y|e}-1|^2|\xi|^{-N-2\lambda}\mathrm{d}\xi.$$

令 $|y|\xi=\xi'$, 上式作变量替换, 得

$$I(y)=|y|^{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi'\cdot e}-1|^2|\xi'|^{-N-2\lambda}\mathrm{d}\xi'=|y|^{2\lambda}I(e).$$

下面验证 $I(e)$ 为有限值. 由于

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot e}-1|^2|\xi|^{-N-2\lambda}=O(|\xi|^{-N-2\lambda}),\quad |\xi|\to\infty,$$

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot e}-1|^2|\xi|^{-N-2\lambda}=O(|\xi|^{2-N-2\lambda}),\quad |\xi|\to 0,$$

故 $I(e)<\infty$. □

8.4　$H^s(\mathbb{R}^N)$ 空间范数的内插

定理 8.4.1　设 s_1 和 s_2 是两个非负实数, $s_1<s_2$, $\theta\in(0,1)$, $f\in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$, 则成立

$$\|f\|_{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)}\leqslant\|f\|_{(s_1)}^{\theta}\|f\|_{(s_2)}^{1-\theta}.$$

证明

$$\begin{aligned}\|f\|_{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)}&=\Big[\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}|\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac12}\\&=\Big[\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\xi)|^{2(\theta+(1-\theta))}(1+|\xi|^2)^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac12}\\&=\Big[\int_{\mathbb{R}^N}[(1+|\xi|^2)^{s_1}|\widehat{f}(\xi)|^2]^{\theta}[(1+|\xi|^2)^{s_2}|\widehat{f}(\xi)|^2]^{1-\theta}\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac12}.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned}\|f\|_{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)}&\leqslant\Big[\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{s_1}|\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{\theta}{2}}\Big[\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{s_2}|\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{1-\theta}{2}}\\&=\|f\|_{(s_1)}^{\theta}\|f\|_{(s_2)}^{1-\theta}.\end{aligned}$$

□

推论 8.4.1　设 $0\leqslant s_1<s_2<s_3$, 则对任意正数 ε, 存在 $C(\varepsilon)>0$, 使得对任意的 $f\in H^{s_3}(\mathbb{R}^N)$ 有

$$\|f\|_{(s_2)}\leqslant\varepsilon\|f\|_{(s_3)}+C(\varepsilon)\|f\|_{(s_1)}.$$

证明 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $s_2 = \theta s_1 + (1-\theta)s_3$. 由定理 8.4.1 得

$$\|f\|_{(s_2)} \leqslant \|f\|_{(s_1)}^{\theta}\|f\|_{(s_2)}^{1-\theta} = \left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\|f\|_{(s_1)}\right)^{\theta}\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\|f\|_{(s_3)}\right)^{1-\theta}.$$

利用 Young 不等式导出

$$\|f\|_{(s_2)} \leqslant \varepsilon\|f\|_{(s_3)} + \theta\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\|f\|_{(s_1)}. \qquad \square$$

8.5 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\Omega)$

本节讨论具有一致 C^m- 正则性条件的区域 Ω 上的分数阶空间 $H^s(\Omega)$. 设 $s = m+\sigma$, $0 \leqslant \sigma < 1$, m 是非负整数. 由定理 8.3.2 知

(1) $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^m(\mathbb{R}^N)$, 因而 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 是 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 的一个子集;

(2) 当 $\sigma = 0$, 即 $s = m$ 时, 由定理 4.6.1 可知 $H^m(\Omega)$ 中的一个元素 f, 在 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 中有一个元素 Lf 与它对应, 而且 Lf 与 f 在 Ω 上的值相同. 反之, 如果 $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, 把 f 的定义域限制在 Ω 上, 则 $f \in H^m(\Omega)$. 因此可以把空间 $H^m(\Omega)$ 看成由把 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 中的元素的定义域限于 Ω 时的函数全体组成. 这样一来, 就很容易引出空间 $H^s(\Omega)$ 的定义.

定义 8.5.1 空间 $H^s(\Omega)$ 是由把 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中的元素的定义域限于 Ω 时的函数全体组成.

空间 $H^s(\Omega)$ 的范数如何确定? 范数确定后, 是否成为 Banach 空间? 下面将回答这些问题. 为此先引进商空间的概念.

设 X 是一线性赋范空间, $G_0(\subset X)$ 是一子空间. 集合 G 是由 X 中的元素组成, 作法如下: 如果 $x_1 \in G$, 则凡是 X 中满足 $(x-x_1) \in G_0$ 的元素 x 都属于 G. 因此 G 中的任意两个元素 x_1 和 x_2 必成立 $(x_1-x_2) \in G_0$. 这样的集合 G 有很多. 把 G 看成一个元素, 这样的 G 全体构成的集合为 X/G_0. 在 X/G_0 中定义两种运算.

(1) 加法运算. 设 $G_1, G_2 \in X/G_0$, 则 G_1+G_2 是一切由元素 x_1+x_2 构成的集合, 其中 $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$, 即

$$G_1+G_2 = \{x_1+x_2 | x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}.$$

于是 $G_1+G_2 \in X/G_0$. 事实上, 设 x_1+x_2, $x_1'+x_2'$ 是 G_1+G_2 中的两个元素, 则

$$(x_1+x_2)-(x_1'+x_2') = (x_1-x_1')+(x_2-x_2') = x_0+y_0 \in G_0,$$

这是因为 $x_0, y_0 \in G_0$ 和 G_0 是 X 的子空间, 所以 $G_1+G_2 \subset G$, 其中 G 是 X/G_0 中的元素.

如果 y 是这一 G 中的任一元素, 取 G 中形如这样的元素 x_1+x_2(这是可能的, 因为 $G\supset G_1+G_2$), 则

$$y-(x_1+x_2)=x_0\in G_0,\ 从而\ y=x_1+x_2+x_0=x_1+\widetilde{x}_2,$$

其中 $x_1\in G_1$, $\widetilde{x}_2\in G_2$, 所以 $G\subset G_1+G_2$. 因此 $G=G_1+G_2$.

(2) 乘法运算. 设 λ 是实数, G 是 X/G_0 中的元素, 则 λG 是一切由元素 λx 构成的集合, 其中 $x\in G(\lambda\neq 0)$. 易证 $\lambda G\in X/G_0$. 事实上, 因为 G 是 X/G_0 中的元素, 则对于 $x_1\in G$, $(x-x_1)\in G_0$, 于是 $x\in G$ 和对于 $\lambda x_1\in\lambda G$, $\lambda x-\lambda x_1=\lambda(x-x_1)\in G_0$. 所以 $\lambda x\in\lambda G$, 因此 $\lambda G\in X/G_0$.

进一步, 对于任意的 $G\in X/G_0$ 假定 $0\cdot G=G_0$. 易证这样定义的运算满足线性空间的一切性质. 因而 X/G_0 是一线性空间. 这时, G_0 起空间中的零作用. 注意到, 如果 $G\in X/G_0$ 包含 X 中的 θ 元素, 则 G 与 G_0 一样, 这是因为在这种情况, 任意元素 $x\in G$ 有形式 $x=\theta+x_0=x_0\in G_0$. 相反的结论也对.

设 $G\in X/G_0$, 其范数定义如下:

$$\|G;X/G_0\|=\inf_{x\in G}\|x;X\|.$$

这样定义的范数满足范数公理:

(1) 显然 $\|G;X/G_0\|\geqslant 0$. 证明 $\|G;X/G_0\|=0$, 当且仅当 $G=G_0$. 首先证明 G 是闭集. 事实上, 令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 G 中的元素序列, 且收敛于 $x\in X$. 对于任意的 n 和 m, $x_n-x_m\in G_0$. 当 $m\to\infty$ 时, 以 X 的范数

$$x_n-x_m\to x_n-x.$$

因为 G_0 是闭的, 所以 $(x_n-x)\in G_0$. 但是 x 和 x_n 都属于 G. 所以 G 是闭的.

现在令

$$\|G;X/G_0\|=\inf_{x\in G}\|x;X\|=0,$$

则在 G 中存在这样的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $\|x_n;X\|\to 0$, 即 $x_n\to\theta$. 由于 G 的闭性, 应该含有 θ. 因此 $G=G_0$. $\|G_0;X/G_0\|=\inf_{x\in G_0}\|x;X\|=0$ 是显然的. 第一条公理得证.

(2) 令 $\varepsilon>0$. 由 $\|G_1;X/G_0\|$ 和 $\|G_2;X/G_0\|$ 的定义推出, 存在这样的元素 $x_1\in G_1$ 和 $x_2\in G_2$, 使得

$$\|x_1;X\|\leqslant\|G_1;X/G_0\|+\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\|x_2;X\|\leqslant\|G_2;X/G_0\|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\|x_1 + x_2; X\| \leqslant \|x_1; X\| + \|x_2; X\| \leqslant \|G_1; X/G_0\| + \|G_2; X/G_0\| + \varepsilon.$$

尤其

$$\inf_{x \in G_1 + G_2} \|x; X\| \leqslant \inf_{x_1 \in G_1, x_2 \in G_2} \|x_1 + x_2; X\| \leqslant \|G_1; X/G_0\| + \|G_2; X/G_0\| + \varepsilon$$

或

$$\|G_1 + G_2; X/G_0\| \leqslant \|G_1; X/G_0\| + \|G_2; X/G_0\| + \varepsilon.$$

顾及到 ε 的任意性, 由上式得

$$\|G_1 + G_2; X/G_0\| \leqslant \|G_1; X/G_0\| + \|G_2; X/G_0\|.$$

第二个公理成立.

(3) 证明在 $\lambda \neq 0$ 的情形, $\|\lambda G; X/G_0\| = |\lambda| \|G; X/G_0\|$. 易知

$$\|\lambda G; X/G_0\| = \inf_{x \in G} \|\lambda x; X\| = |\lambda| \inf_{x \in G} \|x; X\| = |\lambda| \|G; X/G_0\|.$$

如果 $\lambda = 0$, 则对于任意的 G

$$\|\lambda G; X/G_0\| = \|G_0; X/G_0\| = 0 = |\lambda| \|G; X/G_0\|.$$

第三个公理得证. 于是 X/G_0 是一赋范空间.

定义 8.5.2 X/G_0 定义了以上范数, 称 X/G_0 为商空间.

定理 8.5.1 序列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依空间 X/G_0 的范数收敛于 G 的等价条件是: 存在这样的元素序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in G_n$, 使得当 $n \to \infty$ 时, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 x, 即 $x_n \to x$, $x \in G$.

证明 令当 $n \to \infty$ 时,

$$\|G_n - G; X/G_0\| \to 0,$$

则当 $n \to \infty$ 时,

$$\|G_n - G; X/G_0\| = \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

因此 $G_n - G$ 包含这样的元素 $y_n - x$, 使得 $y_n \in G_n$, $x \in G$ 和

$$\|y_n - x; X\| < 2\varepsilon_n.$$

在此情况下 x 可以取任意确定的元素 (不依赖于 n) $x_0 \in G$. 事实上, 如果

$$\|y_n - x; X\| \leqslant 2\varepsilon_n,$$

其中 $y_n \in G_n$, $x \in G$, 则

$$\|(y_n - x + x_0) - x_0; X\| \leqslant 2\varepsilon_n.$$

因为 $x_0 \in G$, $x \in G$, 所以 $(x_0 - x) \in G_0$ 和 $x_n = (y_n - x + x_0) \in G_n$.

于是, 对于 $x_0 \in G$ 和建立的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in G_n$, 使得当 $n \to \infty$ 时,

$$x_n \to x_0.$$

反之, 设存在这样的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in G_n$, 使得当 $n \to \infty$ 时, $x_n \to x_0$, $x_0 \in G$. 因为

$$\|G_n - G; X/G_0\| = \inf_{y_n \in G_n, y \in G} \|y_n - y; X\| \leqslant \|x_n - x; X\|,$$

则当 $n \to \infty$ 时,

$$\|G_n - G; X/G_0\| \to 0.$$

□

定理 8.5.2 如果 X 是完备的空间, 则 X/G_0 也是完备的空间.

证明 设 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是空间 X/G_0 中的基本序列. 在每一个 G_n 中选出元素 x_n, 使得

$$\|x_n - x_m; X\| \leqslant 2\|G_n - G_m; X/G_0\|$$

后, 得到了 X 中的元素的基本序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 由于 X 是完备空间, 所以存在元素 $x \in X$, 使得当 $n \to \infty$ 时, $x_n \to x$. 取 $G = x + G_0$, 根据定理 8.5.1 的等价条件, X/G_0 的完备性得证. □

设 m 为非负整数, 下面给出空间 $H^m(\Omega)$ 中元素的另一种范数定义, 并说明新的范数与原来已有的范数是等价的.

定义 8.5.3 设 m 为非负整数,

$$H^m(\mathbb{R}^N, \Omega, 0) = \{f \in H^m(\mathbb{R}^N) \big| \ f|_\Omega = 0\}.$$

定理 8.5.3 设 m 是一非负整数, 则 $H^m(\mathbb{R}^N, \Omega, 0)$ 是一 Banach 空间.

证明 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $H^m(\mathbb{R}^N, \Omega, 0)$ 中任一基本序列, 由 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 的完备性知, 存在 $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ 满足当 $n \to \infty$ 时,

$$\|f_n - f; H^m(\mathbb{R}^N)\| \to 0.$$

由于当 $n \to \infty$ 时,

$$\|f_n - f; H^m(\Omega)\| \leqslant \|f_n - f; H^m(\mathbb{R}^N)\| \to 0.$$

所以在 Ω 上 $f = 0$, 因此 $f \in H^m(\mathbb{R}^N, \Omega, 0)$. □

作商空间 $H^m(\mathbb{R}^N)/H^m(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$. 设 $f\in H^m(\Omega)$, 根据定义 8.5.1 在 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 中存在函数 F (在 Ω 上 $F=f$), 然后在 $H^m(\mathbb{R}^N)/H^m(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 中取一包含有 F 的元素 G_F. 显然, 如果另有 $F_1\in H^m(\mathbb{R}^N)$ 且在 Ω 上 $F_1=f$, 则 $G_F=G_{F_1}$. 所以 G_F 实际上由 f 唯一确定. 下面就用 G_f 来记, 而不用 G_F. G_f 中任一元素在 Ω 上的值都相同且等于 f. 这样, 由 $f\in H^m(\Omega)$ 导出 G_f 所建立的关系是一一对应的.

定义 8.5.4 设 $f\in H^m(\Omega)$, 现给出 f 的另一范数, 记为

$$\|f\|_{(m,\Omega)}=\inf_{x\in G_f}\|x\|_{(m)}.$$

下面说明这两种范数的等价性. 由定理 4.6.1 知, 存在延拓算子 $L:\ f\mapsto Lf\in H^m(\mathbb{R}^N)$, 且成立

$$\|f;H^m(\Omega)\|\leqslant\|Lf;H^m(\mathbb{R}^N)\|\leqslant K\|f;H^m(\Omega)\|, \tag{8.5.1}$$

其中 K 是依赖于 m, 但不依赖于 $f(x)$ 的常数. 由式 (8.5.1) 知

$$\|f\|_{(m,\Omega)}=\inf_{x\in G_f}\|x\|_{(m)}\leqslant\|Lf\|_{(m)}, \tag{8.5.2}$$

$$\begin{aligned}K_1\|Lf;H^m(\mathbb{R}^N)\|&\leqslant K_2\|f;H^m(\Omega)\|\\&\leqslant K_2\inf_{x\in G_f}\|x;H^m(\mathbb{R}^N)\|\\&\leqslant K_3\inf_{x\in G_f}\|x\|_{(m)}\\&=K_3\|f\|_{(m,\Omega)}.\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

由式 (8.5.1) 知 $\|Lf;H^m(\mathbb{R}^N)\|$ 与 $\|f;H^m(\Omega)\|$ 等价, 从而再由式 (8.5.2) 和式 (8.5.3) 推出 $H^m(\Omega)$ 中两种范数是等价的.

采用 $\|f\|_{(m,\Omega)}$ 作为 $H^m(\Omega)$ 中元素 f 的范数的办法, 可以推广用来确定空间 $H^s(\Omega)$ 中元素的范数.

定义 8.5.5 设 $s=m+\sigma$, $0\leqslant\sigma<1$ 和 m 是非负整数,

$$H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)=\{f\in H^s(\mathbb{R}^N)|\ f|_\Omega=0\}.$$

定理 8.5.4 $H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 是一 Banach 空间.

证明 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 中的任一基本序列, 由 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 的完备性, 存在 $f\in H^s(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{(s)}=0.$$

因为 $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^m(\mathbb{R}^N)$, 所以 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 也是 $H^m(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 中的基本序列, 并在 $H^m(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 中收敛于 f. 故 f 在 Ω 上为零, 从而 $f \in H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$. □

作商空间 $H^s(\mathbb{R}^N)/H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$. 空间 $H^s(\Omega)$ 与商空间 $H^s(\mathbb{R}^N)/H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 的对应关系的确定完全类似于 $s=m$ 的情形. 设 $f \in H^s(\Omega)$, 仍用 G_f 表示在商空间 $H^s(\mathbb{R}^N)/H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 中与 f 对应的元素.

定义 8.5.6　$H^s(\Omega)$ 中元素 f 的范数定义为

$$\|f\|_{(s,\Omega)} = \inf_{x\in G_f} \|x\|_{(s)}.$$

因为 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 是 Banach 空间, 所以 $H^s(\mathbb{R}^N)/H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 也是 Banach 空间. 由 $H^s(\mathbb{R}^N)/H^s(\mathbb{R}^N,\Omega,0)$ 与 $H^s(\Omega)$ 中元素的一一对应关系, 得到下面的定理.

定理 8.5.5　$H^s(\Omega)$ 是一个 Banach 空间.

容易从全空间的嵌入定理结果导出下面的嵌入定理.

定理 8.5.6　设 Ω 满足一致 C^m- 正则性条件, $s=m+\sigma$ $(0\leqslant\sigma<1)$, m 是非负整数, 如果 $s\geqslant t\geqslant 0$, 则成立

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^t(\Omega).$$

定理 8.5.7　设 Ω 满足一致 C^m- 正则性条件, $s=m+\sigma$ $(0\leqslant\sigma<1)$, m 是非负整数, 如果 $s>\dfrac{N}{2}$, 则成立

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega).$$

定理 8.5.8　设 Ω 满足一致 C^m- 正则性条件, $s=m+\sigma$ $(0\leqslant\sigma<1)$, m 是非负整数, 如果 $s>\dfrac{N}{2}+j$, 则成立

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

本章主要参考了文献 [2], [22]~[24], [76]~[78].

第 9 章　索伯列夫空间在偏微分方程中的应用 (II)

在第 6 章中介绍了整数阶索伯列夫空间在偏微分方程中的应用, 主要涉及偏微分方程的初边值问题. 本章介绍分数阶索伯列夫空间在偏微分方程 Cauchy 问题中的应用. 主要讨论具阻尼项的 N 维 IMBq 方程的 Cauchy 问题在空间 $C^2([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^N)$ 中的解和在 $C^3([0,\infty); W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^N)\bigcap L^2(\mathbb{R}^N))$ 中解的存在性和唯一性以及解的爆破. 还研究具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题.

9.1　具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

本节通过证明具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解, 并给出解爆破的充分条件作为空间 $C^2([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^N))$ 在非线性波动方程中的应用.

9.1.1　问题的来历

Arévalo 和 Gaididei[79] 在有流体动力学阻尼和外力作用的情况下研究了单原子链的晶格孤立子的动力学. 在拟连续极限下离散系统导出一具阻尼和外力的 IMBq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} - f(u)_{xx} = \nu_2 u_{xxt}. \tag{9.1.1}$$

关于方程 (9.1.1) 对应 u_{xxt} 的系数为 $\nu_2 > 0$ 是流体动力学阻尼[79].

本节研究下列具阻尼项的广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \nu_2 \Delta u_t = \Delta f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{9.1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{9.1.3}$$

其中 $u(x,t)$ 是变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ 和 $t \in \mathbb{R}_+(=[0,\infty))$ 的未知函数, Δ 表示 N 维的 Laplace 算子, $\nu_2 < 0$ 是常数, $f(s)$ 是给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数. 方程 (9.1.2) 是四阶 N 维非线性拟波动方程. 显然, 当 $N = 1$ 时, 方程 (9.1.2) 变成方程 (9.1.1).

为了书写简单起见, 本节采用以下记号: $L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的所有 L^p 函数赋予范数 $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}$ 的空间, 特别地, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$; H^s 表示 $\mathbb{R}^N$ 上赋以范数 $\|v\|_{H^s} = \|(I-\Delta)^{\frac{s}{2}} v\|$ 的索伯列夫空间, 其中 s 是实数.

9.1.2 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 在 $C^2([0,\infty);H^s)$ 中整体解的存在唯一性和解的爆破

1. *局部解*

为了利用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一的局部解, 我们先将 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 通过一个二阶偏微分算子的基本解化为一积分方程. 为此, 简单介绍一下微分算子的基本解概念.

考虑 m 阶微分算子 L,

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \tag{9.1.4}$$

其中 $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, α 是一 N 重指数.

定义 9.1.1 一个广义函数 $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ 如果满足方程

$$Lv = \delta, \tag{9.1.5}$$

就称为算子 L 的基本解, 其中 L 由式 (9.1.4) 确定, δ 是 Dirac 函数.

若 v 与 v_1 都是 L 的基本解, 则 $u = v - v_1$ 必满足齐次方程 $Lu = 0$, 即其他任意基本解与基本解 v 只相差齐次方程的一个解 u.

现在设 $P(x)$ 是一个 m 阶的 N 元多项式, 考虑算子

$$L = P(D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha, \tag{9.1.6}$$

它是一个 m 阶常系数微分算子.

定理 9.1.1 设 v 是由式 (9.1.6) 给定的常系数微分算子 L 的一个基本解. 若广义函数 $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ 使得卷积 $u = v * f$ 存在 (常系数算子 $P(D)$ 的基本解总是存在的, 见文献 [26]), 则 u 是方程

$$Lu = f$$

的一个解.

证明 由式 (3.1.19) 及式 (3.1.20), 有

$$Lu = P(D)u = (P(D)v) * f = \delta * f = f. \qquad \square$$

设 $G(x)$ 是二阶偏微分算子

$$L = I - \Delta \tag{9.1.7}$$

的基本解, 其中 I 为单位算子. 关于 $G(x)$ 成立如下的引理.

引理 9.1.1 (1) $G(x)$ 有表达式

$$G(x)=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\eta}}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{d}\eta,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^N,$$

它在 $\mathbb{R}^N$ 上有定义和连续, 且 $G(x)>0$.

(2) $G(x)\in L^q(\mathbb{R}^N)$ 和 $\|G\|_1=1$, 其中

$$\begin{aligned}&1\leqslant q\leqslant\infty,\qquad N=1,\\&1\leqslant q<\infty,\qquad N=2,\\&1\leqslant q<\frac{N}{N-2},\quad N\geqslant 3.\end{aligned}\tag{9.1.8}$$

证明 (1) 对方程

$$G(x)-\Delta G(x)=\delta(x)$$

取 Fourier 变换, 得

$$\widehat{G}(\xi)+4\pi^2|\xi|^2\widehat{G}(\xi)=1,\tag{9.1.9}$$

注意其中 $\widehat{G}(\xi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}G(x)\mathrm{d}x$. 由式 (9.1.9) 有

$$\widehat{G}(\xi)=(1+4\pi^2|\xi|^2)^{-1}.\tag{9.1.10}$$

我们知道

$$1=\Gamma(1)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-y\eta}\mathrm{d}(y\eta)=y\int_0^\infty\mathrm{e}^{-y\eta}\mathrm{d}\eta,\tag{9.1.11}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数, 从而

$$y^{-1}=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-y\eta}\mathrm{d}\eta.\tag{9.1.12}$$

由式 (9.1.12) 推出

$$\Big(\frac{1+4\pi^2|\xi|^2}{4\pi}\Big)^{-1}=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\frac{1+4\pi^2|\xi|^2}{4\pi}\eta}\mathrm{d}\eta.\tag{9.1.13}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}(\mathrm{e}^{-\pi|x|^2})=\mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2},\\&\mathscr{F}(\mathrm{e}^{-\pi\eta|x|^2})=\eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\eta}},\\&\mathscr{F}\Big(\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\pi\eta|x|^2}\mathrm{d}\eta\Big)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\eta}}\eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{d}\eta.\end{aligned}\tag{9.1.14}$$

在式 (9.1.12) 中令 $y = \pi|x|^2$, 得

$$(\pi|x|^2)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi|x|^2\eta}\mathrm{d}\eta.$$

注意到式 (9.1.14), 有

$$\mathscr{F}((\pi|x|^2)^{-1}) = \int_0^\infty \mathscr{F}(\mathrm{e}^{-\pi|x|^2\eta})\mathrm{d}\eta = \int_0^\infty \eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\eta}}\mathrm{d}\eta. \tag{9.1.15}$$

作变换 $\dfrac{\pi}{\eta}|\xi|^2 = y$, 式 (9.1.15) 变为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}((\pi|x|^2)^{-1}) =& \int_0^\infty \left(\frac{\pi|\xi|^2}{y}\right)^{-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-y}\left(\frac{\pi|\xi|^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y\\ =&(\pi|\xi|^2)^{1-\frac{N}{2}}\int_0^\infty y^{\frac{N}{2}-2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = (\pi|\xi|^2)^{1-\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}-1\right).\end{aligned} \tag{9.1.16}$$

由式 (9.1.13) 知

$$\begin{aligned}(1+4\pi^2|\xi|^2)^{-1} =& \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1+4\pi^2|\xi|^2}{4\pi}\eta}\mathrm{d}\eta\\ =&\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{4\pi}}\mathrm{e}^{-\pi\eta|\xi|^2}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{4\pi}}\mathscr{F}(\mathrm{e}^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\eta}}\eta^{-\frac{N}{2}})\mathrm{d}\eta\\ =&\mathscr{F}\Big(\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{4\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\eta}}\eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{d}\eta\Big).\end{aligned}$$

所以作变换 $\eta = 4\pi y$

$$\begin{aligned}G(x) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{4\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\eta}}\eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{d}\eta\\ =&\frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4y}}\mathrm{e}^{-y}y^{-\frac{N}{2}}\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\eta}}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{d}\eta, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

由 $G(x)$ 的表达式易知, $G(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上有定义, 连续和 $G(x) > 0$.

(2) 当 $1 < q < \infty$ 时, 由 $G(x)$ 的表达式, Minkowski 积分不等式和式 (9.1.8) 推得

$$\begin{aligned}\|G\|_q \leqslant& \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^\infty \eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\eta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\frac{q}{4\eta}|x|^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}\eta\\ =&\frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^\infty \left(\frac{4\eta\pi}{q}\right)^{\frac{N}{2q}}\eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta\\ =&(4\pi)^{\frac{N}{2q}-\frac{N}{2}}q^{-\frac{N}{2q}}\Gamma\left(1-\frac{N}{2}+\frac{N}{2q}\right) < \infty,\end{aligned}$$

因此 $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$. 关于 $q=1$, 有

$$\|G\|_1 = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^\infty \eta^{-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\eta}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\eta}|x|^2}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}\eta = 1.$$

当 $N=1$ 和 $q=\infty$ 时, 由 $G(x)$ 的表达式得

$$\begin{aligned}\|G\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\eta}}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以当 $N=1$ 和 $q=\infty$ 时, $G \in L^\infty(\mathbb{R})$. □

将方程 (9.1.2) 改写为

$$[u_{tt}+u-\nu_2 u_t+f(u)]-\Delta(u_{tt}+u-\nu_2 u_t+f(u)) = u-\nu_2 u_t+f(u). \tag{9.1.17}$$

方程 (9.1.17) 又可写成

$$\begin{aligned}u_{tt}+u-\nu_2 u_t+f(u) &= (I-\Delta)^{-1}[u-\nu_2 u_t+f(u)] \\ &= G*[u-\nu_2 u_t+f(u)]\end{aligned} \tag{9.1.18}$$

或

$$u_{tt} = (I-\Delta)^{-1}\Delta[u-\nu_2 u_t+f(u)]. \tag{9.1.19}$$

方程 (9.1.19) 关于 t 积分两次并利用初值条件 (9.1.3), Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 可形式地写成下面的积分方程

$$\begin{aligned}u(x,t) =& u_0(x)+\{u_1(x)-\nu_2 u_0(x)+[G*(\nu_2 u_0)](x)\}t-\int_0^t(t-\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &+\nu_2\int_0^t u(x,\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t(t-\tau)f(u(x,\tau))\mathrm{d}\tau+\int_0^t(t-\tau)(G*u)(x,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &-\int_0^t[G*(\nu_2 u)](x,\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t(t-\tau)[G*f(u)](x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{9.1.20}$$

定义 9.1.2 对于给定的 $T>0$, 若 $s>\frac{N}{2}$, $u_0, u_1 \in H^s$ 且 $u \in C([0,T];H^s)$ 满足积分方程 (9.1.20), 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (9.1.20) 的连续解或者称为 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的整体广义解.

引理 9.1.2[80]　设 $g(u)\in C^k(\mathbb{R})$, $g(0)=0, u\in H^s\bigcap L^\infty$ 和 $k=[s]+1$, 其中 $s\geqslant 0$. 如果 $\|u\|_\infty\leqslant M_0$, 则

$$\|g(u)\|_{H^s}\leqslant C_1(M_0)\|u\|_{H^s},$$

其中 $C_1(M_0)$ 是一依赖于常数 M_0 的常数.

引理 9.1.3[81]　设 $s\geqslant 0$, $g(u)\in C^k(\mathbb{R})$ 和 $k=[s]+1$. 如果 $u,v\in H^s\bigcap L^\infty$, 且 $\|u\|_\infty+\|u\|_{H^s}\leqslant M_1$, $\|v\|_\infty+\|v\|_{H^s}\leqslant M_1$, 则

$$\|g(u)-g(v)\|_{H^s}\leqslant C_2(M_1)\|u-v\|_{H^s},$$

其中 $C_2(M_1)$ 是一依赖于常数 M_1 的常数.

引理 9.1.4　设 $v\in H^s(s\geqslant 0)$, 则 $\|G*v\|_{H^s}=\|v\|_{H^{s-2}}$.

证明　因为

$$G*v=(I-\Delta)^{-1}v,$$

于是

$$\|G*v\|_{H^s}=\|(I-\Delta)^{-1}v\|_{H^s}=\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{-1}\widehat{v}\right\|=\|v\|_{H^{s-2}},$$

其中 $\widehat{v}$ 表示 v 的 Fourier 变换.　□

假设 $f(0)=0$, $s>\dfrac{N}{2}$ 及 u_0, $u_1\in H^s$. 考虑 Banach 空间

$$X(T)=\big\{u|u\in C([0,T];H^s)\big\},\tag{9.1.21}$$

并赋予范数

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{H^s},\quad \forall\, u\in X(T).$$

由索伯列夫嵌入定理, 可知

$$u\in C\big([0,T];L^\infty\big),\quad \forall\, u\in X(T)$$

及 $\|u\|_\infty\leqslant C_3\|u\|_{H^s}$.

定义映射 S 如下:

$$\begin{aligned}Sv(x,t)=&u_0(x)+\{u_1(x)-\nu_2u_0(x)+[G*(\nu_2u_0)](x)\}t-\int_0^t(t-\tau)v(x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\nu_2\int_0^t v(x,\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t(t-\tau)f(v(x,\tau))\mathrm{d}\tau+\int_0^t(t-\tau)(G*v)(x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t[G*(\nu_2v)](x,\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t(t-\tau)(G*f(v))(x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9.1.22}$$

显然, 若 $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, 则 $S: X(T) \mapsto X(T)$. 对于任意给定的初值函数 u_0, $u_1 \in H^s$, 令 $M=(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^s}$. 定义

$$P(M,T)=\big\{u|u\in X(T),\|u\|_{X(T)}\leqslant M+1\big\}.$$

显然, 对于 $M,T>0$, $P(M,T)$ 是 $X(T)$ 的一个非空有界闭凸子集. 我们的目的是证明映射 S 在 $P(M,T)$ 中存在唯一的不动点.

引理 9.1.5 假设 $s>\dfrac{N}{2}$, u_0, $u_1 \in H^s$, $f(u)\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0)=0$. 则 T 相对于 M 充分小时, S 映 $P(M,T)$ 到 $P(M,T)$ 且 $S: P(M,T)\mapsto P(M,T)$ 是严格压缩的.

证明 首先, 证明当 T 足够小时, S 映 $P(M,T)$ 到自身. 对于给定的 $v\in P(M,T)$, 由引理 9.1.2 得

$$\|f(v(\cdot,t))\|_{H^s}\leqslant C_1(C_3M+C_3)\|v(\cdot,t)\|_{H^s}, \tag{9.1.23}$$

其中 $C_1(C_3M+C_3)$ 表示 C_1 是依赖于 C_3M+C_3 的常数且 C_1 出现在引理 9.1.2 中.

利用 Minkowski 积分不等式, 引理 9.1.1 和引理 9.1.2, 由式 (9.1.22) 得

$$\begin{aligned}\|Sv(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant&\|u_0\|_{H^s}+[\|u_1\|_{H^s}+2|\nu_2|\|u_0\|_{H^s}]T+\int_0^t(t-\tau)\|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&+|\nu_2|\int_0^t\|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau+\int_0^t(t-\tau)\|f(v(\cdot,\tau))\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\|[G*v](\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau+|\nu_2|\int_0^t\|[G*v](\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\|[G*f(u)](\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\\leqslant&M+MT+2|\nu_2|(M+1)T\\&+\big[1+C_1(C_3M+C_3)\big](M+1)T^2.\end{aligned} \tag{9.1.24}$$

若 T 满足

$$T\leqslant\min\Big(1,\frac{1}{M+[1+2|\nu_2|+C_1(C_3M+C_3)](M+1)}\Big), \tag{9.1.25}$$

则 $\|Sv\|_{X(T)}\leqslant M+1$, 即 S 映 $P(M,T)$ 到 $P(M,T)$.

下面证明映射 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 且 v_1, $v_2\in P(M,T)$ 是给定的. 由

式 (9.1.22) 得到

$$\begin{aligned}Sv_1(x,t)-Sv_2(x,t)=&-\int_0^t(t-\tau)[v_1(x,\tau)-v_2(x,\tau)]\mathrm{d}\tau+\nu_2\int_0^t[v_1(x,\tau)-v_2(x,\tau)]\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t(t-\tau)[f(v_1(x,\tau))-f(v_2(x,\tau))]\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)[G*(v_1-v_2)](x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t[G*(\nu_2(v_1-v_2))](x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)[G*(f(v_1)-f(v_2))](x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9.1.26}$$

利用 Minkowski 积分不等式, 有

$$\begin{aligned}&\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_{H^s}\\\leqslant&\int_0^t(t-\tau)\|v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau+|\nu_2|\int_0^t\|v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\|f(v_1(\cdot,\tau))-f(v_2(\cdot,\tau))\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\|[G*(v_1-v_2)](\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau+|\nu_2|\int_0^t\|[G*(v_1-v_2)](\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\|[G*(f(v_1)-f(v_2))](\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9.1.27}$$

由引理 9.1.3 得到

$$\|f(v_1(\cdot,\tau))-f(v_2(\cdot,\tau))\|_{H^s}\leqslant C_2(C_3M+C_3)\|v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}.\tag{9.1.28}$$

利用引理 9.1.4 和引理 9.1.3, 得

$$\begin{aligned}\|G*[f(v_1)-f(v_2)](\cdot,\tau)\|_{H^s}\leqslant&\|f(v_1(\cdot,\tau))-f(v_2(\cdot,\tau))\|_{H^s}\\\leqslant&C_2(C_3M+C_3)\|v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}.\end{aligned}\tag{9.1.29}$$

把式 (9.1.28) 和式 (9.1.29) 代入式 (9.1.27), 推出

$$\begin{aligned}&\|Sv_1-Sv_2\|_{X(T)}\\\leqslant&2|\nu_2|T\|v_1-v_2\|_{X(T)}+\big[1+C_2(C_3M+C_3)\big]T^2\|v_1-v_2\|_{X(T)}.\end{aligned}\tag{9.1.30}$$

如果 T 满足式 (9.1.25) 和

$$T\leqslant\frac{1}{2[1+2|\nu_2|+C_2(C_3M+C_3)]},\tag{9.1.31}$$

则 $\|Sv_1 - Sv_2\|_{X(T)} \leqslant \dfrac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{X(T)}$, 即 S 是严格压缩的. □

定理 9.1.2 假设 $s > \dfrac{N}{2}$, $u_0, u_1 \in H^s$, $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一的局部广义解 $u \in C([0, T_0); H^s)$, 其中 $[0, T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 并且, 若

$$\lim_{t \to T_0^-} \sup \left(\|u(\cdot, t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot, t)\|_{H^s} \right) < \infty, \tag{9.1.32}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 由引理 9.1.5 和压缩映射原理知, 对适当选择的 $T > 0$, S 存在唯一的不动点 $u \in P(M, T)$, 它显然是积分方程 (9.1.20) 的解. 对任一 $T' > 0$, 积分方程 (9.1.20) 最多存在一个解属于 $X(T')$. 事实上, 令 $u_1, u_2 \in X(T')$ 是积分方程 (9.1.20) 的两个解, 则

$$\begin{aligned} u_1(x,t) - u_2(x,t) = & - \int_0^t (t-\tau)[u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\mathrm{d}\tau + \nu_2 \int_0^t [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\mathrm{d}\tau \\ & - \int_0^t (t-\tau)[f(u_1(x,\tau)) - f(u_2(x,\tau))]\mathrm{d}\tau \\ & + \int_0^t (t-\tau)[G * (u_1 - u_2)](x,\tau)\mathrm{d}\tau \\ & - \int_0^t [G * (\nu_2(u_1 - u_2))](x,\tau)\mathrm{d}\tau \\ & + \int_0^t (t-\tau)[G * (f(u_1) - f(u_2))](x,\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{9.1.33}$$

应用引理 9.1.5 中的方法, 由式 (9.1.33) 可得

$$\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant C(T) \int_0^t \|u_1(\cdot,\tau) - u_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau,$$

其中常数 $C(T)$ 依赖于 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_1(\cdot,t)\|_\infty$, $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_2(\cdot,t)\|_\infty$ 和 T. 由 Gronwall 不等式得 $\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_{H^s} = 0$, 即积分方程 (9.1.20) 最多存在一个解属于 $X(T')$.

现在, 设 $[0, T_0)$ 是解 $u \in X(T_0)$ 的最大时间存在区间. 余下的只需证明如果式 (9.1.32) 成立, 则 $T_0 = \infty$. 为此, 设式 (9.1.32) 成立和 $T_0 < \infty$. 对于任意的 $T' \in [0, T_0)$, 考虑积分方程

$$w(x,t) = u(x,T') + \{u_t(x,T') - \nu_2 u(x,T') + [G * (\nu_2 u)](x,T')\}t - \int_0^t (t-\tau)w(x,\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$
\begin{aligned}
&+\nu_2\int_0^t w(x,\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t (t-\tau)f(w(x,\tau))\mathrm{d}\tau+\int_0^t (t-\tau)(G*w)(x,\tau)\mathrm{d}\tau\\
&-\int_0^t [G*(\nu_2 w)](x,\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t (t-\tau)[G*f(w)](x,\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (9.1.34)
\end{aligned}
$$

根据式 (9.1.32), $\|u(x,T')\|_{H^s}$ 和 $\|u_t(x,T')\|_{H^s}$ 关于 $T'\in[0,T_0)$ 是一致有界的, 这就允许我们可以选择 $T^*\in(0,T_0)$, 使得对于每一个 $T'\in[0,T_0)$, 积分方程 (9.1.34) 有唯一解 $w\in X(T^*)$. 这样的 T^* 的存在性是由引理 9.1.5 和压缩映射原理得来的. 特别地, 式 (9.1.25) 和式 (9.1.31) 显示出 T^* 的选择与 $T'\in[0,T_0)$ 无关. 置 $T'=T_0-\dfrac{T^*}{2}$, 令 $w(x,t)$ 表示对应于积分方程 (9.1.34) 的解和定义 $\overline{u}(x,t)$ 如下:

$$
\overline{u}(x,t)=\begin{cases} u(x,t), & t\in[0,T'],\\ w(x,t-T'), & t\in\left[T',T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]. \end{cases} \qquad (9.1.35)
$$

根据构造可知, $\overline{u}(x,t)$ 是积分方程 (9.1.20) 在 $\left[0,T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]$ 上的解, 又根据局部解的唯一性, $\overline{u}(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的延拓. 这与 $[0,T_0)$ 是积分方程 (9.1.20) 的最大时间区间矛盾. 因此, 若式 (9.1.32) 成立, 则 $T_0=\infty$. □

注 9.1.1 若 $u\in C([0,T_0);H^s)$ $\left(s>\dfrac{N}{2}\right)$ 是 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解, 由式 (9.1.20) 和引理 9.1.2 推出 $u\in C^2([0,T_0);H^s)$ 且方程 (9.1.18) 成立.

2. 整体解

现在, 证明 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 整体广义解和整体古典解的存在唯一性. 为此, 我们需要下面的引理.

引理 9.1.6 设 $s>\dfrac{N}{2}$, $u_0,u_1\in L^2$, $f\in C^2(\mathbb{R})$, $F(u)=\displaystyle\int_0^u f(y)\mathrm{d}y$, $F(u_0)\in L^1$ 及 $\Lambda^{-1}u_1\in L^2$, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解 $u(x,t)\in C^2([0,T_0);H^s)$ 满足下面的能量等式

$$
\begin{aligned}
E(t)=&\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+2\int_{\mathbb{R}^N}F(u(x,t))\mathrm{d}x\\
&-2\nu_2\int_0^t\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau=E(0). \qquad (9.1.36)
\end{aligned}
$$

这里和之后的 $\Lambda^{-\alpha}\varphi=\mathscr{F}^{-1}[|x|^{-\alpha}\mathscr{F}\varphi]$, 其中 α 是非负整数. $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换和 Fourier 逆变换.

证明 由注 9.1.1 知对于 $T<T_0$, $u,u_t,u_{tt}\in C([0,T];H^s)$. 式 (9.1.19) 关于 t

积分, 得到

$$u_t(x,t)=u_1(x)+\int_0^t(I-\Delta)^{-1}\Delta[u(x,\tau)-\nu_2u_\tau(x,\tau)+f(u(x,\tau))]\mathrm{d}\tau.$$

从而

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|\leqslant&\|\Lambda^{-1}u_1\|+\int_0^t\|\Lambda^{-1}\{(I-\Delta)^{-1}\Delta\big[u(x,\tau)-\nu_2u_\tau(x,\tau)+f(u(x,\tau))\big]\}\|\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&\|\Lambda^{-1}u_1\|+\int_0^t\left\|\frac{-|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\big[\widehat{u}+|\nu_2|\widehat{u}_\tau+\widehat{f(u)}\big]\right\|\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&\|\Lambda^{-1}u_1\|+\int_0^t\big\{\|u\|+|\nu_2|\|u_\tau\|+\|f(u)\|\big\}\mathrm{d}\tau\\ =&\|\Lambda^{-1}u_1\|+\int_0^t\big\{(1+C_1(C_3M+C_3))\|u\|+|\nu_2|\|u_\tau\|\big\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

这样 $\Lambda^{-1}u_t\in C([0,T];L^2)$. 由式 (9.1.19) 得

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{-2}u_{tt}\|=&\||\xi|^{-2}\widehat{u}_{tt}\|=\||\xi|^{-2}[\widehat{(I-\Delta)^{-1}\Delta(u-\nu_2u_t+f(u))}]\|\\ =&\left\|\frac{-1}{1+|\xi|^2}(\widehat{u}-\nu_2\widehat{u}_t+\widehat{f(u)})\right\|\\ \leqslant&\big(1+C_1(C_3M+C_3)\big)\|u\|+|\nu_2|\|u_t\|.\end{aligned}$$

因此, $\Lambda^{-2}u_{tt}\in C([0,T];L^2)$.

由式 (9.1.19) 推出

$$\Lambda^{-2}u_{tt}=\Lambda^{-2}(I-\Delta)^{-1}\Delta[u-\nu_2u_t+f(u)].\tag{9.1.37}$$

式 (9.1.37) 两端取 Fourier 变换, 所得结果两端同乘以 $(1+|\xi|^2)\widehat{u}_t$, 并对 ξ 在 $\mathbb{R}^N$ 上积分, 最后再取 Fourier 逆变换, 有

$$(\Lambda^{-2}u_{tt}+u+u_{tt}-\nu_2u_t+f(u),u_t)=0,\tag{9.1.38}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 空间中的内积. 从式 (9.1.38) 导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2+2\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\mathrm{d}x-2\nu_2\int_0^t\|u_\tau\|^2\mathrm{d}\tau\right)=0,$$

即 $E(t)=E(0)$. □

定理 9.1.3 假设下面的条件成立:

(1) $u_0,u_1\in H^s\left(s>\dfrac{N}{2}\right)$;

(2) $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0)=0, F(u) \geqslant 0, F(u_0) \in L^1$ 及存在 ρ 满足

$$
\begin{aligned}
&1 \leqslant \rho \leqslant \infty, \quad 当\ N=1\ 时,\\
&1 < \rho \leqslant \infty, \quad 当\ N=2\ 时,\\
&\frac{N}{2} < \rho \leqslant \infty, \quad 当\ N \geqslant 3\ 时,
\end{aligned}
$$

使得

$$
|f(u)| \leqslant aF(u)^{\frac{1}{\rho}}|u| + b, \tag{9.1.39}
$$

其中 a 和 b 是正常数, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一的整体广义解 $u \in C^2([0,\infty); H^s)$.

证明 根据定理 9.1.2 我们只需证明式 (9.1.32) 成立. 方程 (9.1.18) 两端同乘以 $2u_t(x,t)$ 可见

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_t^2(x,t)+u^2(x,t)+2F(u(x,t))] - 2\nu_2 u_t^2(x,t)\\
=&2[G*(u-\nu_2 u_t + f(u))](x,t)u_t(x,t).
\end{aligned} \tag{9.1.40}
$$

利用式 (9.1.39), 卷积 Young 不等式和 Hölder 不等式, 有

$$
2[G*u](x,t)u_t(x,t) \leqslant \|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2, \tag{9.1.41}
$$

$$
-2\nu_2[G*u_t](x,t)u_t(x,t) \leqslant 2|\nu_2|\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2, \tag{9.1.42}
$$

$$
\begin{aligned}
&2[G*f(u)](x,t)u_t(x,t) \leqslant 2a|[G*(F(u)^{\frac{1}{\rho}}|u|)](x,t)u_t(x,t)| + 2b|u_t(x,t)|\\
\leqslant& C_4 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2 + 2a\|G\|_q\|u(\cdot,t)\|_\infty\|u_t(\cdot,t)\|_\infty\|F(u(\cdot,t))\|_1^{\frac{1}{\rho}},
\end{aligned} \tag{9.1.43}
$$

其中 $\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{q}=1$. 利用式 (9.1.36) 及 $G \in L^q$, 由式 (9.1.43) 得

$$
2[G*f(u)](x,t)u_t(x,t) \leqslant C_4 + C_5(\|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2). \tag{9.1.44}
$$

把式 (9.1.41), 式 (9.1.42) 和式 (9.1.44) 代入式 (9.1.40) 得到

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u^2(x,t)+u_t^2(x,t)+2F(u(x,t))\right] - 2\nu_2 u_t^2(x,t) \leqslant C_4 + C_6(\|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2).
$$

上式对 t 积分, 并利用 Cauchy 不等式, 可知

$$
\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2 + 2\|F(u(\cdot,t))\|_\infty - 2\nu_2\int_0^t u_\tau^2(x,\tau)\mathrm{d}\tau\\
\leqslant&\|u_0\|_\infty^2 + \|u_1\|_\infty^2 + 2\|F(u_0)\|_\infty + C_7(T)\\
&+ C_6\int_0^t \left[\|u(\cdot,\tau)\|_\infty^2 + \|u_\tau(\cdot,\tau)\|_\infty^2\right]\mathrm{d}\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.
\end{aligned}
$$

这里和之后的 $C_i(T)$ $(i=7,8,\cdots)$ 是依赖于 T 的常数. 由 Gronwall 不等式得

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|F(u(\cdot,t))\|_\infty-2\nu_2\int_0^t u_\tau^2(x,\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant C_8(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{9.1.45}$$

利用 Minkowski 积分不等式和引理 9.1.2 和引理 9.1.4, 由式 (9.1.20) 得

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant&\|u_0\|_{H^s}+(1+2|\nu_2|)(\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^s})T+\big\{2|\nu_2|\\&+\left[2+2C_1(C_3M+C_3)\right]\big\}T\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{9.1.46}$$

Gronwall 不等式推出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C_8(T),\quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{9.1.47}$$

方程 (9.1.20) 对 t 求导, 有

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&u_1(x)-\nu_2u_0(x)+[G*(\nu_2u_0)](x)\\&-\int_0^t u(x,\tau)\mathrm{d}\tau+\nu_2u(x,t)-\int_0^t f(u(x,\tau))\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(G*u)(x,\tau)\mathrm{d}\tau-\nu_2[G*u](x,t)\\&+\int_0^t(G*f(u))(x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{9.1.48}$$

从式 (9.1.47) 和式 (9.1.48) 得

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C_9(T),\quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{9.1.49}$$

式 (9.1.47) 和式 (9.1.49) 表明式 (9.1.32) 成立. □

注 9.1.2 在定理 9.1.3 的条件下, 若 $s>2+\dfrac{N}{2}$, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一的古典解 $u\in C^2([0,\infty);C_B^2(\mathbb{R}^N))$, 其中 $C_B^2(\mathbb{R}^N)$ 是由所有在 $\mathbb{R}^N$ 上有界的 $C^2(\mathbb{R}^N)$ 中的函数组成.

3. 解的爆破

在本节中将应用凸性引理研究 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 解的爆破. 为了证明凸性引理, 先证以下引理.

引理 9.1.7[82] 若

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-q(t)u>0,\quad t\geqslant 0,$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-q(t)v=0,\quad t\geqslant 0,$

(3) $q(t) \geqslant 0,\ t \geqslant 0$,

(4) $u(0) = v(0),\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(0)$,

那么对于 $t \geqslant 0,\ u > v$.

证明 式 (1) 减去式 (2) 有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}w + p(t)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - q(t)w > 0, \tag{9.1.50}$$

其中 $w = u - v$. 由式 (4) 得 $w(0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w(0) = 0$. 从而推出在某一开头的区间 $(0, t_0]$ 上 $w > 0$. 假定 w 可能变为负的, 致使 w 必须在某一点 t_1 有局部极大值. 在此点 w 应该 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w = 0,\ w > 0$, 所以由式 (9.1.50) 知 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}w > 0$. 这与假定 t_1 取局部极大值矛盾. □

引理 9.1.8 (凸性引理[83]) 设 $\phi(t)$ 是一正的, 二次连续可导的函数, 且在 $t \geqslant 0$ 上满足不等式

$$\ddot{\phi}(t)\phi(t) - (\beta+1)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant -2A_1\phi(t)\dot{\phi}(t) - A_2\phi(t)^2, \tag{9.1.51}$$

其中 $\beta > 0,\ A_1, A_2 \geqslant 0$ 为常数.

(1) 若 $A_1 = A_2 = 0,\ \phi(0) > 0$, 和 $\dot{\phi}(0) > 0$, 则存在 $t_1 \leqslant t_2 = \dfrac{\phi(0)}{\beta\dot{\phi}(0)}$, 使得当 $t \to t_1$ 时, $\phi(t) \to \infty$.

(2) 若 $A_1 + A_2 > 0,\ \phi(0) > 0$ 和 $\dot{\phi}(0) > -\gamma_2\beta^{-1}\phi(0)$, 则当 $t \to t_1 \leqslant t_2$ 时, $\phi(t) \to \infty$, 其中 $\gamma_{1,2} = -A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + \beta A_2}$, $t_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{A_1^2+\beta A_2}} \ln \dfrac{\gamma_1\phi(0) + \beta\dot{\phi}(0)}{\gamma_2\phi(0) + \beta\dot{\phi}(0)}$.

证明 令

$$F(t) = \phi^{-\beta}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{9.1.52}$$

由式 (9.1.52) 得

$$\dot{F}(t) = -\beta\phi^{-(\beta+1)}(t)\dot{\phi}(t),$$

$$\begin{aligned}\ddot{F}(t) =& \beta(\beta+1)\phi^{-(\beta+2)}(t)\dot{\phi}(t)^2 - \beta\phi^{-(\beta+1)}(t)\ddot{\phi}(t)\\ =& \beta\phi^{-(\beta+2)}(t)[(\beta+1)\dot{\phi}(t)^2 - \phi(t)\ddot{\phi}(t)]\\ \leqslant& 2\beta A_1\phi^{-(\beta+1)}(t)\dot{\phi}(t) + \beta A_2\phi^{-\beta}(t)\\ =& -2A_1\dot{F}(t) + \beta A_2 F(t),\end{aligned}$$

即

$$\ddot{F}(t) + 2A_1\dot{F}(t) - \beta A_2 F(t) \leqslant 0. \tag{9.1.53}$$

(1) 如果 $A_1 = A_2 = 0$, 则由式 (9.1.53) 导出

$$\ddot{F}(t) \leqslant 0.$$

上式对 t 积分, 得

$$\dot{F}(t) \leqslant \dot{F}(0),$$

再对 t 积分有

$$F(t) \leqslant \dot{F}(0)t + F(0) = \phi^{-\beta}(0) - \beta t\phi^{-(\beta+1)}(0)\dot{\phi}(0).$$

因此有

$$\phi^{-\beta}(t) \leqslant \phi^{-\beta}(0) - \beta t\phi^{-(\beta+1)}(0)\dot{\phi}(0).$$

于是

$$\phi^{\beta}(t) \geqslant \frac{\phi^{\beta+1}(0)}{\phi(0) - \beta t\dot{\phi}(0)}.$$

所以当 $t \to t_1 \leqslant \dfrac{\phi(0)}{\beta\dot{\phi}(0)}$ 时, $\phi(t) \to \infty$.

(2) 若 $A_1 + A_2 > 0$. 考虑下列诸式

$$\ddot{F}(t) + 2A_1\dot{F}(t) - \beta A_2 F(t) \leqslant 0, \tag{9.1.54}$$

$$\ddot{F}_1(t) + 2A_1\dot{F}_1(t) - \beta A_2 F_1(t) = 0, \tag{9.1.55}$$

$$F_1(0) = \phi^{-\beta}(0), \quad \dot{F}_1(0) = -\beta\phi^{-(\beta+1)}(0)\dot{\phi}(0). \tag{9.1.56}$$

令 $F_1(t) = \mathrm{e}^{\gamma t}$, 解 Cauchy 问题 (9.1.55), (9.1.56), 得

$$F_1(t) = \frac{\dot{F}_1(0) - \gamma_2 F_1(0)}{\gamma_1 - \gamma_2}\mathrm{e}^{\gamma_1 t} + \frac{\gamma_1 F_1(0) - \dot{F}_1(0)}{\gamma_1 - \gamma_2}\mathrm{e}^{\gamma_2 t}.$$

根据引理 9.1.7 可知

$$F(t) \leqslant \frac{\dot{F}_1(0) - \gamma_2 F_1(0)}{\gamma_1 - \gamma_2}\mathrm{e}^{\gamma_1 t} + \frac{\gamma_1 F_1(0) - \dot{F}_1(0)}{\gamma_1 - \gamma_2}\mathrm{e}^{\gamma_2 t}. \tag{9.1.57}$$

由式 (9.1.52) 和式 (9.1.57) 推出

$$\phi^{\beta}(t) \geqslant \frac{1}{\dfrac{\gamma_1 F_1(0) - \dot{F}_1(0)}{\gamma_1 - \gamma_2}\mathrm{e}^{\gamma_2 t}\left[1 - \dfrac{\gamma_2 F_1(0) - \dot{F}_1(0)}{\gamma_1 F_1(0) - \dot{F}_1(0)}\mathrm{e}^{(\gamma_1 - \gamma_2)t}\right]}. \tag{9.1.58}$$

注意到

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\sqrt{A_1^2 + \beta A_2},$$

$$\gamma_2 F_1(0) - \dot{F}_1(0) = \phi^{-(\beta+1)}(0)[\gamma_2\phi(0) + \beta\dot{\phi}(0)],$$

$$\gamma_1 F_1(0) - \dot{F}_1(0) = \phi^{-(\beta+1)}(0)[\gamma_1\phi(0) + \beta\dot{\phi}(0)].$$

由式 (9.1.58) 发现, 当 $t \to t_1 \leqslant t_2$ 时, $\phi(t) \to \infty$, 其中

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{A_1^2 + \beta A_2}} \ln \frac{\gamma_1\phi(0) + \beta\dot{\phi}(0)}{\gamma_2\phi(0) + \beta\dot{\phi}(0)}. \qquad \square$$

定理 9.1.4　设 $u_0, u_1 \in L^2$, $F(u_0) \in L^1$, $\Lambda^{-1}u_0, \Lambda^{-1}u_1 \in L^2$ 且存在一个常数 $\gamma > 0$, 使得

$$f(y)y \leqslant 2\gamma y^2 + \big(2 + 4\gamma + |\nu_2|\big)F(y), \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \tag{9.1.59}$$

则在下列条件之一成立时, Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解 $u(x,t) \in C^2([0,T_0); H^s)$ $\left(s > \dfrac{N}{2}\right)$ 或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破:

(1) $E(0) < 0$;

(2) $E(0) = 0, (\Lambda^{-1}u_1, \Lambda^{-1}u_0) + (u_1, u_0) > 0$;

(3) $E(0) > 0$, $(\Lambda^{-1}u_1, \Lambda^{-1}u_0) + (u_1, u_0) > \sqrt{\dfrac{2+4\gamma+|\nu_2|}{2+4\gamma} E(0)[\|\Lambda^{-1}u_0\|^2 + \|u_0\|^2]}$.

证明　假设 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 解存在的最大时间区间是无穷. 令

$$\phi(t) = \|\Lambda^{-1}u\|^2 + \|u\|^2 + \beta_0(t + t_0)^2, \tag{9.1.60}$$

其中 β_0 和 t_0 是待定的非负常数. 利用离散型 Hölder 不等式, 得到

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) =& 2(\Lambda^{-1}u_t, \Lambda^{-1}u) + 2(u_t, u) + 2\beta_0(t + t_0)\\ \leqslant& 2[\|\Lambda^{-1}u_t\|\|\Lambda^{-1}u\| + \|u_t\|\|u\| + \beta_0(t + t_0)]\\ \leqslant& 2\phi(t)^{\frac{1}{2}}\left[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{9.1.61}$$

从式 (9.1.61) 可知

$$\dot{\phi}(t)^2 \leqslant 4\phi(t)\big[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0\big]. \tag{9.1.62}$$

式 (9.1.60) 对 t 求导两次, 有

$$\ddot{\phi}(t) = 2\big[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0 + (\Lambda^{-2}u_{tt} + u_{tt}, u)\big]. \tag{9.1.63}$$

从式 (9.1.60), 式 (9.1.62), 式 (9.1.63), 式 (9.1.37), 式 (9.1.36) 和式 (9.1.59) 得

$$\begin{aligned}
\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\gamma)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant&\phi(t)\Big\{2\big[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u_t\|^2+\beta_0+(\Lambda^{-2}u_{tt}+u_{tt},u)\big]\\
&-4(1+\gamma)\big[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u_t\|^2+\beta_0\big]\Big\}\\
=&-\phi(t)\Bigg\{(2+4\gamma)(E(0)+\beta_0)+2(u-\nu_2u_t+f(u),u)\\
&-(2+4\gamma)\bigg(\|u\|^2+2\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\mathrm{d}x-2\nu_2\int_0^t\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\bigg)\Bigg\}\\
\geqslant&-\phi(t)(2+4\gamma)(E(0)+\beta_0)-\phi(t)|\nu_2|(\|u\|^2+\|u_t\|^2)\\
&+2\phi(t)\int_{\mathbb{R}^N}\big(-f(u)u+2\gamma u^2+(2+4\gamma)F(u)\big)\mathrm{d}x\\
\geqslant&-\phi(t)(2+4\gamma)(E(0)+\beta_0)-\phi(t)|\nu_2|E(0)\\
&+2\phi(t)|\nu_2|\Big(\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\mathrm{d}x-\nu_2\int_0^t\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\Big)\\
&+2\phi(t)\int_{\mathbb{R}^N}\big(-f(u)u+2\gamma u^2+(2+4\gamma)F(u)\big)\mathrm{d}x\\
\geqslant&-\phi(t)\big\{(2+4\gamma+|\nu_2|)E(0)+(2+4\gamma)\beta_0\big\}\\
&+2\phi(t)\int_{\mathbb{R}^N}\big(-f(u)u+2\gamma u^2+(2+4\gamma+|\nu_2|)F(u)\big)\mathrm{d}x\\
\geqslant&-\phi(t)\big\{(2+4\gamma+|\nu_2|)E(0)+(2+4\gamma)\beta_0\big\}. \qquad (9.1.64)
\end{aligned}$$

如果 $E(0)<0$, 取 $\beta_0=-\dfrac{(2+4\gamma+|\nu_2|)E(0)}{2+4\gamma}$, 推得

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\gamma)\dot{\phi}(t)^2\geqslant 0.$$

由于当 t_0 充分大时, $\phi(0)>0$ 和 $\dot{\phi}(0)>0$. 由引理 9.1.4 知, 存在 $t_1\leqslant t_2=\dfrac{\phi(0)}{\gamma\dot{\phi}(0)}$, 使得 $\lim\limits_{t\to t_1^-}\phi(t)=\infty$.

如果 $E(0)=0$, 取 $\beta_0=0$, 式 (9.1.64) 变为

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\gamma)\dot{\phi}(t)^2\geqslant 0.$$

类似于情形 $E(0)<0$, 存在 $t_1\leqslant t_2=\dfrac{\phi(0)}{\gamma\dot{\phi}(0)}$, 使得 $\lim\limits_{t\to t_1^-}\phi(t)=\infty$.

如果 $E(0)>0$, 取 $\beta_0=0$, 式 (9.1.64) 变为

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\gamma)\dot{\phi}(t)^2\geqslant-\phi(t)(2+4\gamma+|\nu_2|)E(0).$$

定义

$$J(t)=\phi^{-\gamma}(t),$$

则

$$\dot{J}(t) = -\gamma\phi^{-\gamma-1}(t)\dot{\phi}(t),$$

$$\begin{aligned}\ddot{J}(t) =&\gamma(\gamma+1)\phi^{-\gamma-2}(t)\dot{\phi}(t)^2 - \gamma\phi^{-\gamma-1}(t)\ddot{\phi}(t)\\ =&-\gamma\phi^{-\gamma-2}(t)\{\phi(t)\ddot{\phi}(t) - (1+\gamma)\dot{\phi}(t)^2\}\\ \leqslant&\gamma[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)\phi^{-\gamma-1}(t).\end{aligned} \tag{9.1.65}$$

由假设 (3), 可见 $\dot{J}(0) < 0$. 令

$$t^* = \sup\big\{\tau|\dot{J}(\tau) < 0, \tau \in [0,t)\big\}.$$

由 $\dot{J}(t)$ 的连续性知, t^* 是正的. 式 (9.1.65) 两端同乘以 $2\dot{J}(t)$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{J}(t)^2] \geqslant& -2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)\phi(t)^{-2\gamma-2}\dot{\phi}(t)\\ =&\frac{2\gamma^2(2+4\gamma+|\nu_2|)}{2\gamma+1}E(0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\phi^{-2\gamma-1}(t)], \quad \forall\, t\in[0,t^*).\end{aligned} \tag{9.1.66}$$

式 (9.1.66) 在 $[0,t)$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}\dot{J}(t)^2 \geqslant& \dot{J}(0)^2 + \frac{2\gamma^2(2+4\gamma+|\nu_2|)}{2\gamma+1}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(t)\\ &- \frac{2\gamma^2(2+4\gamma+|\nu_2|)}{2\gamma+1}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0).\end{aligned}$$

由假设 (3), 有

$$\dot{J}(0)^2 - \frac{2\gamma^2(2+4\gamma+|\nu_2|)}{2\gamma+1}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0) > 0.$$

因此, 由 $\dot{J}(t)$ 的连续性, 可知对于 $0\leqslant t<t^*$,

$$\dot{J}(t) \leqslant -\Big[\dot{J}(0)^2 - \frac{2\gamma^2(2+4\gamma+|\nu_2|)}{2\gamma+1}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{9.1.67}$$

由 t^* 的定义知, 对于所有的 $t\geqslant 0$ 式 (9.1.67) 成立. 式 (9.1.67) 对 t 积分, 得到

$$J(t) \leqslant J(0) - \Big[\dot{J}(0)^2 - \frac{2\gamma^2(2+4\gamma+|\nu_2|)}{2\gamma+1}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)\Big]^{\frac{1}{2}}t, \quad \forall\, t>0,$$

则对某个 t_1, $J(t_1)=0$ 和 $0<t_1\leqslant t_2=\dfrac{J(0)}{\Big[\dot{J}(0)^2-\dfrac{2\gamma^2(2+4\gamma+|\nu_2|)}{2\gamma+1}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)\Big]^{\frac{1}{2}}}$.

这样, $\phi(t)$ 在 t_1 时刻变为无穷.

因此, 在条件 (1), 条件 (2) 或条件 (3) 下, $\phi(t)$ 在 t_1 时刻总是变为无穷. 这与解存在的最大时间为无穷矛盾. 这样, 解存在的最大时间是有限的. □

9.2 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 在 $C^3([0,\infty);W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$ 中的整体解的存在唯一性和解的爆破

本节采用记号: $W^{m,p}$ 表示在 $\mathbb{R}^N$ 上赋予范数 $\|v\|_{m,p}=\sum\limits_{k=0}^{m}\|D^kv\|_p$ 的索伯列夫空间, 其中 $\|D^kv\|_p=\sum\limits_{|\alpha|=k}\|D^kv\|_p$, m 是一正整数,$1\leqslant p\leqslant\infty$ 和

$$D^kv=\left\{\frac{\partial^{|\alpha|}v}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}\bigg||\alpha|=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=k,\ \alpha_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,N)\right\}.$$

1. *局部解*

为了利用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一的局部解, 需要引入下面有用的引理.

引理 9.2.1[84] 设

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q},\quad 1\leqslant p,\ q,\ r\leqslant\infty \tag{9.2.1}$$

成立及式 (9.2.2) 中右端出现的所有范数都有界, 则对任意的整数 $m\geqslant 0$ 成立

$$\|D^m(vw)\|_r\leqslant K_1(m)(\|v\|_p\|D^mw\|_q+\|D^mv\|_q\|w\|_p), \tag{9.2.2}$$

其中 $K_1(m)$ 是一依赖于 m 的正常数.

推论 9.2.1[84] 在式 (9.2.1) 的假设下, 若下面不等式右端出现的所有范数都有界, 则对任意的整数 $m\geqslant 0$, 有

$$\|vw\|_{m,r}\leqslant K_2(m)(\|v\|_p\ \|w\|_{m,q}+\|v\|_{m,q}\|w\|_p), \tag{9.2.3}$$

其中 $K_2(m)$ 是一依赖于 m 的正常数.

引理 9.2.2[84] 设 $\Phi(w)$ 是 w 的一充分光滑的函数, 且满足

$$\Phi(0)=0. \tag{9.2.4}$$

对任意给定的整数 $m\geqslant 0$, 若函数 w 满足

$$w(x)\in W^{m,p},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty$$

和

$$\|w\|_\infty \leqslant M_2,$$

其中 M_2 是一个正常数, 则复合函数

$$\Phi(w) \in W^{m,p} \tag{9.2.5}$$

和

$$\|\Phi(w)\|_{m,p} \leqslant K_3(M_2)\|w\|_{m,p}, \tag{9.2.6}$$

其中 $K_3(M_2)$ 是一依赖于 M_2 的正常数 (注意当 $m \geqslant 1$ 时, 不需要满足条件 (9.2.4)).

现在, 利用二阶偏微分算子的基本解 $G(x)$ (见引理 9.1.1) 把 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 化为积分方程.

由式 (9.1.18) 和式 (9.1.3), 将 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 形式地写成积分方程

$$\begin{aligned} u(x,t) =& u_0(x)(\cos t - \nu_2 \sin t) + u_1(x)\sin t + \sin t[G*(\nu_2 u_0)](x) \\ &+ \nu_2 \int_0^t \cos(t-\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}\tau - \int_0^t \sin(t-\tau) f(u(x,\tau))\mathrm{d}\tau \\ &- \int_0^t \cos(t-\tau)[G*(\nu_2 u)](x,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \sin(t-\tau)[G*(u+f(u))](x,\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

类似于定义 9.1.2, 我们给出下面的定义.

定义 9.2.1 对任意的 $T>0$, 如果 $u_0, u_1 \in W^{m,p}\bigcap L^\infty \bigcap L^2$ 和 $u \in C([0,T]; W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$ $(m \geqslant 0)$ 满足积分方程 (9.2.7), 其中 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (9.2.7) 的连续解或者 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解. 如果 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的局部广义解. 如果 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的整体广义解.

下面通过压缩映射原理证明积分方程 (9.2.7) 存在唯一局部连续解. 定义函数空间

$$Y(T) = C([0,T]; W^{m,p}\textstyle\bigcap L^\infty \bigcap L^2) \quad (m \geqslant 0),$$

并赋予范数

$$\|u\|_{Y(T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{m,p} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_\infty + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|.$$

易知 $Y(T)$ 是一个 Banach 空间.

定义映射 $S:Y(T)\to Y(T)$ 为

$$\begin{aligned}Sw(x,t)=&u_0(x)(\cos t-\nu_2\sin t)+u_1(x)\sin t+\sin t[G*(\nu_2u_0)](x)\\&+\nu_2\int_0^t\cos(t-\tau)w(x,\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t\sin(t-\tau)f(w(x,\tau))\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t\cos(t-\tau)[G*(\nu_2w)](x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\sin(t-\tau)[G*(w+f(w))](x,\tau)\mathrm{d}\tau,\quad\forall w\in Y(T).\end{aligned}\tag{9.2.8}$$

显然, 由引理 9.2.2 易知如果 $f\in C^{m+1}(\mathbb{R})$ $(m\geqslant 0)$, $f(0)=0$, 则 S 的定义是合理的.

对于任意初值函数 u_0, $u_1\in W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2$, 令 $A=(1+2|\nu_2|)(\|u_0\|_{m,p}+\|u_0\|_\infty+\|u_0\|)+\|u_1\|_{m,p}+\|u_1\|_\infty+\|u_1\|$. 定义集合

$$Q(A,T)=\big\{w|w\in Y(T),\|w\|_{Y(T)}\leqslant A+1\big\}.\tag{9.2.9}$$

显然, 对每一个 $A,T>0$, $Q(A,T)$ 是 $Y(T)$ 的一个非空闭凸子集. 现在证明 S 在 $Q(A,T)$ 中存在唯一不动点.

引理 9.2.3 设 u_0, $u_1\in W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2$, $f\in C^{m+1}(\mathbb{R})$ $(m\geqslant 0)$ 和 $f(0)=0$. 如果 T 相对于 A 适当小, 则映射 $S:Q(A,T)\mapsto Q(A,T)$ 是严格压缩的.

证明 设 $w\in Q(A,T)$. 利用 Minkowski 积分不等式, 引理 9.2.2 和 Young 不等式, 由式 (9.2.8) 得

$$\begin{aligned}\|Sw(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant&(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p}+\|u_1\|_{m,p}\\&+\big(1+2|\nu_2|+2K_3(A+1)\big)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(\cdot,t)\|_{m,p},\end{aligned}\tag{9.2.10}$$

$$\begin{aligned}\|Sw(\cdot,t)\|_\infty\leqslant&(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_\infty+\|u_1\|_\infty\\&+\big(1+2|\nu_2|+2K_3(A+1)\big)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(\cdot,t)\|_\infty.\end{aligned}\tag{9.2.11}$$

和

$$\begin{aligned}\|Sw(\cdot,t)\|\leqslant&(1+2|\nu_2|)\|u_0\|+\|u_1\|\\&+\big(1+2|\nu_2|+2K_3(A+1)\big)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(\cdot,t)\|,\end{aligned}\tag{9.2.12}$$

其中 $K_3(A+1)$ 表示 K_3 是依赖于 $A+1$ 的常数和 K_3 出现在引理 9.2.2. 这样, 由式 (9.2.10)~ 式 (9.2.12) 可见

$$\begin{aligned}\|Sw(\cdot,t)\|_{Y(T)}\leqslant&A+\big(1+2|\nu_2|+2K_3(A+1)\big)T\|w(\cdot,t)\|_{Y(T)}\\\leqslant&A+\big(1+2|\nu_2|+2K_3(A+1)\big)(A+1)T.\end{aligned}\tag{9.2.13}$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \left\{(1+2|\nu_2|+2K_3(A+1))(A+1)\right\}^{-1}, \tag{9.2.14}$$

则 $\|Sw\|_{Y(T)} \leqslant A+1$. 如果式 (9.2.14) 成立, 则 S 映 $Q(A,T)$ 到 $Q(A,T)$.

下一步, 证明映射 S 是严格压缩的. 设 $T>0$ 及 w_1, $w_2 \in Q(A,T)$ 是给定的, 则

$$\begin{aligned}
&Sw_1(x,t)-Sw_2(x,t)\\
=&\nu_2\int_0^t \cos(t-\tau)[w_1(x,\tau)-w_2(x,\tau)]\mathrm{d}\tau\\
&-\int_0^t \sin(t-\tau)[f(w_1(x,\tau))-f(w_2(x,\tau))]\mathrm{d}\tau\\
&-\int_0^t \cos(t-\tau)[G*(\nu_2 w_1-\nu_2 w_2)](x,\tau)\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t \sin(t-\tau)[G*(w_1-w_2+f(w_1)-f(w_2))](x,\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{9.2.15}$$

应用 Minkowski 积分不等式和式 (9.2.15), 得到

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sw_1(\cdot,t)-Sw_2(\cdot,t)\|_\infty\\
\leqslant&(1+2|\nu_2|)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_\infty+2T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(w_1(\cdot,t))-f(w_2(\cdot,t))\|_\infty.
\end{aligned} \tag{9.2.16}$$

应用 Minkowski 积分不等式和推论 9.2.1, 有

$$\begin{aligned}
&\|f(w_1(\cdot,t))-f(w_2(\cdot,t))\|_\infty\\
=&\left\|\int_0^1 (w_1-w_2)f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\mathrm{d}\tau\right\|_\infty\\
\leqslant&\int_0^1 \|(w_1-w_2)f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\|_\infty\mathrm{d}\tau\\
\leqslant&2K_2(m)\int_0^1 \|(w_1-w_2)\|_\infty\|f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\|_\infty\mathrm{d}\tau\\
\leqslant&2K_2(m)\max_{|\eta|\leqslant A+1}|f'(\eta)|\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_\infty.
\end{aligned} \tag{9.2.17}$$

把式 (9.2.17) 代入式 (9.2.16), 可知

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sw_1(\cdot,t)-Sw_2(\cdot,t)\|_\infty\\
\leqslant&\big(1+2|\nu_2|+4K_2(m)\max_{|\eta|\leqslant A+1}|f'(\eta)|\big)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_\infty.
\end{aligned} \tag{9.2.18}$$

类似于式 (9.2.18), 从式 (9.2.15) 得

$$\begin{aligned}&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sw_1(\cdot,t)-Sw_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\ \leqslant&(1+2|\nu_2|)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\ &+2T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(w_1(\cdot,t))-f(w_2(\cdot,t))\|_{m,p}.\end{aligned}\tag{9.2.19}$$

利用 Minkowski 积分不等式, 推论 9.2.1 和引理 9.2.2, 导出

$$\begin{aligned}&\|f(w_1(\cdot,t))-f(w_2(\cdot,t))\|_{m,p}\\ =&\Big\|\int_0^1(w_1-w_2)f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\mathrm{d}\tau\Big\|_{m,p}\\ \leqslant&\int_0^1\|(w_1-w_2)f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\|_{m,p}\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&K_2(m)\int_0^1\Big\{\|w_1-w_2\|_{m,p}\|f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\|_\infty\\ &+\|w_1-w_2\|_\infty\|f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\|_{m,p}\Big\}\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&K_2(m)K_3(A+1)\int_0^1\Big\{\|w_1-w_2\|_{m,p}\|f'(w_2+\tau(w_1-w_2))\|_\infty\\ &+\|w_1-w_2\|_\infty\|w_2+\tau(w_1-w_2)\|_{m,p}\Big\}\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&K_4(m,A+1)\Big\{\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_{m,p}+\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_\infty\Big\}.\end{aligned}\tag{9.2.20}$$

把式 (9.2.20) 代入式 (9.2.19), 有

$$\begin{aligned}&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sw_1(\cdot,t)-Sw_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\ \leqslant&\big(1+2|\nu_2|+2K_4(m,A+1)\big)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\ &+2K_4(m,A+1)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_\infty.\end{aligned}\tag{9.2.21}$$

类似于式 (9.2.21) 得

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sw_1(\cdot,t)-Sw_2(\cdot,t)\|\leqslant&\big(1+2|\nu_2|+2K_4(m,A+1)\big)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|\\ &+2K_4(m,A+1)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_\infty.\end{aligned}\tag{9.2.22}$$

由式 (9.2.18), 式 (9.2.21) 和式 (9.2.22) 推出

$$\begin{aligned}&\|Sw_1-Sw_2\|_{Y(T)}\\ \leqslant&\Big\{1+2|\nu_2|+4K_2(m)\max_{|\eta|\leqslant A+1}|f'(\eta)|+4K_4(m,A+1)\Big\}\\ &\times T\|w_1-w_2\|_{Y(T)}.\end{aligned}\tag{9.2.23}$$

如果 T 满足式 (9.2.14) 和

$$T \leqslant \frac{1}{2}\{1+2|\nu_2|+4K_2(m)\max_{|\eta|\leqslant A+1}|f'(\eta)|+4K_4(m,A+1)\}^{-1}, \tag{9.2.24}$$

则 $\|Sw_1-Sw_2\|_{Y(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|w_1-w_2\|_{Y(T)}$. □

定理 9.2.1　设 $u_0, u_1 \in W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2$, $f\in C^{m+1}(\mathbb{R})$ $(m\geqslant 0)$ 和 $f(0)=0$, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一的局部广义解 $u\in C([0,T_0);W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 而且, 如果

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T_0)}\Big(&\|u(\cdot,t)\|_{m,p}+\|u(\cdot,t)\|_\infty+\|u(\cdot,t)\|\\&+\|u_t(\cdot,t)\|_{m,p}+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty+\|u_t(\cdot,t)\|\Big)<\infty,\end{aligned} \tag{9.2.25}$$

则 $T_0=\infty$.

证明　从引理 9.2.3 和压缩映射原理可知, 对适当选择的 $T>0$, S 存在唯一的不动点 $u\in Q(A,T)$, 它显然是积分方程 (9.2.7) 的连续解. 对于每一个 $T'>0$, 类似于定理 9.1.2, 易证积分方程 (9.2.7) 至多存在一个解属于 $Y(T')$.

设 $[0,T_0)$ 是 $u\in Y(T_0)$ 的最大时间区间.

类似于定理 9.1.2, 可以证明如果式 (9.2.25) 成立, 则 $T_0=\infty$. □

注 9.2.1　如果 $u(x,t)\in C([0,T_0);W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$ $(m\geqslant 0)$ 是 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解, 从积分方程 (9.2.7) 和引理 9.2.2 推出 $u\in C^2([0,T_0); W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$ 和满足方程 (9.1.18).

2. 整体解

类似于引理 9.1.6, 可以证明下面的结论.

引理 9.2.4　设 u_0, $u_1\in L^2$, $f\in C(\mathbb{R})$, $F(u)=\int_0^u f(y)\mathrm{d}y$, $F(u_0)\in L^1$ 和 $\Lambda^{-1}u_1\in L^2$, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解 $u(x,t)\in C^2([0,T_0); W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)(m\geqslant 2)$ 满足下面的能量等式

$$\begin{aligned}E(t)=&\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(u(x,t))\mathrm{d}x\\&-2\nu_2\int_0^t\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau=E(0).\end{aligned} \tag{9.2.26}$$

定理 9.2.2　设下面的条件成立:

(1) $u_0,u_1\in W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2(m\geqslant 2)$, $\Lambda^{-1}u_1\in L^2$;

(2) $f\in C^{m+1}(\mathbb{R}), f(0)=0, F(u)\geqslant 0, F(u_0)\in L^1$ 和存在 ρ 满足

$$1\leqslant\rho\leqslant\infty,\quad 当\ N=1\ 时,$$

$$1<\rho\leqslant\infty,\quad 当\ N=2\ 时,$$
$$\frac{N}{2}<\rho\leqslant\infty,\quad 当\ N\geqslant 3\ 时,$$

使得

$$|f(u)|\leqslant aF(u)^{\frac{1}{\rho}}|u|+b,$$

其中 a 和 b 是正常数, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一整体广义解 $u\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$ 且 $\Lambda^{-1}u_t\in C([0,\infty);L^2)$.

证明 根据定理 9.2.1 只需证明式 (9.2.25) 成立. 利用与定理 9.1.3 相同的方法, 得到

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|F(u(\cdot,t))\|_\infty-2\nu_2\int_0^t u_\tau^2(x,\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant K_5(T),\quad \forall\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{9.2.27}$$

其中 $K_5(T)$ 是依赖于 T 的常数.

应用 Minkowski 积分不等式, 引理 9.2.2 和式 (9.2.27), 从式 (9.2.7) 推出

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant&(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p}+\|u_1\|_{m,p}\\&+(1+2|\nu_2|)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}\mathrm{d}\tau+2\int_0^t\|f(u(\cdot,\tau))\|_{m,p}\mathrm{d}\tau\\\leqslant&(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p}+\|u_1\|_{m,p}\\&+\left[1+2|\nu_2|+2K_3(\sqrt{K_5(T)})\right]\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9.2.28}$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|u(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant K_6(T),\quad \forall\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{9.2.29}$$

类似于式 (9.2.29) 可知

$$\|u(\cdot,t)\|\leqslant K_7(T),\quad \forall\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{9.2.30}$$

式 (9.2.7) 对 t 求导, 有

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&u_0(x)(-\sin t-\nu_2\cos t)+u_1(x)\cos t+\cos t[G*(\nu_2u_0)](x)\\&+\nu_2u(x,t)-\nu_2\int_0^t\sin(t-\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t\cos(t-\tau)f(u(x,\tau))\mathrm{d}\tau\\&-[G*(\nu_2u)](x,t)+\int_0^t\sin(t-\tau)[G*(\nu_2u)](x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\cos(t-\tau)[G*(u+f(u))](x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9.2.31}$$

利用 Minkowski 积分不等式, 引理 9.2.2 和式 (9.2.27) 推出

$$\begin{aligned}\|u_t(\cdot,t)\|_{m,p} \leqslant &(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p}+\|u_1\|_{m,p}+2|\nu_2|\|u(\cdot,t)\|_{m,p}\\ &+\left(1+2|\nu_2|+2K_3(\sqrt{K_5(T)})\right)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}\mathrm{d}\tau\\ \leqslant &K_8(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned} \tag{9.2.32}$$

类似地, 有

$$\|u_t(\cdot,t)\|\leqslant K_9(T),\quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant T. \tag{9.2.33}$$

从式 (9.2.27), 式 (9.2.29), 式 (9.2.30), 式 (9.2.32) 和式 (9.2.33) 导出式 (9.2.25) 成立.

显然, 从式 (9.2.26) 得 $\Lambda^{-1}u_t\in C([0,\infty);L^2)$.

式 (9.1.18) 对 t 求导, 得

$$u_{ttt}+u_t-\nu_2u_{tt}+\partial_t f(u)=G*\partial_t[u-\nu_2u_t+f(u)], \tag{9.2.34}$$

其中 $\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$. 由引理 9.2.2 和基本解 $G(x)$ 的性质我们知道 $u_{ttt}\in C([0,\infty);W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$. □

为了证明 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的整体古典解的存在性, 下面研究 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 整体广义解的正则性.

引理 9.2.5 设定理 9.2.2 的条件成立, $f\in C^{k+m+1}(\mathbb{R})$, 其中 $k\geqslant 0$ 和 $m\geqslant 2$ 是任意整数, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解 $u(x,t)$ 属于 $C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$ $(\forall\, T>0)$, $0\leqslant l\leqslant m$.

证明 我们应用数学归纳法证明 $u\in C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$. 当 $k=0$ 时, 由定理 9.2.2 可知 $u\in C^3([0,T];W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$. 假设

$$u\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2),\quad 0\leqslant k<s. \tag{9.2.35}$$

当 $k=s$ 时, 式 (9.2.34) 对 t 求导 s 次, 得到

$$\begin{aligned}u_{t^{s+3}}=&-u_{t^{s+1}}+\nu_2u_{t^{s+2}}-\partial_{t^{s+1}}f(u)+G*\partial_{t^{s+1}}[u-\nu_2u_t+f(u)]\\ =&-u_{t^{s+1}}+\nu_2u_{t^{s+2}}-\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\left(\frac{\partial_t u}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial_{t^{s+1}}u}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}}\\ &\times f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{s+1})}(u)+G*u_{t^{s+1}}-\nu_2G*u_{t^{s+2}}\\ &+G*\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\left(\frac{\partial_t u}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial_{t^{s+1}}u}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}}\\ &\times f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{s+1})}(u),\end{aligned} \tag{9.2.36}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{s+1}=\rho$, $i_1+2i_2+\cdots+(s+1)i_{s+1}=s+1$, $i_j(j=1,\cdots,s+1)$ 是非负整数. 利用推论 9.2.1 和引理 9.2.2 以及式 (9.2.35), 从式 (9.2.36) 得到 $u\in C^{s+3}([0,T];W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$.

从上面的证明, 得知 $u\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$, $\forall\ k\geqslant 0$, $m\geqslant 2$. 现在, 证明

$$u\in C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2),\quad 0\leqslant l\leqslant m. \tag{9.2.37}$$

式 (9.2.34) 对 t 求导 $(k+1)$ 次, 得到

$$\begin{aligned}
u_{t^{k+4}}=&-u_{t^{k+2}}+\nu_2u_{t^{k+3}}-\partial_{t^{k+2}}f(u)+G*\partial_{t^{k+2}}[u-\nu_2u_t+f(u)]\\
=&-u_{t^{k+2}}+\nu_2u_{t^{k+3}}-\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{\partial_tu}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial_{t^{k+2}}u}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}\\
&\times f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{k+2})}(u)+G*u_{t^{k+2}}-\nu_2G*u_{t^{k+3}}\\
&+G*\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{\partial_tu}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial_{t^{k+2}}u}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}\\
&\times f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{k+2})}(u),
\end{aligned}\tag{9.2.38}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{k+2}=\rho$, $i_1+2i_2+\cdots+(k+2)i_{k+2}=k+2$, $i_j(j=1,\cdots,k+2)$ 是非负整数. 利用推论 9.2.1, 引理 9.2.2, 式 (9.2.38) 以及 $u\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$, 得 $u\in C^{k+4}([0,T];W^{m-1,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$.

式 (9.2.38) 对 t 求导, 得到 $u\in C^{k+5}([0,T];W^{m-2,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$. 重复这个过程 $m-2$ 次, 可以得到式 (9.2.37). □

定理 9.2.3 设引理 9.2.5 的条件成立和 $k=0$, $l=0$, $m>2+\dfrac{N}{p}$, 则问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$, 即 $u\in C^3([0,\infty);C^2(\mathbb{R}^N)\bigcap L^\infty\bigcap L^2)$.

3. 解的爆破

利用与定理 9.1.4 同样的方法, 我们可以证明下面的结论.

定理 9.2.4 设 u_0, $u_1\in L^2$, $F(u_0)\in L^1$, $\Lambda^{-1}u_0$, $\Lambda^{-1}u_1\in L^2$ 和存在常数 $\gamma>0$, 使得

$$f(y)y\leqslant 2\gamma y^2+(2+4\gamma+|\nu_2|)F(y),\quad \forall\ y\in\mathbb{R}. \tag{9.2.39}$$

如果下列条件之一成立, 则 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的广义解 $u(x,t)\in C^2([0,T_0);W^{m,p}\bigcap L^\infty\bigcap L^2)(m\geqslant 0)$ 或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻发生爆破:

(1) $E(0)<0$,

(2) $E(0)=0,(\Lambda^{-1}u_1,\Lambda^{-1}u_0)+(u_1,u_0)>0$,

(3) $E(0)>0$, $(\Lambda^{-1}u_1,\Lambda^{-1}u_0)+(u_1,u_0)>\sqrt{\dfrac{2+4\gamma+|\nu_2|}{2+4\gamma}E(0)[\|\Lambda^{-1}u_0\|^2+\|u_0\|^2]}$.

9.3 具 Stokes 阻尼项的 IMBq 方程的 Cauchy 问题

9.2 节研究了具流体动力学阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题. 本节讨论具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题[79]

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\nu_0 u_t=f(u)_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{9.3.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{9.3.2}$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $\nu_0>0$ 是常数, $f(s)$ 是给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数.

我们知道, 在研究具流体动力学阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 时, 应用二阶偏微分算子的基本解将此问题化为积分方程 (9.1.20). 为了通过积分方程 (9.1.20) 证明 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解, 得到了一必要的能量等式 (9.1.36). 显然, Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 当 $N=1$ 时也成立. 但是对于具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 利用研究 Cauchy 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的方法, 因为得不到类似于能量等式 (9.1.36) 的等式, 所以不能证明 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解.

下面我们应用下列辅助问题

$$v_{tt}-v_{xx}-v_{xxtt}+\nu_0 v_t=f(v_x)_x,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{9.3.3}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{9.3.4}$$

未知函数变换 $v_x(x,t)=u(x,t)$ 以及初值函数变换 $v_{0x}(x)=u_0(x)$ 和 $v_{1x}(x)=u_1(x)$ 证明 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解, 并给出解爆破的充分条件.

9.3.1 辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 整体解的存在性和唯一性

1. *局部解*

设 $v\in C^2([0,T];H^s)(s\geqslant 2)$ 是辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的广义解. 方程 (9.3.3) 可以改写为

$$\begin{aligned}v_{tt}(x,t)&=(I-\partial_x^2)^{-1}[v_{xx}(x,t)-\nu_0 v_t(x,t)+f(v_x(x,t))_x]\\&=G*[v_{xx}-\nu_0 v_t+f(v_x)_x](x,t),\end{aligned} \tag{9.3.5}$$

其中 $G(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ 是常微分算子 $L=w(x)-w_{xx}(x)$ 的基本解. 方程 (9.3.5) 对 t 积分两次, 并应用 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(G*h)=G*h-h$, 可知辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 与下列积分方程

$$\begin{aligned}v(x,t)=&v_0(x)+[\nu_0(G*v_0)(x)+v_1(x)]t\\&+\int_0^t(t-\tau)[(G*v)(x,\tau)-v(x,\tau)]\mathrm{d}\tau-\nu_0\int_0^t(G*v)(x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)[G*f(v_x)_x](x,\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{9.3.6}$$

等价.

定义 9.3.1 对于 $T>0$, 如果 $v\in C([0,T];H^s)$ $(s\geqslant 2)$ 满足积分方程 (9.3.6), 则 $v(x,t)$ 称为积分方程 (9.3.6) 的连续解或称为辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的广义解. 如果 $T<\infty$, 则 $v(x,t)$ 称为辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的局部广义解. 如果 $T=\infty$, 则 $v(x,t)$ 称为辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的整体广义解.

定义函数空间

$$X(T)=C([0,T];H^s)\quad(s\geqslant 2),$$

并赋予范数

$$\|v\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_{H^s},\quad\forall v\in X(T).$$

易知 $X(T)$ 是一 Banach 空间.

首先, 对于 $w\in X(T)$ 定义映射 S 如下:

$$\begin{aligned}Sw(x,t)=&v_0(x)+[\nu_0(G*v_0)(x)+v_1(x)]t\\&+\int_0^t(t-\tau)[(G*w)(x,\tau)-w(x,\tau)]\mathrm{d}\tau-\nu_0\int_0^t(G*w)(x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)[G*f(w_x)_x](x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9.3.7}$$

因为 $s\geqslant 2$, 由索伯列夫嵌入定理知, v, $v_x\in C([0,T];L^\infty)$ 和 $\|v(\cdot,t)\|_\infty$, $\|v_x(\cdot,t)\|_\infty\leqslant C_3\|v(\cdot,t)\|_{H^s}$, 其中 $C_3>0$ 是一常数. 则 S 映 $X(T)$ 到 $X(T)$.

其次, 对于 v_0, $v_1\in H^s$, 令 $\|v_0\|_{H^s}+\|v_1\|_{H^s}=M$. 定义集合

$$Q(M,T)=\{v|v\in X(T),\|v\|_{X(T)}\leqslant 2M+1\}.$$

显然, 对于每一对 $M,T>0$, $Q(M,T)$ 是 $X(T)$ 的一不空有界闭凸子集. 我们将证明 S 在 $Q(X,T)$ 中有唯一的不动点.

引理 9.3.1　设 $s \geqslant 2$, v_0 $v_1 \in H^s$, $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 和 $f(0)=0$, 则 S 映 $Q(M,T)$ 到 $Q(M,T)$, 且如果 T 相对于 M 适当小, $S: Q(M,T) \mapsto Q(M,T)$ 是严格压缩的.

证明　设 $w \in Q(M,T)$. 根据索伯列夫空间嵌入定理, 如果 $s \geqslant 2$,

$$H^s \hookrightarrow C_B^1(\mathbb{R}),$$

则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|w(\cdot,t)\|_\infty, \quad \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|w_x(\cdot,t)\|_\infty \leqslant 2M+1, \quad \forall w \in Q(M,T).$$

上面的 $C_B^1(\mathbb{R})$ 是由所有函数 $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, 且在 $\mathbb{R}$ 上 ϕ 和 ϕ_x 有界的函数组成. 由引理 9.1.2 和引理 9.1.4 推出

$$\|(G*w)(\cdot,t)\|_{H^s} = \|w(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \leqslant \|w(\cdot,t)\|_{H^s}, \tag{9.3.8}$$

$$\begin{aligned}\|(G*f(w_x)_x)(\cdot,t)\|_{H^s} =& \|f(w_x)_x\|_{H^{s-2}} \leqslant \|f(w_x)\|_{H^{s-1}} \\ \leqslant& C_1(2M+1)\|w_x\|_{H^{s-1}} \leqslant C_1(2M+1)\|w\|_{H^s}.\end{aligned} \tag{9.3.9}$$

由式 (9.3.7)~式 (9.3.9) 和 Minkowski 积分不等式, 有

$$\begin{aligned}\|Sw(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant& \|v_0\|_{H^s} + [\nu_0\|v_0\|_{H^s} + \|v_1\|_{H^s}]T \\ &+ 2\int_0^t (t-\tau)\|w(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau + \nu_0\int_0^t \|w(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau \\ &+ C_1(2M+1)\int_0^t (t-\tau)\|w(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{9.3.10}$$

式 (9.3.10) 给出

$$\|Sw\|_{X(T)} \leqslant M + \left[3\nu_0 + 1 + \frac{\nu_0}{M}\right]MT + \left[1 + \frac{1}{2}C_1(2M+1)\right](2M+1)T^2. \tag{9.3.11}$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \min\left\{\frac{1}{3\nu_0+1+\dfrac{\nu_0}{M}}, \frac{1}{\sqrt{\left[1+\dfrac{1}{2}C_1(2M+1)\right](2M+1)}}\right\}, \tag{9.3.12}$$

则 $\|Sw\|_{X(T)} \leqslant 2M+1$. 因此如果式 (9.3.12) 成立, 则 S 映 $Q(M,T)$ 到 $Q(M,T)$.

现在证明映射 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 w_1, $w_2 \in Q(M,T)$ 给定. 由式 (9.3.7) 得

$$\begin{aligned}Sw_1(x,t)-Sw_2(x,t)=&\int_0^t(t-\tau)\{[G*(w_1-w_2)](x,\tau)-[w_1(x,\tau)-w_2(x,\tau)]\}\mathrm{d}\tau\\&-\nu_0\int_0^t[G*(w_1-w_2)](x,\tau)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\{G*[f(w_{1x})_x-f(w_{2x})_x]\}(x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9.3.13}$$

应用引理 9.1.3 和引理 9.1.4 可知

$$\begin{aligned}\|[G*(f(w_{1x})_x-f(w_{2x})_x)](\cdot,t)\|_{H^s}&=\|f(w_{1x}(\cdot,t))_x-f(w_{2x}(\cdot,t))_x\|_{H^{s-2}}\\&\leqslant\|f(w_{1x}(\cdot,t))-f(w_{2x}(\cdot,t))\|_{H^{s-1}}\\&\leqslant C_2(2M+1)\|w_1(\cdot,t)-w_2(\cdot,t)\|_{H^s}.\end{aligned}\tag{9.3.14}$$

利用引理 9.1.2, 引理 9.1.4 和 Minkowski 积分不等式, 由式 (9.3.13) 和式 (9.3.14) 断言

$$\|Sw_1-Sw_2\|_{X(T)}\leqslant\nu_0\|w_1-w_2\|_{X(T)}T+\left(1+\frac{1}{2}C_2(2M+1)\right)\|w_1-w_2\|_{X(T)}T^2.\tag{9.3.15}$$

如果 T 满足式 (9.3.12) 和

$$T\leqslant\min\left\{\frac{1}{4\nu_0},\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{2}C_2(2M+1)}}\right\},\tag{9.3.16}$$

则 $\|Sw_1-Sw_2\|_{X(T)}\leqslant\frac{1}{2}\|w_1-w_2\|_{X(T)}$. □

定理 9.3.1 设 $s\geqslant2$, v_0, $v_1\in H^s$, $f\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 和 $f(0)=0$, 则积分方程 (9.3.6) 存在唯一局部连续解, 即辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 有唯一局部广义解 $v\in C([0,T_0);H^s)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)}(\|v(\cdot,t)\|_{H^s}+\|v_t(\cdot,t)\|_{H^s})<\infty,\tag{9.3.17}$$

则 $T_0=\infty$.

证明 由引理 9.3.1 和压缩映射原理, 对于适当选择的 $T>0$, S 有唯一的不动点 $v\in Q(M,T)$, 即它是辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的广义解.

易证对于每一个 $\bar{T}>0$, 积分方程 (9.3.6) 至多有一解属于 $X(\bar{T})$.

令 $[0,T_0)$ 是解 $v\in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 应用证明定理 9.1.2 的方法可以证明, 如果式 (9.3.17) 成立, 则 $T_0=\infty$. □

推论 9.3.1 如果 $v \in C([0,T_0);H^s)(s \geqslant 2)$ 是辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的局部广义解, 则 $v \in C^2([0,T_0);H^s)$ 和满足方程 (9.3.5); 如果 $v \in C([0,T_0);H^s)(s \geqslant 2)$ 是辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的局部广义解, 则如果 $s > \dfrac{5}{2}$, $v \in C^2([0,T_0);H^s)$ 是辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的局部古典解.

2. 整体解

在本小节我们证明辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 存在唯一整体广义解和唯一整体古典解. 现在转化问题 (9.3.3), (9.3.4) 解的延拓条件 (9.3.17) 为下面的解的延拓条件 (9.3.18), 即证明下面的定理.

定理 9.3.2 设 $s \geqslant 2$, v_0, $v_1 \in H^s$, $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, 则辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 存在唯一局部广义解 $v \in C^2([0,T_0);H^s)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \|v_x(\cdot,t)\|_\infty = M_1 < \infty, \tag{9.3.18}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 应用 Minkowski 积分不等式、式 (9.3.18)、引理 9.1.2 和引理 9.1.4, 从式 (9.3.6) 得

$$\begin{aligned}\|v(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant&\|v_0\|_{H^s} + [\nu_0\|v_0\|_{H^s} + \|v_1\|_{H^s}]T + 2\int_0^t (t-\tau)\|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau \\ &+ \nu_0\int_0^t \|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau + C_1(M_1)\int_0^t (t-\tau)\|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau \\ \leqslant& C_3(T) + C_4(T)\int_0^t \|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{9.3.19}$$

其中和以后 $C_i(T)(i=3,4,\cdots)$ 表示依赖于 T 的常数.

Gronwall 不等式推出

$$\|v(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant C_5(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9.3.20}$$

式 (9.3.6) 对 t 求导, 得

$$\begin{aligned}v_t(x,t) =& [\nu_0(G*v_0)(x) + v_1(x)] + \int_0^t [(G*v)(x,\tau) - v(x,t)]\mathrm{d}\tau \\ &- \nu_0(G*v)(x,t) + \int_0^t [G*f(v_x)_x](x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{9.3.21}$$

由引理 9.1.2 和引理 9.1.4, Minkwoski 积分不等式和式 (9.3.21), 有

$$\begin{aligned}\|v_t(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant & \nu_0\|v_0\|_{H^s} + \|v_1\|_{H^s} + \nu_0\|v(\cdot,t)\|_{H^s} \\ & + 2\int_0^t \|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau + C_1(M_1)\int_0^t \|v(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau \\ \leqslant & C_6(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{9.3.22}$$

从而由式 (9.3.20) 和式 (9.3.22) 得式 (9.3.17). □

为了得到辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 整体广义解存在的条件, 我们将建立辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 解的一能量等式.

引理 9.3.2 设 $v_0,\ v_1 \in H^1, f \in C(\mathbb{R}),\ F(v_x) = \int_0^{v_x} f(y)\mathrm{d}y$ 和 $F(v_{0x}) \in L^1$, 则辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的广义解 $v \in C^2([0,T_0); H^s)(s \geqslant 2)$ 满足下列能量等式

$$\begin{aligned} E(t) = & \|v_t(\cdot,t)\|^2 + \|v_x(\cdot,t)\|^2 + \|v_{xt}(\cdot,t)\|^2 + 2\nu_0\int_0^t \|v_\tau(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}\tau \\ & + 2\int_{\mathbb{R}} F(v_x(x,t))\mathrm{d}x = E(0), \quad \forall t \in [0,T],\ \ T < T_0. \end{aligned} \tag{9.3.23}$$

证明 方程 (9.3.3) 两端同乘以 $2v_t(x,t)$, 乘积在 $\mathbb{R}$ 上对 x 积分, 应用定理 8.3.6 和进行分部积分, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|v_t(\cdot,t)\|^2 + \|v_x(\cdot,t)\|^2 + \|v_{xt}(\cdot,t)\|^2 + 2\nu_0\int_0^t \|v_\tau(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau + 2\int_{\mathbb{R}} F(v_x(x,t))\mathrm{d}x\right) = 0.$$

上式对 t 积分, 立得式 (9.3.23). □

定理 9.3.3 设 $v_0, v_1 \in H^s,\ f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})(s \geqslant 3),\ f(0) = 0,\ F(y) \geqslant 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ F(v_{0x}) \in L^1$. 如果存在 ρ 满足 $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, 使得

$$|f(y)| \leqslant aF(y)^{\frac{1}{\rho}}|y| + b, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{9.3.24}$$

其中 a 和 b 是正常数, 则辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 存在唯一的整体广义解 $v \in C^2([0,\infty); H^s)$.

证明 根据定理 9.3.2 只需证明条件 (9.3.18) 成立. 由方程 (9.3.5) 和应用基本解 $G(x)$ 的性质 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(G * h) = G * h - h$, 有

$$v_{tt}(x,t) + v(x,t) = G * [v - \nu_0 v_t + f(v_x)_x](x,t).$$

上式对 x 求导后, 两端同乘以 $2v_{xt}(x,t)$, 可见

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{xt}^2(x,t) + v_x^2(x,t) + 2F(v_x(x,t))) = 2G*[v_x - \nu_0 v_{xt} + f(v_x)](x,t)v_{xt}(x,t). \tag{9.3.25}$$

利用引理 9.1.1, 引理 9.3.2, Young 不等式和 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}|[G*f(v_x)](x,t)| &\leqslant [G*|f(v_x)|](x,t) \leqslant aG*[F(v_x)^{\frac{1}{\rho}}|v_x|](x,t)+b\\ &\leqslant a\|G(\cdot)\|_q\|v_x(\cdot,t)\|_\infty\|F(v_x(\cdot,t))\|_1^{\frac{1}{\rho}}+b\\ &\leqslant C_7\|v_x(\cdot,t)\|_\infty+b,\end{aligned} \tag{9.3.26}$$

其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{\rho}=1$ 和

$$|[G*v_x](x,t)| \leqslant \|v_x(\cdot,t)\|_\infty, \quad |G*(-\nu_0 v_{xt})(x,t)| \leqslant \nu_0\|v_{xt}(\cdot,t)\|_\infty. \tag{9.3.27}$$

由式 (9.3.25)~ 式 (9.3.27) 推出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v_{xt}^2(x,t)+v_x^2(x,t)+2F(v_x(x,t))]\\ \leqslant&2C_7\|v_x(\cdot,t)\|_\infty\|v_{xt}(\cdot,t)\|_\infty+2b\|v_{xt}(\cdot,t)\|_\infty\\ &+2\nu_0\|v_{xt}(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|v_x(\cdot,t)\|_\infty\|v_{xt}(\cdot,t)\|_\infty\\ \leqslant&C_8+C_9(\|v_x(\cdot,t)\|_\infty^2+\|v_{xt}(\cdot,t)\|_\infty^2).\end{aligned} \tag{9.3.28}$$

式 (9.3.28) 对 t 积分, 有

$$\begin{aligned}&\|v_x(\cdot,t)\|_\infty^2+\|v_{xt}(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|F(v_x(\cdot,t))\|_\infty\\ \leqslant&\|v_{0x}\|_\infty^2+\|v_{1x}\|_\infty^2+2\|F(v_{0x})\|_\infty+C_8T\\ &+C_9\int_0^t(\|v_x(\cdot,\tau)\|_\infty^2+\|v_{x\tau}(\cdot,\tau)\|_\infty^2)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Gronwall 不等式推出式 (9.3.18) 成立. □

注 9.3.1 设 $v\in C^2([0,\infty);H^s)(s\geqslant 3)$ 是辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的广义解, 则 v 也是辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的整体古典解.

3. 解的爆破

下面我们应用凸性方法研究辅助问题解的爆破.

定理 9.3.4 设 $v_0,v_1\in H^1, f\in C(\mathbb{R}), F(v_{0x})\in L^1$ 和存在一常数 $\alpha>0$, 使得

$$yf(y)\leqslant(3+4\alpha)F(y), \quad \forall y\in\mathbb{R}, \tag{9.3.29}$$

则辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 的广义解 $v\in C^2([0,T_0);H^s)(s\geqslant 2)$ 或古典 $v(x,t)$, 如果满足下列条件之一, 必在有限时刻爆破:

(1) $E(0)<0$,

$$\int_{\mathbb{R}}v_0(x)v_1(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}v_{0x}(x)v_{1x}(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\frac{\nu_0}{\sqrt{\alpha}}(\|v_0\|^2+\|v_{0x}\|^2)>0;$$

(2) $E(0)=0$,

$$\int_{\mathbb{R}} v_0(x)v_1(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}} v_{0x}(x)v_{1x}(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\frac{\nu_0}{\sqrt{\alpha}}(\|v_0\|^2+\|v_{0x}\|^2)>0;$$

(3) $E(0)>0$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} v_0(x)v_1(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}} v_{0x}(x)v_{1x}(x)\mathrm{d}x\\ >&\sqrt{\frac{4\alpha+3}{4\alpha+2}E(0)(\|v_0\|^2+\|v_{0x}\|^2)+\frac{\nu_0^2}{4\alpha}(\|v_0\|^2+\|v_{0x}\|^2)^2},\end{aligned}$$

其中

$$E(0)=\|v_1\|^2+\|v_{0x}\|^2+\|v_{1x}\|^2+2\int_{\mathbb{R}} F(v_{0x})\mathrm{d}x.$$

证明 设辅助问题解存在的最大时间是无穷的. 令

$$\phi(t)=\|v(\cdot,t)\|^2+\|v_x(\cdot,t)\|^2+\gamma_0(t+t_0)^2, \tag{9.3.30}$$

其中 γ_0 和 t_0 是待定的非负整数. 式 (9.3.30) 对 t 求导, 得

$$\dot{\phi}(t)=2\left[\int_{\mathbb{R}} v_x v_{xt}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}} v v_t\mathrm{d}x+\gamma_0(t+t_0)\right]. \tag{9.3.31}$$

应用 Hölder 不等式, 有

$$\dot{\phi}(t)^2\leqslant 4\phi(t)[\|v_{xt}\|^2+\|v_t\|^2+\gamma_0]. \tag{9.3.32}$$

式 (9.3.31) 对 t 求导, 应用方程 (9.3.3) 和定理 8.3.6, 得

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}(t)&=2\|v_{xt}\|^2+2\int_{\mathbb{R}} v_x v_{xtt}\mathrm{d}x+2\|v_t\|^2+2\int_{\mathbb{R}} v v_{tt}\mathrm{d}x+2\gamma_0\\ &=2[\|v_t\|^2+\|v_{xt}\|^2+\gamma_0]+2\int_{\mathbb{R}} v(v_{tt}-v_{xxtt})\mathrm{d}x\\ &\geqslant \|v_t\|^2+\|v_{xt}\|^2+2\gamma_0-2\|v_x\|^2-\nu_0^2\|v\|^2-2\int_{\mathbb{R}} f(v_x)v_x\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{9.3.33}$$

由式 (9.3.29), 式 (9.3.30), 式 (9.3.32), 式 (9.3.33) 和等式 (9.3.23) 可得

$$\begin{aligned}\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2\geqslant&-\phi(t)\Big\{(3+4\alpha)\|v_{xt}\|^2+(3+4\alpha)\|v_t\|^2\\ &+(2+4\alpha)\gamma_0+2\|v_x\|^2+\nu_0^2\|v\|^2+2\int_{\mathbb{R}} f(v_x)v_x\mathrm{d}x\Big\}\\ =&-\phi(t)\Big\{(3+4\alpha)E(0)+(2+4\alpha)\gamma_0-\gamma_0\nu_0^2(t+t_0)^2+\nu_0^2\phi(t)\\ &-(1+4\alpha+\nu_0^2)\|v_x\|^2-2\nu_0(3+4\alpha)\int_0^t\|v_\tau\|^2\mathrm{d}\tau\\ &-2(3+4\alpha)\int_{\mathbb{R}} F(v_x)\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}} f(v_x)v_x\mathrm{d}x\Big\}\\ \geqslant&-\phi(t)\{(3+4\alpha)E(0)+(2+4\alpha)\gamma_0\}-\nu_0^2\phi(t)^2.\end{aligned} \tag{9.3.34}$$

(1) 如果 $E(0)<0$, 取 $\gamma_0=-\dfrac{3+4\alpha}{2+4\alpha}E(0)>0$ 和 $t_0=0$, 由式 (9.3.34) 有

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2\geqslant-\nu_0^2\phi(t)^2.$$

根据假定条件 (1) 知 $\phi(0)>0$ 和 $\dot{\phi}(0)>-\gamma_2\alpha^{-1}\phi(0)$. 由引理 9.1.4 推得, 当 $t\to t_1\leqslant t_2$ 时, $\phi(t)\to\infty$. 这里 $\gamma_{1,2}=\pm\nu_0\sqrt{\alpha}$ 和

$$t_2=\frac{1}{2\nu_0\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\nu_0\sqrt{\alpha}\phi(0)+\alpha\dot{\phi}(0)}{-\nu_0\sqrt{\alpha}\phi(0)+\alpha\dot{\phi}(0)}.$$

(2) 如果 $E(0)=0$, 取 $\gamma_0=0$, 则式 (9.3.34) 变为

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2\geqslant-\nu_0^2\phi(t)^2.$$

根据假定 (2) 知 $\phi(0)>0$ 和 $\dot{\phi}(0)>-\gamma_2\alpha^{-1}\phi(0)$. 由引理 9.1.4 断定, 当 $t\to t_1\leqslant t_2$ 时, $\phi(t)\to\infty$, 其中

$$t_2=\frac{1}{2\nu_0\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\nu_0\sqrt{\alpha}\phi(0)+\alpha\dot{\phi}(0)}{-\nu_0\sqrt{\alpha}\phi(0)+\alpha\dot{\phi}(0)}.$$

(3) 如果 $E(0)>0$, 取 $\gamma_0=0$, 式 (9.3.34) 变为

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2\geqslant-\phi(t)(3+4\alpha)E(0)-\nu_0^2\phi(t)^2.$$

令

$$J(t)=\phi^{-\alpha}(t),$$

则

$$\dot{J}(t)=-\alpha\phi^{-\alpha-1}(t)\dot{\phi}(t),$$

$$\begin{aligned}\ddot{J}(t)&=\alpha(\alpha+1)\phi^{-\alpha-2}(t)\dot{\phi}(t)^2-\alpha\phi^{-\alpha-1}(t)\ddot{\phi}(t)\\&=-\alpha\phi^{-\alpha-2}(t)[\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2]\\&\leqslant\alpha(3+4\alpha)\phi^{-\alpha-1}(t)E(0)+\alpha\nu_0^2\phi^{-\alpha}(t).\end{aligned}\tag{9.3.35}$$

根据假定条件 (3), 可知

$$\dot{J}(0)=-\alpha\phi^{-\alpha-1}(0)\dot{\phi}(0)<0.$$

令

$$t^*=\sup\{\tau|\dot{J}(\tau)<0,\quad\tau\in[0,t)\}.$$

由于 $\dot{J}(t)$ 的连续性, t^* 是正的. 式 (9.3.35) 两端同乘以 $2\dot{J}(t)$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{J}(t)^2 \geqslant &-2\alpha^2(3+4\alpha)\phi^{-2\alpha-2}(t)E(0)\dot{\phi}(t)-2\alpha^2\nu_0^2\phi^{-2\alpha-1}(t)\dot{\phi}(t)\\ =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{2\alpha^2(3+4\alpha)}{1+2\alpha}E(0)\phi^{-2\alpha-1}(t)+\alpha\nu_0^2\phi^{-2\alpha}(t)\right],\quad t\in(0,t^*). \end{aligned}\tag{9.3.36}$$

式 (9.3.36) 对于 $0\leqslant t<t^*$ 在 $(0,t)$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}\dot{J}(t)^2\geqslant&\dot{J}(0)^2+\frac{2\alpha^2(3+4\alpha)}{1+2\alpha}E(0)[\phi^{-2\alpha-1}(t)-\phi^{-2\alpha-1}(0)]\\ &+\alpha\nu_0^2[\phi^{-2\alpha}(t)-\phi^{-2\alpha}(0)],\quad t\in[0,t^*).\end{aligned}\tag{9.3.37}$$

由假定 (3) 知

$$\dot{J}(0)^2-\frac{2\alpha^2(3+4\alpha)}{1+2\alpha}E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)-\alpha\nu_0^2\phi^{-2\alpha}(0)>0.$$

因此根据 $\dot{J}(t)$ 的连续性, 由式 (9.3.36) 和式 (9.3.37) 对 $0\leqslant t<t^*$ 得

$$\dot{J}(t)\leqslant-\left[\dot{J}(0)^2-\frac{2\alpha^2(3+4\alpha)}{1+2\alpha}E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)-\alpha\nu_0^2\phi^{-2\alpha}(0)\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{9.3.38}$$

依 t^* 的定义推知, 式 (9.3.38) 对所有的 $t\geqslant 0$ 成立. 所以,

$$J(t)\leqslant J(0)-\left[\dot{J}(0)^2-\frac{2\alpha^2(3+4\alpha)}{1+2\alpha}E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)-\alpha\nu_0^2\phi^{-2\alpha}(0)\right]^{\frac{1}{2}}t,\quad \forall t>0.$$

因此, 对于某个 t_1, $J(t_1)=0$ 和 $0<t_1\leqslant t_2$, 其中

$$t_2=J(0)[\dot{J}(0)^2-\frac{2\alpha^2(3+4\alpha)}{1+2\alpha}E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)-\alpha\nu_0^2\phi^{-2\alpha}(0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

这样, $\phi(t)$ 在 t_1 变为无穷大. 从而或者在条件 (1), 条件 (2), 或者在条件 (3) 下 $\phi(t)$ 总在 t_1 变为无穷大. 这与问题解存在的最大时间为无穷的事实矛盾. □

9.3.2 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2)

在本小节中借助于辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 讨论 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 解的整体存在性和唯一性. 还借助于辅助问题 (9.3.3), (9.3.4) 研究 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 解的爆破.

1. 整体解

定理 9.3.5 设 $u_0,u_1\in H^{s-1}$, $f\in C^{[s]}(\mathbb{R})(s\geqslant 3)$, $f(0)=0$, $F(y)\geqslant 0$, $\forall y\in\mathbb{R}$, $F(u_0)\in L^1$. 如果存在 ρ 满足 $0\leqslant\rho\leqslant\infty$, 使得

$$|f(y)|\leqslant aF(y)^{\frac{1}{\rho}}|y|+b,\quad \forall y\in\mathbb{R},$$

其中 a 和 b 是正常数, 则 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 存在唯一的整体广义解 $u \in C^2([0,\infty);H^s)(s \geqslant 2)$.

证明 令 $v_x(x,t)=u(x,t)$, 则 $v(x,t)$ 应满足下列问题

$$v_{xtt}-v_{xxx}-v_{xxxtt}+\nu_0 v_{xt}=f(v_x)_{xx}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0, \tag{9.3.39}$$

$$v(x,0)=\varphi(x), \quad v_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{9.3.40}$$

其中 $\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)\mathrm{d}\xi$, $\psi(x)=\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)\mathrm{d}\xi$.

考虑 Cauchy 问题

$$v_{tt}-v_{xx}-v_{xxtt}+\nu_0 v_t=f(v_x)_x, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0, \tag{9.3.41}$$

$$v(x,0)=\varphi(x), \quad v_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{9.3.42}$$

经直接计算知, φ, $\psi \in H^s$, $f\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})(s\geqslant 3)$; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 和 $f(y)$ 满足定理 9.3.3 的条件. 因此可知, Cauchy 问题 (9.3.41), (9.3.42) 存在唯一整体古典解 $v\in C^2([0,\infty);H^s)(s\geqslant 3)$. 将此 $v(x,t)$ 代入 Cauchy 问题 (9.3.41), (9.3.42) 后分别对式 (9.3.41) 和式 (9.3.42) 对 x 求导, 把 $v_x(x,t)=u(x,t)$ 代入这些所得表达式, 可知 $u\in C^2([0,\infty);H^s)(s\geqslant 2)$ 是 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 的整体广义解.

现在证明 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 广义解的唯一性.

令 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 的两个广义解, 则 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ 满足下列 Cauchy 问题

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\nu_0 u_t=[f(u_1(x,t))-f(u_2(x,t))]_{xx}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0, \tag{9.3.43}$$

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{9.3.44}$$

式 (9.3.43) 两端同乘以 $2u_t(x,t)$, 对乘积在 $\mathbb{R}$ 上积分, 两端各加 $2\int_{\mathbb{R}}u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x$, 应用定理 8.3.6 和分部积分, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2+\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2)\\=&-2\nu_0\|u_t(\cdot,t)\|^2-2\int_{\mathbb{R}}[f(u_1(x,t))-f(u_2(x,t))]_x u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x\\&+2\int_{\mathbb{R}}u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&-2\nu_0\|u_t(\cdot,t)\|^2-2\int_{\mathbb{R}}[f'(u_1(x,t))u_{1x}(x,t)-f'(u_2(x,t))u_{2x}(x,t)]\\
&\times u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}}u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\\
=&-2\nu_0\|u_t(\cdot,t)\|^2-2\int_{\mathbb{R}}[f'(u_1(x,t))-f'(u_2(x,t))]u_{1x}(x,t)u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x\\
&-2\int_{\mathbb{R}}f'(u_2(x,t))u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}}u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\\
=&-2\nu_0\|u_t(\cdot,t)\|^2-2\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 f''(u_2(x,t)+\theta(u_1(x,t)\\
&-u_2(x,t)))u(x,t)\mathrm{d}\theta\times u_{1x}(x,t)u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x\\
&-2\int_{\mathbb{R}}f'(u_2(x,t))u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}}u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\\
\leqslant& C_{10}(\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2+\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2),
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta<1$. 由 Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^1}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^1}\leqslant 0.$$

因此解的唯一性得证. □

注 9.3.2 在定理 9.3.5 的条件下, 如果 $s>\frac{7}{2}$, 则 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 的整体广义解, 也是整体古典解.

2. 解的爆破

定理 9.3.6 设 $u_0,u_1\in H^1$, $f\in C^2(\mathbb{R})$, $F(u_0)\in L^1$ 和存在一常数 $\alpha>0$, 使得

$$yf(y)\leqslant(3+4\alpha)F(y),\quad \forall y\in\mathbb{R},$$

则 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2) 的广义解 $u(x,t)\in C^2([0,T];H^s)(s\geqslant 2)$ 或者古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E_1(0)<0$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^x u_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}u_0(x)u_1(x)\mathrm{d}x\\
>&\frac{\nu_0}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x+\|u_0\|^2\right\}>0;
\end{aligned}
$$

(2) $E_1(0)=0$,

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}u_0(x)u_1(x)\mathrm{d}x$$
$$>\frac{\nu_0}{2\sqrt{\alpha}}\left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x+\|u_0\|^2\right\}>0;$$

(3) $E_1(0)>0$,

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}u_0(x)u_1(x)\mathrm{d}x$$
$$>\left\{\frac{4\alpha+3}{4\alpha+2}E_1(0)\left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x+\|u_0\|^2\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\nu_0^2}{4\alpha}\left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x+\|u_0\|^2\right\}^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 $E_1(0)=\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x+\|u_0\|^2+\|u_1\|^2+2\int_{\mathbb{R}}F(u_0(x))\mathrm{d}x.$

证明 令

$$\phi_1(t)=\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{x}u(\xi,t)\mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x+\|u(\cdot,t)\|^2+\gamma_0(t+t_0)^2,$$

其中 γ_0 和 t_0 是定理 9.3.4 中的非负常数.

根据定理 9.3.6 的假定, $u(x,t)$ 在广义意义下满足方程 (9.3.1), 并在古典意义下满足初值条件 (9.3.2). 作变换

$$u(x,t)=v_x(x,t),\quad u_0(x)=v_{0x}(x),\quad u_1(x)=v_{1x}(x),\tag{9.3.45}$$

则

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{x}u(\xi,t)\mathrm{d}\xi,\quad v_0(x)=\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad v_1(x)=\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

将变换 (9.3.45) 代入 Cauchy 问题 (9.3.1), (9.3.2), 有

$$v_{xtt}-v_{xxx}-v_{xxxtt}+\nu_0v_{xt}=f(v_x)_{xx},\tag{9.3.46}$$

$$v_x(x,0)=u_0(x),\quad v_{xt}(x,0)=u_1(x).\tag{9.3.47}$$

在 $(-\infty,x)$ 上积分方程 (9.3.46) 和式 (9.3.47), 得到

$$v_{tt}-v_{xx}-v_{xxtt}+\nu_0v_t=f(v_x)_x,\tag{9.3.48}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x).\tag{9.3.49}$$

令

$$\phi(t) = \|v\|^2 + \|v_x\|^2 + \gamma_0(t+t_0)^2,$$

其中 γ_0 和 t_0 是定理 9.3.4 中的非负常数. 按照定理 9.3.6 的假定已满足定理 9.3.4 Cauchy 问题 (9.3.48), (9.3.49) 解爆破的充分条件. 因此推出, 存在 t_1, 使得 $\phi(t)$ 在 t_1 变为无穷大. 因为按照变换 (9.3.45), $\phi_1(t) = \phi(t)$, 所以 $\phi_1(t)$ 在 t_1 变为无穷大. □

本章主要参考了文献 [85]~[88]. 与本章有密切关系的文章详见 [89]~[113].

参 考 文 献

[1] Adams R A, Fournier John J F. Sobolev Spaces. 2nd ed. New York: Academic Press, 2003.

[2] 李立康, 郭毓驹. 索伯列夫空间引论. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.

[3] 索伯列夫. 泛函分析在数学物理中的应用. 崔志勇, 等, 译. 长春: 吉林大学出版社, 1990.

[4] 王术. 索伯列夫空间与偏微分方程引论. 北京: 科学出版社, 2009.

[5] Vladimer G. Mazja. Sobolev Spaces. New York: Springer-Verlag, 1985.

[6] 王元明, 徐君祥. 索伯列夫空间讲义. 南京: 东南大学出版社, 2003.

[7] 李开泰, 马逸尘. 数理方程 Hilbert 空间方法 (上) 广义函数和索伯列夫空间. 西安: 西安交通大学出版社, 1990.

[8] Bahuguna D, Raghavendra V, Rathish Kumar B V. Topics in Sobolev Spaces and Applications. Pangbourne: Alpha Science International Ltd., 2002.

[9] Giovanni Leoni. A First Course in Sobolev Spaces. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2009.

[10] 苗长兴. 调和分析及其在偏微分方程中的应用. 2 版. 北京: 科学出版社, 2004.

[11] 苗长兴. 非线性波动方程的现代方法. 2 版. 北京: 科学出版社, 2010.

[12] 苗长兴, 张波. 偏微分方程的调和分析方法. 北京: 科学出版社, 2008.

[13] 苗长兴, 吴家宏, 章志飞. Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用. 北京: 科学出版社, 2012.

[14] Gilbarg David, Trudinger Neil S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York: Springer-Verlag, 2001.

[15] Taylor M E. Partial Differential Equations Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ. New York: Springer-Verlag, 1996.

[16] Oden J T, Reddy J N. An introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. NewYork: John Wiley & Sons, Inc., 1976.

[17] 李荣华. 边值问题的 Galerkin 有限元法. 北京: 科学出版社, 2005.

[18] Karel R. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. 2nd ed. Dordrecht-Holland/Boston-U. S. A., London-England: D.Reidel Publishing Compang, 1980.

[19] 伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物型方程引论. 北京: 科学出版社, 2003.

[20] 陈恕行. 现代偏微分方程导论. 北京: 科学出版社, 2008.

[21] Evans L C. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics. Rhode Island: American Mathematics Society, 1998.

[22] 齐民友. 线性偏微分算子引论 (上册). 北京: 科学出版社, 1986.

[23] 王耀东. 偏微分方程的 L^2 理论. 北京: 北京大学出版社, 1989.

[24] 刘斯捷尔尼克, 索伯列夫. 泛函分析概要. 2 版. 杨从仁, 译. 北京: 科学出版社, 1985.

[25] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 (上册). 北京: 北京大学出版社, 1997.

[26] Rudin W. Functional Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

[27] Kôsaku Y. Functional Analysis. 6th ed. New York: Springer-Verlag, 1980.

[28] Gerald B F. Real Analysis: modern techniques and their applications. 2nd ed. New York: John wiley & Sons, Inc., 1999.

[29] Marcinkiewicz J. Sur l'interpolation d'opérateurs. C. R. Acad. Sci. Paris., 1939, 208: 1272-1273.

[30] Zygmund A. On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpotation of operators. J. Math. Pures Appl., 1956, 35(9): 223-248.

[31] Benedek A, Panzone R. The space L^p with mixed norm. Duke Math. J., 1961, 28: 301-324.

[32] 潘文杰. 傅里叶分析及其应用. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[33] Gagliardo E. Properietà di alcune classi di funzioni in piu variabili. Ricerche Mat., 1958, 7: 102-137.

[34] Meyers N G, Serrin J. $H = W$. Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 1964, 51: 1055-1056.

[35] Ehrling G. On a type of eigenvalue problem for certain elliptic differential operators. Math. Scand., 1954, 2: 267-285.

[36] Nirenberg L. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math., 1955, 8: 649-675.

[37] Browder F E. On the spectral theory of elliptic differential operators I. Math. Ann., 1961, 142: 22-130.

[38] Gagliardo E. Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. Ric. Mat., 1959, 8: 24-51.

[39] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations (Lecture II). Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, 1959, 3(13): 115-162.

[40] Rellich F. Ein Satz über mittlere Konvergenz. Göttingen Nachr., 1930: 30-35.

[41] Kondrachov V I. Certain properties of functions in the space L^p. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1945, 48: 535-538.

[42] Aubin J P. Un thérè de compacité. C. R. Acad. Sc. Paries, 1963, 256: 5012-5014.

[43] Alois Kufner, Oldřich John, Svatopluk Fučik. Function Spaces. Prague: Academia Publishing House of the Czechoslovak, 1977.

[44] Leray J, Schauder J. Topologie at équations fonctionelles. Ann. Sci. l'Élcole Norm. Sup., 1934, 51: 45-78.

[45] Donald S C, James D M. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population. J. Math. Biol., 1981, 12: 237-249.

[46] Chen G W. Classical global solution of the initial boundary value problems for a class of nonlinear parabolic equations. Comment. Math. Univ. Coroline, 1994, 35(3): 431-443.

[47] 周毓麟, 符鸿源. 广义 Sine-Gordon 型非线性高阶双曲方程组. 数学学报, 1983, 26: 234-249.

[48] Chen G W, Wang Y P, Zhao Z C. Blow-up of solution of an initial boundary value problem for a damped nonlinear hyperbolic equation. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 491-497.

[49] 李岳生. 基本不等式与微分方程解的唯一性. 吉林大学自然科学学报, 1960, (1): 7-22.

[50] Chen G W, Yue H Y, Wang S B. The initial boundary value problem for quasi-linear wave equation with viscous damping. J. Math. Anal. Appl., 2007, 331: 823-839.

[51] Pasternak N L. New Method for Calculation of Foundation on the Elastic Basement. Moscow: Gosstroiizdat, 1954.

[52] Samsonov A M, Sokurinskaya E V. Energy Exchange between Nonlinear Waves in Elastic Waveguides and External Media. Nonlinear Waves in Active Media. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[53] Samsonov A M. Nonlinear strain waves in elastic waveguide//Jeffrey A, Engelbrecht J, eds. Nonlinear Waves in Solids. CISM Courses and Lecture. Vol. 341. Wien: Springer-Verlag, 1994.

[54] Chen G W, Wang Y P, Wang S B. Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation. J. Math. Anal. Appl., 2004, 299: 563-577.

[55] Chen G W, Lu B. The initial-boundary value problems for a class of nonlinear wave equations with damping term. J. Math. Anal. Appl., 2009, 351: 1-15.

[56] 张善元, 庄蔚. 非线性弹性杆中的应变孤波. 力学学报, 1998, 20(1): 58-66.

[57] Chen X Y. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear evolution equation of fourth order. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2002, 16(3): 251-258.

[58] Komornik V. Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. Paris: Masson-John Wiley, 1994.

[59] Chen X Y, Chen G W. Asymptotic behavior and blow up of solutions to a nonlinear evolution equation of fourth order. Nonlinear Analysis TMA, 2008, 68: 892-904.

[60] Muto V. Nonlinear models for DNA dynamics. Ph.D.Thesis. Laboratory of Applied Mathematical Physics, The Techuical University of Denmark, DCAMM. Report No. S47, 1988.

[61] Muto V, Scott A C, Christiansen P L. Thermally generated Solitons in a Toda Lattice Model of DNA. Physics Letter, 1989, 136A: 33-36.

[62] Muto V, Scott A C, Christiansen P L. A Toda Lattice Model for DNA: thermally generated solitons. Physica D, 1990, 44: 75-91.

[63] Christiansen P L, Lomdahl P S, Muto V. On a toda lattice model with a transversal degree of freedom. Nonlinearity, 1990, 60: 477-501.

[64] Makhankov V G. Dynamics of classical solitons (in non-integrable system). Physics Reports, Phys. Lett. C, 1978, 35(1): 1-128.

[65] Chen G W, Zhang H W. Initial boundary value problem for system of generalized IMBq equations. Math. Meth. Appl. Sci., 2004, 27: 497-518.

[66] Chen G W, Yang Z J. Existence and nonexistence of global solutions for a class of nonlinear wave equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2000, 23: 615-631.

[67] Yang Z J, Wang X. Blow up of solutions for improved Boussinesq type equation. J. Math. Anal. Appl., 2003, 278: 335-353.

[68] Yang Z J, Wang X. Blow up of solutions for the “bad” Boussinesq-type equation. J. Math. Anal. Appl., 2003, 285: 282-298.

[69] 王艳萍, 陈国旺. 一类高阶非线性波动方程的时间周期问题. 应用数学学报, 2007, 30(2): 289-296.

[70] Chen G W, Song R L, Wang S B. Local existence and global nonexistence theorems for a damped nonlinear hyperbolic equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 368: 19-31.

[71] Wang Y P, Zhang Y L. Time-periodic solution to a nonlinear parabolic type equation of higher order. Acta Mathematiace Applicatae Sinica, English Series, 2008, 24(1): 129-140.

[72] Yang Z J. Global existence, asymptotic behavior and blowup of solution for a class of nonlinear wave equations with dissipative term. J. Differential Equations, 2003, 187(2): 520-540.

[73] Yang Z J, Song C M. Blowup of solutions for a class of quasilinear evolution equations. Nonlinear Analysis TMA., 1997, 28(12): 2017-2032.

[74] Yang Z J, Chen G W. Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping. J. Math. Anal. Appl., 2003, 285(2): 604-618.

[75] Zhou Y L. Applications of Discrete Functional Analysis to the Finite Difference Method. Beijing: International Academic Publishers, 1990.

[76] Gasquet C, Witomski P. Fourier Analysis and Applications. New York: Springer-Verlag, 1999.

[77] Zofia S. Fourier Transformation and Linear Differential Equations. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1977.

[78] Rafael J I, Valéria De Magalhães Iorio. Fourier Analysis and Partial Differential Equations. New York: Cambridge University Press, 2001.

[79] Arévalo E, Gaididei Y, Mertens F G. Soliton dynamics in damped and forced Boussinesq equations. Eur. Phys. J. B, 2002, 27: 63-74.

[80] Wang S B, Chen G W. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation. J. of Math. Anal. Appl., 2002, 274: 846-866.

[81] Kano T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math., 1988, 41: 891-907.

[82] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities (Fourth printing). Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[83] Kalatarov V K, Ladyzhenskaya O A. The occurrence of collapse for quasi-linear equation of parabolic and hyperbolic types. J. Soviet Math., 1978, 10: 53-70.

[84] 李大潜, 陈韵梅. 非线性发展方程. 北京: 科学出版社, 1997.

[85] Chen G W, Guo H X, Zhang H W. Global existence of solutions of Cauchy problem for generalized system of nonlinear evolution equations arising from DNA. Journal of Mathematical Physics, 2009, 50: 083514-23.

[86] Chen G W, Rui W F, Chen X Y. Cauchy problem for a damped generalized IMBq equation. Journal of Mathematical Physics, 2011, 52: 053504-19.

[87] Chen G W, Han X J. Global existence of solution of Cauchy problem for a nonlinear wave equation. IMA Journal of Applied Mathematics, 2012: 1-17.

[88] 陈国旺. 一类 N 维非线性波动方程的 Cauchy 问题. 数学学报 (中文版), 2012, 55(5): 797-810.

[89] Chen G W, Xue H X. Global existence of solution of Cauchy problem for nonlinear pseudo-parabolic equation. Journal of differential Equations, 2008, 245: 2705-2722.

[90] Wang S B, Xu H Y. On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with hydrodynamical damped term. Journal of Differential Equations, 2012, 252: 4243-4258.

[91] Wang S B, Chen G W. Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger-IMBq equations. Discrete and continuous dynamical Systems-Series B, 2006, 6(1): 203-214.

[92] Wang S B, Liu M L. The Cauchy problem for coupled IMBq equations. IMA Journal of Applied Mathematics, 2009: 1-15.

[93] Chen G W, Xue H X. Periodic boundary value problem and Cauchy problem of the generalized cubic double dispersion equation. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28B(3): 573-587.

[94] Chen G W, Hou C S. Initial value problem for a class of fourth-order nonlinear wave equations. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2009, 30(3): 391-401.

[95] Wang Y Z, Chen X Y. Existence and uniqueness of global solutions to a class of Boussinesq type equations. Chinese Journal of Contemporay Mathematics, 2011, 32(4): 347-358.

[96] Wang S B, Chen G W. The Cauchy problem for the generalized IMBq equation in $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 266: 38-54.

[97] Xu R Z, Liu Y C, Yu T. Global existence of solution for Cauchy problem of multidimensional generalized double dispersion equations. Nonlinear Analysis TMA., 2009, 71: 4977-4983.

[98] Wang S B, Xue H X. Globla solution for a generalized Boussinesq equation. Applied Mathematics and computation, 2008, 204: 130-136.

[99] Wang S B, Da F. On the asymptotic behavior of solution for the generalized double dispersion equation. Applicable Analysis: An International Journal, 2012: 1-15.

[100] Wang S B, Xu G X, Chen G W. Cauchy problem for the generalized Benney-Luke equation. Journal of Mathematical Physics, 2007, (48): 073521-16.

[101] Yang Z J. Longtime behavior of the Kirchhoff type equation with strong damping on $\mathbb{R}^N$. J. Differential equations, 2007, 242(2): 269-286.

[102] Yang Z J, Guo B L. Cauchy problem for the multidimensional Boussinesq type equation. J. Math. Anal. Appl., 2008, 340(1): 64-80.

[103] Xu R Z, Liu Y C, Liu B W. The Cauchy problem for a class of the multidimensional Boussinesq-type equation. Nonlinear Analysis TMA., 2011, 74(6): 2425-2437.

[104] Liu Y C, Xu R Z. Global existence and blow up of solutions for Cauchy problem of generalized Boussinesq equation. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2008, 237(6): 721-731.

[105] Liu Y. Existence and blow up of solution of a nonlinear Pochhammer-Chree equation. Indiana Univ. Math. J., 1996, 45(3): 797-815.

[106] Constantin A, Molinet L. The initial value problem for a generalized Boussinesq equation. Differential Integral Equations, 2002, 5(9): 1061-1072.

[107] Zhu Y B. Global existence of small amplitude solution for the generalized IMBq equation. J. Math. Anal. Appl., 2008, 340: 304-321.

[108] Cho Y G, Ozawa T. Remarks on modified improved Boussinesq equations in one space dimension. Proc. R. Soc. A, 2006, 462: 1949-1963.

[109] Wang Y, Mu C L, Li N. Scattering of small amplitude solution for a multidemensional generalized Boussinesq equation. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 2007, 14: 593-607.

[110] Wang Y, Mu C L. Blow-up and scattering of solution for a generalized Boussinesq equation. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188: 1131-1141.

[111] Liu Y. Decay and scattering of small solution of a generalized Boussinesq equation. J. Funct. Anal., 1997, 147: 51-68.

[112] Linares F. Global existence of a small solution for a generalized Boussinesq equation. J. Different. Equat., 1993, 106: 257-293.

[113] Dé Godefroy A. Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation. IMA Journal of Applied Mathematics, 1988, 60: 123-138.

附　　录

I. 一些常用的初等不等式

1. Cauchy 不等式

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

证明

$$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad \square$$

2. 带 ε 的 Cauchy 不等式

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0).$$

证明　写成

$$ab = ((2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} a) \left(\frac{b}{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

和应用 Cauchy 不等式. $\square$

注 1　函数 $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 称为凸函数, 如果对所有的 $x, y \in \mathbb{R}^N$ 和每一个 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 成立

$$f(\tau x + (1-\tau) y) \leqslant \tau f(x) + (1-\tau) f(y).$$

3. Young 不等式

设 $1 < p,\ q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 上述不等式也就是 Cauchy 不等式.

证明　因为映射 $x \mapsto \mathrm{e}^x$ 是凸的, 所以

$$ab = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \leqslant \frac{1}{p} \mathrm{e}^{\ln a^p} + \frac{1}{q} \mathrm{e}^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \square$$

4. 带 ε 的 Young 不等式

设 $1 < p, q < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}} b^q}{q}, \quad ab \leqslant \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0),$$

其中 $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

证明　因为

$$ab = (\varepsilon^{\frac{1}{p}} a)(\varepsilon^{-\frac{1}{p}} b),$$

利用 Young 不等式, 得所证第一个不等式.

由于

$$ab = ((\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} a) \left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}} \right),$$

再用 Young 不等式, 就得到所证第二个不等式. □

5. C_p 不等式

设 a, b 为实数, $p > 0$, 则成立

$$(|a| + |b|)^p \leqslant \begin{cases} |a|^p + |b|^p, & 0 < p \leqslant 1, \\ 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p), & p > 1. \end{cases}$$

证明　显然当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $a = 0, b = 0$ 时, 不等式成立. 当 $0 < p \leqslant 1$ 时, 考虑函数

$$f(x) = (1 + x)^p - x^p - 1, \quad x > 0.$$

由于此函数是单减的, 所以

$$(1 + x)^p \leqslant x^p + 1.$$

令 $x = \dfrac{|b|}{|a|} (a \neq 0)$ 或 $x = \dfrac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$ 并代入上式, 即得所要证的不等式.

当 $p > 1$ 时, 可由求函数 $f(x) = (1 + x)^p (1 + x^p)^{-1}$ 在 $x \geqslant 1$ 的上确界获得. 事实上

$$\sup_{x \geqslant 1} |f(x)| = \sup_{x \geqslant 1} \frac{(1 + x)^p}{1 + x^p} = 2^{p-1}.$$

由此

$$\frac{(1 + x)^p}{1 + x^p} \leqslant 2^{p-1}.$$

若 $|a|>|b|$, 令 $x=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$, 将此式代入上式, 有

$$\frac{(|a|+|b|)^p}{|a|^p+|b|^p}\leqslant 2^{p-1},$$

即

$$(|a|+|b|)^p\leqslant 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p).$$

若 $|a|\leqslant|b|$, 令 $x=\dfrac{|b|}{|a|}(a\neq 0)$, 则同上可得

$$(|a|+|b|)^p\leqslant 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p).$$

因此当 $p>1$ 时, 所证不等式成立. □

6. Cauchy-Schwarz 不等式

$$|x\cdot y|\leqslant|x||y|\quad(x,y\in\mathbb{R}^N),$$

其中 $x\cdot y$ 表示向量 x 和 y 的点乘.

证明 令 $\varepsilon>0$ 和记

$$0\leqslant|x\pm\varepsilon y|^2=|x|^2\pm 2\varepsilon x\cdot y+\varepsilon^2|y|^2.$$

因此

$$\pm x\cdot y\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}|x|^2+\frac{\varepsilon}{2}|y|^2.$$

当 $y\neq 0$ 时, 令 $\varepsilon=\dfrac{|x|}{|y|}$ 使上式右端取最小, 即得所证不等式. □

注 2 如果 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 属于 $\mathbb{R}^N$, 则

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^N x_iy_i,\quad |x|=\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

7. 离散型的 Hölder 不等式

如果 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 属于 $\mathbb{R}^N$, x_i, $y_i\geqslant 0$, $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$\sum_{i=1}^N x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^N x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^N y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明 对于 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p>1$, $a>0$, $b>0$ 利用 Young 不等式

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

把

$$a=\frac{x_i^p}{X},\quad X=\sum_{i=1}^{N}x_i^p,$$

$$b=\frac{y_i^q}{Y},\quad Y=\sum_{i=1}^{N}y_i^q$$

代入上式并对 $i=1,2,\cdots,N$ 求和, 当 $p>1$ 时, 得

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}x_iy_i}{X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i^p}{X}+\frac{1}{q}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}y_i^q}{Y}=1.$$ □

8. 离散型的 Minkowski 不等式

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 属于 $\mathbb{R}^N$, $x_i,y_i\geqslant 0$, $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{N}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 因为

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{N}x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{N}y_i(x_i+y_i)^{p-1},$$

对上式右端两项和应用带有共轭指数 p 与 q 的 Hölder 不等式, 得

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^p\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{N}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

由此可得要证的不等式. □

注 3 上述离散型的 Minkowski 不等式有时称为 "三角不等式", 这是因为当 $p=2$ 时, 它等价于 N 维 Euclid 空间中的几何不等式.

II. 函数定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的 Gagliardo-Nirenberg 插值定理

Gagliardo-Nirenberg 插值定理　设 $f \in W^{k,p_2}(\mathbb{R}^N)\bigcap L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$. 对任意的整数 l, k, $0 \leqslant l < k$ 和满足 $\frac{l}{k} \leqslant \lambda < 1$, 使得

$$\frac{1}{p} - \frac{l}{N} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \lambda\left(\frac{1}{p_2} - \frac{k}{N}\right). \tag{1}$$

如果 $k - l - \frac{N}{p_2}$ 不是非负整数时, 则成立

$$\|D^l f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant K\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^N)}^{1-\lambda}\|f\|_{W^{k,p_2}(\mathbb{R}^N)}^{\lambda}. \tag{2}$$

如果 $k - l - \frac{N}{p_2}$ 是非负整数时, 则式 (2) 对于 $\frac{l}{k} = \lambda$ 也成立, 其中常数 K 依赖于 $p_1, p_2, k, l, \lambda, N$.

实际上, 如果 $k - l - \frac{N}{p_2}$ 是非负整数时, 则式 (2) 对于任意的 $\frac{l}{k} \leqslant \lambda < 1$ 都成立.

索　引

A

a.e. 表示几乎处处　14
Ascoli-Arzelá定理　10
Aubin 引理　215

B

Banach 不动点定理　1
Banach 代数　158
Banach 空间　3
Banach-Steinhaus 定理　6
blow up　244
Bochner 积分　202
Bq 方程　261
闭包　1
边界迹　194
边界迹的嵌入定理　194

C

$C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的稠密性　120
$C^\infty(\Omega)$(空间)　10
$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$(空间)　10
$C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\Omega)$(空间)　10
$C^m(\Omega)$(空间)　8
$C^m(\overline{\Omega})$ 空间　8
$C_B^m(\Omega)$(空间)　8
$C_c^m(\Omega)$　10
$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 空间　10
$C_c(\Omega)$ 空间　10
$C_c(\Omega)$ 空间在 $L^p(\Omega)$ 空间中的稠密性　34
$C_c^{+\infty}(\mathbb{R}^n,\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的稠密性　120
$C_c^\infty(\Omega)$　36
C_p 不等式　133
Cauchy 不等式　269
Cauchy 定理　316
Cauchy 序列　77
Cauchy-Schwarz 不等式　4
Chebyshev 不等式　66
Clarkson 不等式　24, 28
插值定理　163
插值公式　277
差商　129
差商分部积分公式　130
常微分方程特征值问题　223
乘法公式　328
乘积空间　4
抽象函数　199
抽象函数的 Bochner 积分　199
初边值问题　222
次线性算子　65

D

Dirac 函数　83
Dirichlet 问题　219
Doetsch 三线定理　38
带 ε 的 Cauchy 不等式　290
带 ε 的 Young 不等式　391
带权的 Hölder 不等式　15
带权的 Hölder 逆不等式　18
带权的 Minkowski 不等式　17
带权的 Minkowski 逆不等式　19
单调收敛定理　66
单调下降函数　25
单位分解定理　110

等度整体连续　60
等距同构　5
递增函数序列　66

E

Ehrling, Browder 定理　172
Ehrling, Nirenberg, Gagliardo 定理　168
Euclid 空间　1

F

Fatou 引理　207
Fourier 变换　314
Fubini 定理　36
范数　3
分布函数　66
分布 (distribution)　81
分数阶索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$　332, 343
分数阶索伯列夫空间 $H^s(\Omega)$　343
辅助函数　26
辅助问题　376
赋范空间　2

G

Gagliardo-Nirenberg 插值定理　180
Gagliardo 定理　117
Galerkin 方法　252
Galerkin 近似解　223
Gamma 函数　351
Gauss 函数　316
Ginzburg-Landau 模型方程　222
Green 函数　262
Gronwall 不等式 (积分形式)　220
Gronwall 不等式 (微分形式)　219
共轭指数　15
古典解　222
广义 IMBq 型方程组的初边值问题　260
广义 Schrödinger 型方程组初边值问题的有限差分法　288
广义带权的 Hölder 不等式　16
广义函数的导数　95
广义函数的卷积　89
广义函数的支集　85
广义函数的直积　85
广义函数 (generalized function)　81
广义解的定义　261
广义立方双色散方程的初边值问题　251

H

$H^{m,p}(\Omega)$ 空间　124
$H^s(\mathbb{R}^N)$ 空间范数的内插　342
Hölder 不等式　70
Hölder 函数空间　10
Hölder 条件　11
Hölder 系数　285
Hahn-Banach 定理　7
Hamiltonian 原理　252
Hausdorff-Young 不等式　332
Heaviside 函数　79
含有时间的索伯列夫空间　211
含有时间的空间　199
核函数　41
缓增广义函数　304
混合范数 L^p 空间　14, 74
混合范数的 Hölder 不等式　75

I

IBq 方程　261
IMBq 方程　261

J

J. Boussinesq　261
Jensen 不等式　220
基本解　350

基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$　80
基本序列　3
积分方程组　263
简单函数　34
阶梯函数　38
解的爆破现象　244
解的渐近性质　241
解析函数　39
紧集　1
紧距离空间　1
紧嵌入定理　180
紧算子　5
紧支集　86
局部解　350
局部绝对连续函数　257
具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题　376
具阻尼非线性双曲型方程的初边值问题　244
具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题　349
距离空间　1
卷积　36
卷积 Young 不等式　37

K

可加性　5
可数处处稠密网　64
空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$　125
空间的一致凸性　24

L

L 型区域　115
L 型区域 Ω 的一些性质　120
$L^1(\Omega)$ 空间的 Riesz 表示定理　56
$L^2(\Omega)$ 空间的标准正交基　223
$L^p((0;T);X)$ 空间的完备性　207
$L^p(\Omega)$ 空间的 Riesz 表示定理　55
$L^p(\Omega)$ 空间　2
$L^p(\Omega)$ 范数的内插不等式　15
$L^p(\Omega)$ 空间的可分性　46
$L^p(\Omega)$ 空间的弱完备性　60
$L^p(\Omega)$ 空间的完备性　14
$L^p(\Omega)$ 空间的一个嵌入定理　32
$L^p(\Omega)$ 空间上线性泛函的表示形式　49
$L^p(\Omega)$ 空间元素的整体连续性　47
$L^p(\Omega)$ 空间中的准紧集　75
$L^p(\Omega)$ 空间的一致凸性　31
$L^p(\Omega)$ 是自反空间　59
Laplace 算子　244
Lax-Milgram 定理　12
Lebesgue 测度　32
Lebesgue 积分　199
Lebesgue 空间中函数的 Fourier 变换　324
Lebesgue 控制收敛定理　23
Lebesgue 微分定理　42
Leibniz 公式　101
Leray-Schauder 不动点定理　221
Lipschitz 条件　11
Lusin 定理　34
离散函数　277
离散函数空间　277
离散型的 Minkowski 不等式　393
离散型的 Hölder 不等式　279
连续函数空间　8
连续函数空间的嵌入定理　157
连续解　263
连续性　5
列紧集　1
列紧空间　1

M

Marcinkiewicz 插值定理　65
Meyers-Serrin 定理　124
Minkowski 不等式　15
Minkowski 积分不等式　69

N

N 重指数 (指标) 8
内积 4

P

Parseval 等式 ($\mathscr{S}'$ 空间) 318
Parseval 等式 ($\mathscr{S}$ 空间) 329
Parseval 等式 ($\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}'$ 空间) 323
Plancherel 定理 331
Poincaré 不等式 197
平凡迹 196
平行四边形定律 (公式) 30

Q

嵌入的含义 132
嵌入定理 141
嵌入算子 180
强紧集 60
强收敛 3
强型算子 65
区域的几何性质 113
权函数 15
全连续算子 (或称紧算子) 5

R

Rellich-Kondrachov 183
Riemann-Lebesgue 引理 326
Riesz 表示定理 12
Riesz-Thorin 插值定理 38
弱 $L^p(\Omega)$ 空间 65
弱导数的唯一性 98
弱紧集 60
弱收敛 7
弱型算子 65
弱 $*$ 收敛 7

S

索伯列夫空间的嵌入定理 132
索伯列夫空间在偏微分方程中的应用 (I) 219
索伯列夫空间在偏微分方程中的应用 (II) 349
S. L. Schwartz 80
商空间 343
数的正则化 36
双调和算子 244
速降函数 307

T

Toda 晶格 231
Tonelli 定理 69
特征函数 39
梯度算子 243
凸函数 39
凸性方法 382
凸性引理 361
脱氧核糖核酸 (DNA) 261

V

Vandemonde 行列式 191

W

$W(m;p)$ 是乘积空间 L^p_Q 中的一闭集 105
$W^{m,p}(\Omega)$ 是一致凸的 108
$W^{m,p}_0(\Omega)$ 的一个等价范数 197
$W^{m,p}(\Omega)$ 是可分的 105
$W^{m,p}(\Omega)$ 是自反的 110
$W^{m,p}_0(\Omega)$ 空间 104
$W^{m,p}(\Omega)$ 的对偶 126
$W^{m,p}_0(\Omega)$ 的赋范对偶 126
Weierstrass 定理 47
完备空间 2

X

线性泛函 4
线性赋范空间 2
线性空间 (向量空间) 2
线性算子 4

Y

Young 不等式 15
压缩映射原理 1
延拓定理 188
一般卷积 Young 不等式 40
一般线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题 242
一类四阶非线性发展方程初边值问题 257
一致连续 8
一致椭圆型方程 243
有限维空间连续映射的不动点定理 288

Z

展缩函数 41
整数阶索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 79
整体解的存在性与唯一性 223
正则化算子 41
支集 10
准紧集 1
坐标变换 132

其他

$\mathbb{R}^N$ 上的 Gagliardo-Nirenberg 插值定理 400
$(\mathscr{S})$ 317
$\mathscr{S}$ 空间中函数的 Fourier 变换 314
φ' 空间中函数的 Fourier 变换 320
Ω 具有强局部 Lipschitz 条件 114
Ω 具有线段条件 114
Ω 具有一致锥条件 114
Ω 具有一致 C^m- 正则性条件 115
Ω 具有锥条件 114
δ 函数 79
$\mathscr{S}$ 空间的 Fourier 逆变换 316
$\mathscr{S}'$ 的 Fourier 变换的反演 327
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 空间, 简记为 $\mathscr{S}'$ 311
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 空间, 简记为 $\mathscr{S}$ 307

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1　数理逻辑基础(上册)　1981.1　胡世华　陆钟万　著
2　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙　吕以辇　陈志华　著
3　组合论(上册)　1981.10　柯　召　魏万迪　著
4　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
5　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭　方开泰　著
6　概率论基础　1982.8　严士健、王隽骧　刘秀芳　著
7　数理逻辑基础(下册)　1982.8　胡世华　陆钟万　著
8　有限群构造(上册)　1982.11　张远达　著
9　有限群构造(下册)　1982.12　张远达　著
10　环与代数　1983.3　刘绍学　著
11　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
12　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
13　巴拿赫空间引论　1984.8　定光桂　著
14　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬　丁同仁　黄文灶　董镇喜　著
15　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久等　编
16　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔　邹异明　著
17　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　著
18　算子代数　1986.6　李炳仁　著
19　线性偏微分算子引论(上册)　1986.8　齐民友　著
20　实用微分几何引论　1986.11　苏步青等　著
21　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
22　线性代数群表示导论(上册)　1987.2　曹锡华等　著
23　模型论基础　1987.8　王世强　著
24　递归论　1987.11　莫绍揆　著
25　有限群导引(上册)　1987.12　徐明曜　著
26　组合论(下册)　1987.12　柯　召　魏万迪　著
27　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李　忠　著
28　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　著
29　同调代数　1988.2　周伯壎　著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青 段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜 陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉 冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙 吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇 张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英 李 冲 杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先 霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德 郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪 林 杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军 张 祥 董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚 马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎 陆传荣 张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯 顾凡及 蔡志杰 编著
78 同调论—— 代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒 李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川 崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李 雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群 尹景学 王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先 霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林 闫宝强 刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
105 散乱数据拟合的模型方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

132　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著
133　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著
134　算子代数与非交换 L_p 空间引论　2010.5　许全华、吐尔德别克、陈泽乾　著
135　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著
136　流形拓扑学　2010.8　马　天　著
137　局部域上的调和分析与分形分析及其应用　2011.6　苏维宜　著
138　Zakharov 方程及其孤立波解　2011.6　郭柏灵　甘在会　张景军　著
139　反应扩散方程引论(第二版)　2011.9　叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著
140　代数模型论引论　2011.10　史念东　著
141　拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法　2011.12　周作领　尹建东　许绍元　著
142　Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用　2012.3　苗长兴　吴家宏　章志飞　著
143　有约束条件的统计推断及其应用　2012.3　王金德　著
144　混沌、Mel'nikov 方法及新发展　2012.6　李继彬　陈凤娟　著
145　现代统计模型　2012.6　薛留根　著
146　金融数学引论　2012.7　严加安　著
147　零过多数据的统计分析及其应用　2013.1　解锋昌　韦博成　林金官　编著
148　分形分析引论　2013.3　胡家信　编著
149　索伯列夫空间导论　2013.8　陈国旺　编著